Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Zu den linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, welche durch einfache bestimmte Integrale auflösbar sind, gehört die von Herrn Tissot im 17^{ten} Bande von Liouville's Journal*) aufgestellte Gleichung, welche durch Integrale von der Form**)

$$(1)\quad \int_{a_k}^{a_l} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

befriedigt wird. Da ausser $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ auch die Werthe $-\infty$ und x als Integralgrenzen in (1) zulässig sind, so liefern diese Ausdrücke das vollständige Integral der genannten Differentialgleichung.

In den nachstehenden Untersuchungen, welche sich auf die nämliche Differentialgleichung beziehen, wird das System der particulären Lösungen derselben vervollständigt, indem die Hauptintegrale für die Umgebungen der einzelnen singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ und für das Gebiet der grossen Werthe von x, welches kurz die Horizontfläche der x-Ebene heissen möge, ermittelt werden. Diese Hauptintegrale lassen sich sämmtlich als bestimmte Integrale darstellen, in denen die zu integrirende Function die gleiche wie in dem Integral (1) ist; als Integrationswege kommen bei denselben neben einfachen Verbindungslinien auch geschlossene Curven, resp. Doppelumläufe vor. Die logarithmischen Fälle der Differentialgleichung werden hier nicht in Betracht gezogen.

Die particulären Integrale der Tissot'schen Gleichung werden in den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ nur wie Potenzen von $x-a_1$, $x-a_2$ etc. unstetig; man kann bei jedem zur Umgebung von a_ν gehörigen Hauptintegral, falls dasselbe für $x=a_\nu$ unendlich wird, die

*) pag. 177 „Sur un déterminant d'intégrales définies", 1852.

**) Die obige Bezeichnung stimmt mit der von Herrn Tissot angewendeten nicht völlig überein; namentlich ist hier (abgesehen von der Wahl anderer Buchstaben) u durch $-u$, und $n+1$ durch n ersetzt worden.

Unstetigkeit durch Division mit einer passenden Potenz von $x - a_\nu$ beseitigen. Dagegen treten für ein unbegrenzt wachsendes x Unstetigkeiten zweiter Art auf, die sich mit den Unstetigkeiten der Potenzen von x nicht vergleichen lassen.

Als eine wesentliche Eigenschaft der Tissot'schen Differentialgleichung ist hervorzuheben, dass dieselbe ein particuläres Integral besitzt, welches eine transcendente ganze Function von x ist. Dieses Integral, welches im Folgenden durch Y bezeichnet wird, hat in jedem beliebigen Theile der x-Ebene den Charakter eines Hauptintegrals. Für die Ermittelung der Hauptintegrale im Gebiete der grossen Werthe von x erweist sich bei der vorliegenden Differentialgleichung die Lösung durch bestimmte Integrale als besonders zweckmässig. Wegen der bei $x = \infty$ vorhandenen Unstetigkeiten zweiter Art wird die Methode, die Differentialgleichung durch Reihen mit fallenden Potenzen zu integriren, illusorisch. Die Hauptintegrale der Horizontfläche lassen sich jedoch sämmtlich in Gestalt bestimmter Integrale darstellen, wobei der in der vorstehenden Abhandlung „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve" bewiesene Satz zur Anwendung gelangt.

Man leitet in dem nachfolgenden § 1 zunächst die Bedingungen ab, unter denen ein bestimmtes Integral von der Form

$$\int U (u - x)^{\lambda - 1} \, du,$$

wo U nur von u abhängt, die Tissot'sche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung befriedigt. In §§ 2—4 wird auf die Tissot'sche Gleichung 3^{ter} Ordnung näher eingegangen. Die Hauptintegrale derselben für die Umgebungen der zwei endlichen singulären Punkte a_1 und a_2 sind in § 2, die Hauptintegrale für den Bezirk der grossen Werthe von x in § 3 angegeben. Der § 4 enthält einen zweiten Beweis der Eigenschaft des particulären Integrals Y, für alle endlichen Argumente x eindeutig und stetig zu sein.

Die Tissot'sche Gleichung liefert, wie am Schlusse des § 3 gezeigt wird, einen Anhalt für die Beantwortung der Frage, welche Bedeutung die divergenten Potenzreihen für die linearen Differentialgleichungen haben, denen sie formell genügen. Man findet in § 3 ein Hauptintegral der Horizontfläche, das ζ genannt wird, und das sich in eine convergente Reihe von der Form

$$(x - a_1)^{\lambda - 1} \left\{ \Lambda_0 + \frac{\Lambda_1}{x - a_1} + \frac{\Lambda_2}{(x - a_1)^2} + \cdots \right\}$$

entwickeln lässt. Die Grössen Λ_ν stellen transcendente Constanten dar, von denen je drei auf einander folgende, Λ_ν, $\Lambda_{\nu+1}$, $\Lambda_{\nu+2}$, durch eine lineare Relation mit rationalen Coefficienten verbunden sind, während der Quotient $\frac{\Lambda_{\nu+1}}{\Lambda_\nu}$ irrational ist. Da nun die Differentialgleichung, wenn man dieselbe durch eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten

$$S = (x-a_1)^{\lambda-1}\left\{c_0 + \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{(x-a_1)^2} + \cdots\right\}$$

integrirt, ausschliesslich rationale Beziehungen zwischen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ergiebt, so kann der Forderung, dass in letzterer Reihe die Function ζ enthalten sei, nur dadurch genügt werden, dass neben c_0 auch c_1 willkürlich bleibt. Für beliebige Werthe von c_0 und c_1 fällt aber die obige Reihe S in die Classe der divergenten Reihen, da ausser ζ kein anderes particuläres Integral mit dem Anfangsexponenten $\lambda - 1$ im Horizontgebiete existirt.

In §§ 5 und 6 wird die Tissot'sche Gleichung n^{ter} Ordnung behandelt. Man leitet in § 5 die Systeme der Hauptintegrale für die Umgebungen der Punkte a_ν und für die Horizontfläche zunächst unter der Voraussetzung ab, dass die reellen Bestandtheile der Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \lambda$ positiv sind. In § 6 wird von dieser Voraussetzung abgesehen. Die verschiedenen particulären Lösungen der Tissot'schen Gleichung lassen sich auch im allgemeinen Falle durch bestimmte Integrale darstellen, wenn man Integrale, deren Integrationsweg aus einem Doppelumlauf besteht, zu Hülfe nimmt. In § 7 wird auf die Bestimmung von Hauptintegralen für ringförmige Flächen eingegangen. Grenzt man in der x-Ebene irgend ein ringförmiges Flächenstück ab, welches eine beliebige Anzahl der singulären Punkte der Differentialgleichung umschliesst, selbst aber frei von singulären Punkten ist, so gehören auch zu einem solchen Flächenstück gewisse Hauptintegrale, d. h. particuläre Integrale, welche, wenn x auf dem ringförmigen Flächenstück einen Umlauf um die im Innern liegenden singulären Punkte ausführt, entweder unverändert bleiben oder nur einen constanten Factor aufnehmen. Es lässt sich nun das vollständige System der Hauptintegrale, die zu einer ringförmigen Fläche gehören, für die Tissot'sche Differentialgleichung allgemein aufstellen. Auch bei diesen Betrachtungen findet der Satz Anwendung, welcher in der vorstehenden Abhandlung abgeleitet wurde.

§ 1.

Die Tissot'sche Differentialgleichung kann auf die Form

$$
(2)\quad \begin{cases}
\varphi(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} - [(\lambda-n)_1\varphi'(x)+\psi(x)]\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\
+ [(\lambda-n+1)_2\,\varphi''(x) + (\lambda-n+1)_1\,\psi'(x)]\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\
- [(\lambda-n+2)_3\,\varphi'''(x) + (\lambda-n+2)_2\,\psi''(x)]\dfrac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \\
+\cdots+(-1)^{n-\nu}[(\lambda-\nu-1)_{n-\nu}\,\varphi^{(n-\nu)}(x) \\
\qquad\qquad + (\lambda-\nu-1)_{n-\nu-1}\,\psi^{(n-\nu-1)}(x)]\dfrac{d^\nu y}{dx^\nu} \\
+\cdots+(-1)^{n-1}[(\lambda-2)_{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+(\lambda-2)_{n-2}\psi^{(n-2)}(x)]\dfrac{dy}{dx} \\
+(-1)^n(\lambda-1)_{n-1}\,\psi^{(n-1)}(x)\,y = 0
\end{cases}
$$

gebracht werden, woselbst $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die ganzen Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x

$$
(3)\quad \begin{cases}
\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}), \\
\psi(x) = \varphi(x)\left[1+\dfrac{b_1}{x-a_1}+\dfrac{b_2}{x-a_2}+\cdots+\dfrac{b_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right],
\end{cases}
$$

und $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. die Ableitungen derselben bedeuten. Die Grössen $\lambda, a_1, b_1, \ldots$ sind constant; unter $(\lambda-n)_1$, $(\lambda-n+1)_2$, etc. werden Binomialcoefficienten verstanden. Man setzt y gleich dem bestimmten Integral

$$
(4)\qquad y = \int_g^h U(u-x)^{\lambda-1}\,du,
$$

in welchem die Grösse U nur von u abhängt, g constant, und h entweder constant oder gleich x ist. Falls h den Werth x hat, wird der reelle Theil der Constante $\lambda-n$ als positiv vorausgesetzt. Dann hat man

$$
\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = (-1)^\nu(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-\nu)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-\nu-1}du.
$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke kann die Gleichung (2) durch die Constante

$$
(-1)^n(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)
$$

dividirt werden, da

$$
(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-\nu)(\lambda-\nu-1)_{n-\nu} = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n)}{1.2\ldots(n-\nu)},
$$

$$
(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-\nu)(\lambda-\nu-1)_{n-\nu-1} = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)}{1.2\ldots(n-\nu-1)}
$$

ist. Man erhält hierdurch die Gleichung

$$(\lambda-n)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-n-1}\Big\{\varphi(x)+\varphi'(x)\frac{u-x}{1}+\varphi''(x)\frac{(u-x)^2}{1.2}+\cdots+\frac{\varphi^{(n-1)}(x)(u-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\Big\}du$$
$$+\int_g^h U(u-x)^{\lambda-n}\Big\{\psi(x)+\psi'(x)\frac{u-x}{1}+\psi''(x)\frac{(u-x)^2}{1.2}+\cdots+\frac{\psi^{(n-1)}(x)(u-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\Big\}du=0,$$

welche, nachdem der Taylor'sche Satz auf die in den Klammern befindlichen Ausdrücke angewendet worden ist, die Gestalt

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\lambda-n)\int_g^h\varphi(u)\;U(u-x)^{\lambda-n-1}du\\&\quad+\int_g^h\psi(u)\;U(u-x)^{\lambda-n}du\end{aligned}\right\}=0$$

annimmt*). Nach der Formel der theilweisen Integration ist aber

$$(\lambda-n)\int_g^h\varphi(u)\;U(u-x)^{\lambda-n-1}du$$
$$=\left[\varphi(u)\;U(u-x)^{\lambda-n}\right]_{u=g}^{u=h}-\int_g^h\frac{d[\varphi(u)\,U]}{du}(u-x)^{\lambda-n}du.$$

Also ergiebt sich aus (2) die Gleichung

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left[\varphi(u)\;U(u-x)^{\lambda-n}\right]_{u=g}^{u=h}\\&\int_g^h(u-x)^{\lambda-n}\Big\{\frac{d[\varphi(u)\,U]}{du}-\psi(u)\,U\Big\}du\end{aligned}\right\}=0.$$

Man stellt nun für die Function U die Differentialgleichung

$$(7)\qquad \frac{d[\varphi(u)\,U]}{du}-\psi(u)\,U=0$$

auf und unterwirft die Grössen g und h der Gleichung

$$(8)\qquad [\varphi(u)\,U(u-x)^{\lambda-n}]_{u=h}-[\varphi(u)\,U(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g}=0,$$

in welcher man die Werthe $u=g$ und $u=h$ durch den Integrationsweg von (4) in Verbindung gebracht denkt und die bezüglichen Aenderungen der von u abhängigen Function als stetige voraussetzt.

*) Diese Rechnung ist derjenigen völlig analog, welche der Verfasser im Abschnitt II der Abhandlung „Ueber hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung" in Crelle's Journal Bd. 71, pag. 336, angestellt hat (man beachte auch die Berichtigung in Crelle's Journ. Bd. 73, pag. 142—43). Jedoch bedeutet $\varphi(x)$ daselbst nicht eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, sondern eine ganze Function n^{ten} Grades von x.

Sind die Bedingungen (7) und (8) erfüllt, so befriedigt das Integral (4) die Differentialgleichung (2). In die aus (7) folgende Gleichung

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{du} = \frac{\psi(u) - \varphi'(u)}{\varphi(u)}$$

werden gemäss (3) die Werthe

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = 1 + \frac{b_1}{u-a_1} + \frac{b_2}{u-a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{u-a_{n-1}},$$

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{d\log\varphi(u)}{du} = \frac{1}{u-a_1} + \frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{1}{u-a_{n-1}}$$

eingesetzt, wodurch die Gleichung

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{du} = \frac{d\log U}{du} = 1 + \frac{b_1-1}{u-a_1} + \frac{b_2-1}{u-a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}-1}{u-a_{n-1}}$$

entsteht. Indem man dieselbe integrirt (unter Fortlassung der willkürlichen Integrationsconstante), findet man für U den Ausdruck

$$(9)\qquad U = e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}.$$

Die Bedingung (8) lautet hiernach

$$(10)\qquad \left\{\begin{matrix} [e^u(u-a_1)^{b_1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}}(u-x)^{\lambda-n}]_{u=h} \\ -[e^u(u-a_1)^{b_1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}}(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g} \end{matrix}\right\} = 0.$$

Man setzt die Ungleichheiten

$$(11)\qquad b_1 > 0,\ b_2 > 0, \ldots, b_{n-1} > 0,\ \lambda > n$$

als erfüllt voraus, die, falls die Constanten $b_1, \ldots, b_{n-1}, \lambda$ nicht reell sind, für die reellen Bestandtheile derselben gelten sollen. Dann ist der Gleichung (10) genügt, sobald für g und für h Werthe aus der Reihe

$$(12)\qquad a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, -\infty, x$$

substituirt werden. Bei dieser Bestimmung der Grenzen g, h ist das Integral

$$(13)\qquad y = \int_g^h \Phi(u, x)\, du,$$

in welchem $\Phi(u, x)$ die Function

$$(14)\quad \Phi(u,x) = e^u(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}(u-x)^{\lambda-1}$$

bedeutet, eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (2).

Man nimmt an, dass die Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sämmtlich von einander verschieden sind. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass keine der Constanten

$$\begin{cases} b_1+\lambda,\ b_2+\lambda, \ldots, b_{n-1}+\lambda,\ \lambda, \\ b_1+b_2+\cdots+b_{n-1},\quad b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+\lambda \end{cases}$$

gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei.

§ 2.

Es soll zunächst auf die Differentialgleichung 3ter Ordnung, die sich aus (2) für $n = 3$ ergiebt, eingegangen werden. Die Gleichungen (2) und (3) lauten für $n = 3$:

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi(x)\dfrac{d^3y}{dx^3} - [(\lambda-3)_1\varphi'(x) + \psi(x)]\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + [(\lambda-2)_2\varphi''(x) + (\lambda-2)_1\psi'(x)]\dfrac{dy}{dx} - (\lambda-1)_2\psi''(x)y = 0, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2), \\ \psi(x) = (x-a_1)(x-a_2) + b_1(x-a_2) + b_2(x-a_1). \end{cases}$$

Der Gleichung (15) genügt, wie bewiesen, das Integral

$$(17)\quad y = \int_g^h e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

dessen Grenzen g, h aus den Werthen

$$a_1,\ a_2,\ -\infty,\ x$$

gewählt werden. Man setzt, gemäss (11), die reellen Theile der Constanten $b_1, b_2, \lambda-3$ zunächst als positiv voraus.

In der Umgebung eines jeden der singulären Punkte a_1 und a_2 existiren ein mehrdeutiges Hauptintegral und zwei von einander unabhängige eindeutige Integrale. Der Ausdruck

$$(18)\quad \eta_1 = \int_{a_1}^x e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

stellt das mehrdeutige Hauptintegral im Bezirk von a_1, und der Ausdruck

$$(19)\quad \eta_2 = \int_{a_2}^x e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

das mehrdeutige Hauptintegral im Bezirk von a_2 dar. Auf das Integral (18) wird die Substitution

$$u - a_1 = \mathfrak{u}(x-a_1)$$

angewendet, wodurch dasselbe in das Product aus der Constante $(-1)^{\lambda-1}(a_1-a_2)^{b_2-1}e^{a_1}$ und der Function

$$(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}\int_0^1 e^{\mathfrak{u}(x-a_1)}\mathfrak{u}^{b_1-1}(1-\mathfrak{u})^{\lambda-1}\left(1-\mathfrak{u}\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^{b_2-1}d\mathfrak{u}$$

übergeht. Setzt man nun

$$e^{\mathfrak{u}(x-a_1)}\left[1-\mathfrak{u}\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right]^{b_2-1}$$

$$= \gamma_0 + \gamma_1\mathfrak{u}(x-a_1) + \gamma_2\mathfrak{u}^2(x-a_1)^2 + \cdots + \gamma_\nu\mathfrak{u}^\nu(x-a_1)^\nu + \cdots + \text{inf.},$$

so haben die Constanten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ die Werthe

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_1 = \frac{1}{1} - \frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1},\ \gamma_2 = \frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{1}\,\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1} + \frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1} + \frac{1}{1}\,\frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2} - \frac{(b_2-1)_3}{(a_2-a_1)^3}, \ldots,$$

$$\gamma_\nu = \frac{1}{\nu!} - \frac{1}{(\nu-1)!}\,\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1} + \frac{1}{(\nu-2)!}\,\frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2} - \cdots \pm \frac{1}{1}\,\frac{(b_2-1)_{\nu-1}}{(a_2-a_1)^{\nu-1}} \mp \frac{(b_2-1)_\nu}{(a_2-a_1)^\nu},$$

wo $(b_2-1)_\mu$ den μ^{ten} Binomialcoefficienten von b_2-1, und $\mu!$ die Zahl $1\,.\,2\ldots\mu$ bedeutet. Es ergiebt sich demnach die Beziehung

$$\frac{\eta_1}{(-1)^{\lambda-1}(a_1-a_2)^{b_2-1}\,e^{a_1}(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\gamma_\nu(x-a_1)^\nu\int_0^1 \mathfrak{u}^{b_1+\nu-1}(1-\mathfrak{u})^{\lambda-1}d\mathfrak{u}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\gamma_\nu(x-a_1)^\nu E(b_1+\nu,\lambda),$$

wenn für das Euler'sche Integral erster Art die abgekürzte Bezeichnung

$$E(p,q) = \int_0^1 \mathfrak{u}^{p-1}(1-\mathfrak{u})^{q-1}\,d\mathfrak{u}$$

benutzt wird. Da aber für ein positives ganzzahliges ν die Formel

$$(20)\qquad E(p+\nu,q) = \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+\nu-1)}\,E(p,q)$$

gilt, so erhält man für das Integral (18) die Gleichung

$$(21)\quad \eta_1 = A_1(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\gamma_\nu\,\frac{b_1(b_1+1)\ldots(b_1+\nu-1)}{(b_1+\lambda)(b_1+\lambda+1)\ldots(b_1+\lambda+\nu-1)}\,(x-a_1)^\nu,$$

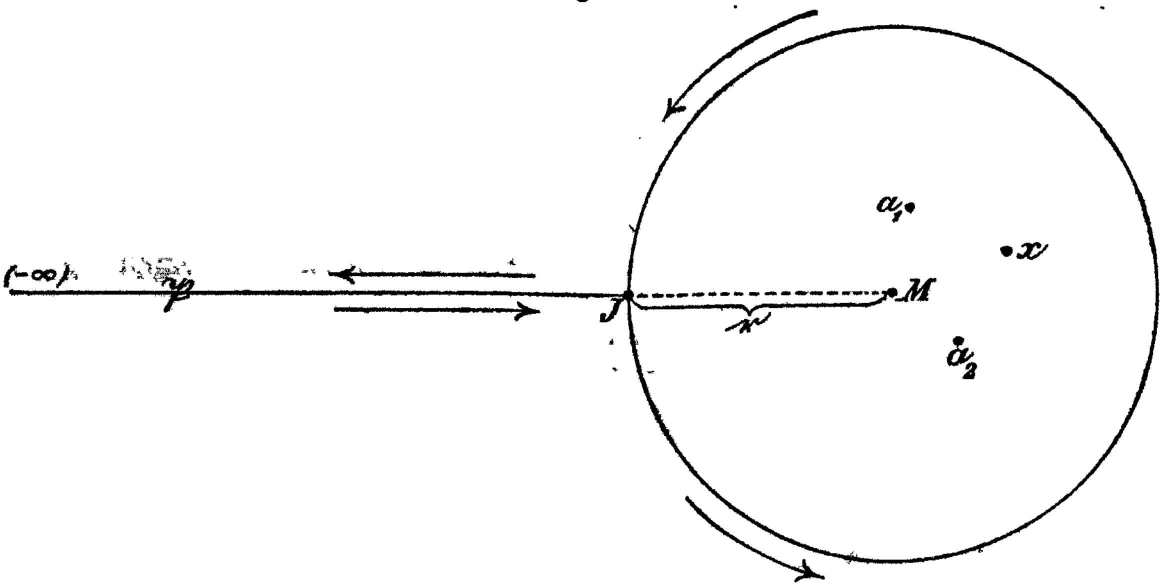
in welcher A_1 die Constante

$$A_1 = (-1)^{\lambda-1}(a_1-a_2)^{b_2-1}e^{a_1}E(b_1,\lambda)$$

bedeutet. Für das Integral (19) entsteht eine analoge Gleichung, wenn a_1 und a_2, b_1 und b_2 mit einander vertauscht werden.

Es soll ferner als Integrationsweg des Integrals (17) eine geschlossene Curve genommen werden, welche in $-\infty$ beginnt und endigt. Der Gleichung (10) ist durch die Werthe $g = h = -\infty$ genügt. Man zieht, nachdem für x ein bestimmter Werth gewählt worden ist, um einen beliebigen Punkt M als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Punkte x, a_1 und a_2 umschliesst. Der Radius $\mathfrak{r}$ dieses Kreises bleibt im Uebrigen willkürlich, möge jedoch so gross genommen werden, dass der Punkt x sowohl dem Punkte a_1 als dem Punkte a_2 näher liegt, als irgend ein Punkt der Peripherie. Man zieht ferner vom Punkte M aus eine Parallele $\mathfrak{P}$ zur negativen reellen Axe; der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden $\mathfrak{P}$ heisse J. Lässt man

Fig. 1.



nun in (17) die Integrationsvariable u zuerst die Gerade $\mathfrak{P}$ von $-\infty$ bis zum Punkte J, hierauf den Kreis (im positiven Sinne) und zum zweiten Male die genannte Gerade von J bis $-\infty$ durchlaufen, so ist nach § 1 der Ausdruck (17) eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (15). Das so definirte Integral, das Y heissen möge, wird in abgekürzter Weise (cfr. § 1 der Abhandlung des Verfassers „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" im 35^{ten} Bande dieser Annalen) durch das Symbol

$$(22) \qquad Y = \int_{-\infty}^{\overline{(x,a_1,a_2)}} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

dargestellt.

Das Integral (22) ist eine transcendente ganze Function von x, d. h. dasselbe ist endlich und stetig, sobald x im Endlichen liegt, und hat für jeden Werth von x nur einen Werth, nachdem bestimmte Anfangswerthe der Potenzen $(u-a_1)^{b_1-1}$, $(u-a_2)^{b_2-1}$, $(u-x)^{\lambda-1}$ gewählt worden sind. Lässt man die Grösse x innerhalb der oben erwähnten Kreisfläche (Fig. 1) eine geschlossene Curve durchlaufen, welche den Punkt a_1 oder den Punkt a_2 oder beide Punkte umschliesst, so liefert der Endpunkt dieser Curve denselben Werth der zu integrirenden Function in (22), wie der Ausgangspunkt, da x keinen der Punkte u umkreist hat; auch bleibt der Integrationsweg des Integrals (22) ungeändert, weil er von der x-Curve nicht geschnitten wird. Hieraus folgt, dass der Ausdruck (22) in der ganzen Ebene eine eindeutige Function von x ist; denn ausser a_1 und a_2 sind für die particulären Integrale der Gleichung (15) keine (im Endlichen liegende) singuläre Punkte vorhanden. Der Beweis, dass das Integral (22) für ein endliches x auch endlich und stetig ist, ergiebt sich einerseits aus dem Umstande, dass die sehr entfernten Theile des Integrationsweges nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe des bestimmten Integrals liefern, andererseits daraus, dass für die übrigen Theile des Integrationsweges die Potenzen $(u-a_1)^{b_1-1}$, $(u-a_2)^{b_2-1}$, $(u-x)^{\lambda-1}$ einen endlichen Werth haben.

Um das Integral (22) nach steigenden Potenzen von $x-a_1$ zu entwickeln, substituirt man für $(u-x)^{\lambda-1}$ die Reihe

$$(u-x)^{\lambda-1}=[u-a_1-(x-a_1)]^{\lambda-1}=(u-a_1)^{\lambda-1}\left(1-\frac{x-a_1}{u-a_1}\right)^{\lambda-1}$$

$$=(u-a_1)^{\lambda-1}\left\{1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_1}{u-a_1}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{x-a_1}{u-a_1}\right)^\nu+\cdots\right\},$$

welche im vorliegenden Falle stets convergirt, weil (nach der Definition des Kreisradius $\mathfrak{r}$) für jeden Punkt u des Integrationsweges die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,(x-a_1)<\text{mod.}\,(u-a_1)$$

besteht. Hierdurch ergiebt sich für Y der Ausdruck

$$Y=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu K_\nu(x-a_1)^\nu, \tag{23}$$

wenn durch K_ν das constante Integral

$$\int e^u(u-a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2}(u-a_2)^{b_2-1}du,$$

dessen Integrationsweg mit dem des Integrals (22) übereinstimmt, bezeichnet wird. Für K_ν hat man den abgekürzten Ausdruck

$$K_\nu=\int_{-\infty}^{*(a_1,a_2)}e^u(u-a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2}(u-a_2)^{b_2-1}du, \tag{24}$$

da a_1 und a_2 singuläre Punkte der zu integrirenden Function sind, die vom Integrationswege umschlossen werden. In (24) wird eine neue Variable $\mathfrak{u}$ mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{u}=u-a_1,\quad u=\mathfrak{u}+a_1$$

eingeführt. Diese Substitution liefert, wenn die Differenz a_2-a_1 durch p bezeichnet wird, für K_ν die Gleichung

$$(25) \qquad K_\nu = e^{a_1} \overline{\int}_{-\infty}^{(0,p)} e^{\mathfrak{u}} \mathfrak{u}^{b_1+\lambda-\nu-2} (\mathfrak{u}-p)^{b_2-1} d\mathfrak{u},$$

da den Werthen $u = a_1$ und $u = a_2$ die Werthe $\mathfrak{u} = 0$ und $\mathfrak{u} = p$ entsprechen. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass in Fig. 1 der Kreismittelpunkt M, der beliebig war, mit dem Punkte a_1 zusammenfalle. Dann durchläuft in (25) die Variable $\mathfrak{u}$ einerseits einen Abschnitt der negativen reellen Axe (in beiden Richtungen), andererseits einen Kreis, welcher den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat und den Punkt p umschliesst.

Die Grösse K_ν hat die Form eines Integrals, das einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten genügt, wenn p als die unabhängige Variable aufgefasst wird. In § 3 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten" im 36ten Bande dieser Annalen wird gezeigt, dass das Integral

$$\overline{\int}_{\infty}^{(0,x)} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du$$

die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2y}{dx^2} = (x-\varrho) \frac{dy}{dx} + \alpha y$$

befriedigt, und dass dasselbe mit der Reihe

$$\overline{\Gamma}(1-\varrho) \left\{1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\varrho} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)} x^2 + \cdots + \text{inf.}\right\}$$

identisch ist. Das Symbol $\overline{\Gamma}(a)$ stellt das geschlossene Integral

$$\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1} du$$

dar, welches, wenn der reelle Theil von a ein positives Vorzeichen hat, mit dem Euler'schen Integral $\Gamma(a)$ durch die Gleichung

$$\overline{\Gamma}(a) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}) \Gamma(a) = 2i \sin(\pi a) \Gamma(a)$$

verbunden ist. Ferner möge, wie dort, durch $F(\alpha; \varrho; x)$ die Reihe

$$(26) \qquad F(\alpha; \varrho; x) = 1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\varrho} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)} x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

bezeichnet werden. Ersetzt man in dem oben erwähnten Integral die Grössen x, α, ϱ durch die respectiven Werthe p, $1-b_2$, $\nu-b_1-b_2-\lambda+3$, so erhält man das auf der rechten Seite von (25) stehende bestimmte Integral. Demnach besteht die Gleichung

$$K_\nu = e^{a_1} \overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-\nu-2)\, F(1-b_2;\, \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\, p).$$

Für die Constante $\overline{\Gamma}(a-\nu)$ gilt die Formel (Gleichung (38) der Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" im 35ten Bande dieser Annalen)

$$\overline{\Gamma}(a-\nu)=\frac{(-1)^\nu\overline{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-\nu)}.$$

Also ist

$$\overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-\nu-2)=(-1)^\nu\frac{\overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-2)}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu},$$

wenn unter $[z]_\nu$, für ein beliebiges z und für ein positives ganzzahliges ν, der Werth

$$(27)\qquad [z]_\nu=z(z-1)(z-2)\dots(z-\nu+1),\quad [z]_0=1,$$

verstanden wird. Man findet auf diese Weise für K_ν den Ausdruck

$$(28)\qquad K_\nu=\frac{(-1)^\nu B}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ p),$$

in welchem B die Constante

$$B=e^{a_1}\overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-2),$$

und p die Differenz a_2-a_1 bedeutet. Nach Substitution dieses Werthes von K_ν nimmt die Gleichung (23) die Form

$$(29)\qquad \begin{cases} Y=\overline{\int}_{-\infty}^{(x,a_1,a_2)} e^u(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du \\ \quad =B\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(\lambda-1)_\nu(x-a_1)^\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1)\end{cases}$$

an.

In dem Integral Y ist keiner der singulären Punkte a_1, a_2 vor dem anderen bevorzugt, woraus folgt, dass in (29) die Constanten a_1 und a_2, b_1 und b_2 mit einander vertauscht werden können. Daher besteht, wenn man B' die Constante

$$e^{a_2}\overline{\Gamma}(b_1+b_2+\lambda-2)$$

nennt, für Y auch die Gleichung

$$Y=B'\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(\lambda-1)_\nu(x-a_2)^\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}F(1-b_1;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_1-a_2).$$

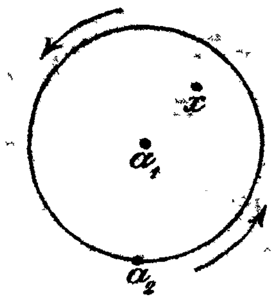
Um ausser Y je eine weitere eindeutige Lösung der Gleichung (15) für die Umgebung des Punktes a_1, bezw. für die Umgebung des Punktes a_2 zu erhalten, wählt man beide Grenzen g, h des Integrals (17) zunächst gleich a_2, dann gleich a_1. Wird als Weg der Variable u eine geschlossene Curve genommen, welche im Punkte a_2 beginnt und endigt und die Punkte x und a_1 umschliesst, so ergiebt sich aus

(17) ein Integral der Differentialgleichung, das in der Umgebung des Punktes a_1 (aber nicht in der des Punktes a_2) eindeutig ist. Dasselbe heisse $y_2^{(1)}$, so dass

$$(30) \qquad y_2^{(1)} = \overline{\int_{a_2}}^{(x,a_1)} e^u (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

gesetzt wird. Der Integrationsweg sei, um eine bestimmte Curve zu fixiren, ein durch den Punkt a_2 gehender Kreis, in dessen Innern die Punkte x und a_1 liegen (Fig. 2). Führt die Grösse x innerhalb dieses Kreises einen Umlauf um den Punkt a_1 aus, so bleibt in (30) der Integrationsweg ungeändert, und die zu integrirende Function hat, da alle Punkte u ausserhalb der x-Curve liegen, schliesslich denselben Werth wie am Anfang. Folglich ist $y_2^{(1)}$ eine in der Umgebung des Punktes a_1 eindeutige Function von x. Ferner ist $y_2^{(1)}$ für $x = a_1$ endlich und stetig, da die zu integrirende Function endlich und stetig bleibt, und der Integrationsweg eine endliche Länge hat. Man entwickelt das Integral $y_2^{(1)}$ nach steigenden Potenzen von $x - a_1$, indem man, wie oben, für $(u-x)^{\lambda-1}$ die Reihe

Fig. 2.



$$(u-a_1)^{\lambda-1}\left\{1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_1}{u-a_1}+\cdots+(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{x-a_1}{u-a_1}\right)^\nu+\cdots\right\}$$

einsetzt. Dieselbe ist convergent, weil x zur Umgebung des Punktes a_1 gehören soll, also mod. $(x-a_1) <$ mod. $(u-a_1)$ vorausgesetzt werden darf. Es ergiebt sich hierdurch die Gleichung

$$(31) \qquad y_2^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu \mathfrak{K}_\nu (x-a_1)^\nu,$$

woselbst $\mathfrak{K}_\nu$ das constante Integral

$$\mathfrak{K}_\nu = \overline{\int_{a_2}}^{(a_1)} e^u (u-a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2}(u-a_2)^{b_2-1}\,du$$

ist. Wird letzteres durch die Substitution $u = \mathfrak{u} + a_2$, $\mathfrak{u} = u - a_2$ umgeformt, so durchläuft die Variable $\mathfrak{u}$, der obigen Bestimmung gemäss, vom Nullpunkte aus einen Kreis, welcher den Punkt $a_1 - a_2$, $= -p$, umschliesst, und es entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{K}_\nu = e^{a_2}\overline{\int_0}^{(-p)} e^{\mathfrak{u}}(\mathfrak{u}+p)^{b_1+\lambda-\nu-2}\,\mathfrak{u}^{b_2-1}\,d\mathfrak{u}.$$

Aber nach der oben erwähnten Abhandlung „Ueber die lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten“ (Gl. (35)) ist

$$\overline{\int_0}^{(x)} e^{u}(u-x)^{-\alpha}u^{\alpha-\varrho}\,du$$
$$=\overline{E}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha)x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x),$$

wo F das Functionszeichen (26), und $\overline{E}(r, s)$ das geschlossene Integral

$$\overline{E}(r, s)=\overline{\int_0}^{(1)} u^{r-1}(u-1)^{s-1}\,du \tag{32}$$

bedeutet. Hieraus folgt für $\mathfrak{K}_\nu$ der Ausdruck

$$\mathfrak{K}_\nu=e^{a_2}(-p)^{b_1+b_2+\lambda-\nu-2}\,\overline{E}(b_2, b_1+\lambda-\nu-1)F(b_2;b_1+b_2+\lambda-\nu-1;-p).$$

Nun gilt, wenn ν eine positive ganze Zahl ist, für $\overline{E}(r, s-\nu)$ die Formel (cfr. „Zur Theorie der Euler'schen Integrale", (27a))

$$\overline{E}(r, s-\nu)=(-1)^\nu\frac{[r+s-1]_\nu}{[s-1]_\nu}\overline{E}(r, s)$$
$$=(-1)^\nu\frac{(r+s-1)(r+s-2)\ldots(r+s-\nu)}{(s-1)(s-2)\ldots(s-\nu)}\overline{E}(r, s).$$

Indem man dieselbe für $r=b_2$, $s=b_1+\lambda-1$ anwendet und $\mathfrak{B}$ die (von ν unabhängige) Constante

$$\mathfrak{B}=e^{a_2}(a_1-a_2)^{b_1+b_2+\lambda-2}\,\overline{E}(b_2, b_1+\lambda-1)$$

nennt, findet man

$$\mathfrak{K}_\nu=\frac{\mathfrak{B}}{(a_2-a_1)^\nu}\frac{[b_1+b_2+\lambda-2]_\nu}{[b_1+\lambda-2]_\nu}F(b_2;\ b_1+b_2+\lambda-\nu-1;\ a_1-a_2).$$

Die Reihenentwicklung des Integrals (30) lautet also

$$y_2^{(1)}=\mathfrak{B}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\frac{[b_1+b_2+\lambda-2]_\nu}{[b_1+\lambda-2]_\nu}\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^\nu$$
$$\cdot F(b_2;\ b_1+b_2+\lambda-\nu-1;\ a_1-a_2).$$

Durch Vertauschung der Punkte a_1 und a_2 erhält man aus (30) das Integral

$$y_1^{(2)}=\overline{\int_{a_1}}^{(x, a_2)} e^{u}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du, \tag{33}$$

das ebenfalls die Differentialgleichung (15) befriedigt und in der Umgebung von a_2 eine eindeutige stetige Function von x ist.

§ 3.

Das in (22) definirte Integral Y stellt, als transcendente ganze Function von x, auch im Gebiet der grossen x ein Hauptintegral der Differentialgleichung (15) dar. Neben Y existiren in dem genannten

Gebiete der x-Ebene, welches kurz als Horizontfläche bezeichnet wird, zwei mehrdeutige Hauptintegrale.

Da die Differentialgleichung (15) keine anderen endlichen singulären Punkte als a_1 und a_2 hat, so sind ihre Hauptintegrale im Gebiet der grossen Werthe von x dadurch charakterisirt, dass sie einen constanten Factor aufnehmen, wenn x die Punkte a_1 und a_2 in einer geschlossenen, sich nicht schneidenden Curve umkreist. Wählt man nun in (17) die vom Punkte a_1 zum Punkte a_2 gezogene Gerade als Integrationsweg, so erhält man das Integral

$$(34) \qquad \xi = \int_{a_1}^{a_2} e^u (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} (u-x)^{\lambda-1} du,$$

dessen sämmtliche Elemente den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ aufnehmen, wenn x einen positiven Umlauf um die Verbindungslinie von a_1 und a_2 ausführt. Der genannte Factor tritt, weil alle Punkte u innerhalb der von x beschriebenen Curve liegen, zu der Potenz $(u-x)^{\lambda-1}$ hinzu, während die übrigen Factoren der zu integrirenden Function, sowie der Integrationsweg unverändert bleiben. Demnach ist ξ ein Hauptintegral der Horizontfläche, welches daselbst die gleiche Art von Mehrdeutigkeit zeigt, wie die Potenz x^λ. Der Quotient $\frac{\xi}{x^{\lambda-1}}$ behält für $x=\infty$ einen endlichen Werth, da aus (34) die Gleichung

$$\frac{\xi}{x^{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1} \int_{a_1}^{a_2} e^u (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} \left(1-\frac{u}{x}\right)^{\lambda-1} du$$

folgt, auf deren rechter Seite eine stetig bleibende Function zwischen endlichen Grenzen integrirt wird. Um für ξ eine Potenzreihe abzuleiten, construire man um a_1 als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Peripherie durch a_2 geht, und setze voraus, dass der Punkt x ausserhalb dieses Kreises liege. Dann besteht für alle Punkte u der Verbindungslinie von a_1 und a_2 die Ungleichheit mod. $(u-a_1) <$ mod. $(x-a_1)$, so dass die Reihe

$$\begin{aligned}(u-x)^{\lambda-1} &= (-1)^{\lambda-1}(x-a_1)^{\lambda-1}\left(1-\frac{u-a_1}{x-a_1}\right)^{\lambda-1} \\ &= (-1)^{\lambda-1}(x-a_1)^{\lambda-1}\Big\{1-(\lambda-1)_1\frac{u-a_1}{x-a_1}+\cdots \\ &\qquad\qquad +(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{u-a_1}{x-a_1}\right)^\nu+\cdots\Big\}\end{aligned}$$

convergirt. Die Substitution derselben in das Integral (34) führt zu der Gleichung

$$\xi = (-1)^{\lambda-1}(x-a_1)^{\lambda-1}\sum (-1)^\nu(\lambda-1)_\nu L_\nu (x-a_1)^{-\nu},$$

wo durch L_ν das constante Integral

$$L_\nu = \int_{a_1}^{a_2} e^u (u - a_1)^{b_1+\nu-1} (u - a_2)^{b_2-1}\, du$$

bezeichnet wird. Indem man $u - a_1 = \mathfrak{u}$ setzt und für $a_2 - a_1$ wiederum p schreibt, erhält man für L_ν den Ausdruck

$$L_\nu = e^{a_1} \int_0^p e^{\mathfrak{u}} \mathfrak{u}^{b_1+\nu-1} (\mathfrak{u} - p)^{b_2-1}\, d\mathfrak{u},$$

der, wegen der Gleichung (cfr. Gl. (10) und (11) der Abh. „Ueber d. lin. Differentialgleichung 2ter Ord. mit lin. Coeff." im 36ten Bande dieser Annalen)

$$\int_0^x e^{\mathfrak{u}} (\mathfrak{u} - x)^{-\alpha} \mathfrak{u}^{\alpha-\varrho}\, d\mathfrak{u}$$
$$= (-1)^{-\alpha} E(\alpha - \varrho + 1, 1 - \alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1; 2 - \varrho; x),$$

mit dem Producte

$$(-1)^{b_2-1} e^{a_1} p^{b_1+b_2+\nu-1} E(b_1 + \nu, b_2) F(b_1 + \nu; b_1 + b_2 + \nu; p)$$

identisch ist. Wird $[z]_\nu^+$ für ein beliebiges z und für ein positives ganzzahliges ν als der Werth

$$(35)\qquad [z]_\nu^+ = z(z+1)\cdots(z+\nu-1), \quad [z]_0^+ = 1,$$

definirt, so ist nach (20)

$$E(b_1 + \nu, b_2) = \frac{[b_1]_\nu^+}{[b_1 + b_2]_\nu^+} E(b_1, b_2).$$

Also hat man

$$L_\nu = (-1)^{1-\lambda}\, \mathfrak{C} (a_2 - a_1)^\nu \frac{[b_1]_\nu^+}{[b_1 + b_2]_\nu^+} F(b_1 + \nu; b_1 + b_2 + \nu; a_2 - a_1),$$

wo $\mathfrak{C}$ die Constante

$$\mathfrak{C} = (-1)^{\lambda+b_2} e^{a_1} (a_2 - a_1)^{b_1+b_2-1} E(b_1, b_2)$$

bedeutet. Für das Integral ζ ergiebt sich auf diese Weise die Reihenentwickelung

$$(36)\qquad \begin{cases} \zeta = \int_{a_1}^{a_2} e^u (u - a_1)^{b_1-1} (u - a_2)^{b_2-1} (u - x)^{\lambda-1}\, du \\ = \mathfrak{C}(x - a_1)^{\lambda-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu \frac{(\lambda-1)_\nu [b_1]_\nu^+}{[b_1 + b_2]_\nu^+} \left(\frac{a_2 - a_1}{x - a_1}\right)^\nu \\ \qquad \cdot F(b_1 + \nu; b_1 + b_2 + \nu; a_2 - a_1). \end{cases}$$

Das dritte Hauptintegral der Horizontfläche wird durch den Ausdruck

$$(37)\qquad \omega = \int_x^{\overline{(a_1, a_2)}} e^u (u - a_1)^{b_1-1} (u - a_2)^{b_2-1} (u - x)^{\lambda-1}\, du$$

dargestellt. Dieses Integral ω, dessen Integrationsweg aus einem (bei x beginnenden und endigenden) Umlaufe um die Verbindungslinie der Punkte a_1 und a_2 besteht, nimmt den Factor

$$e^{2\pi i(b_1+b_2+\lambda)}$$

auf, wenn die Variable x die genannte Verbindungslinie im positiven Sinne umkreist (cfr. § 1 des vorstehenden Aufsatzes „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve"). Der Quotient $\frac{\omega}{x^{b_1+b_2+\lambda}}$ ist also ausserhalb einer die Punkte a_1 und a_2 umschliessenden Curve eine eindeutige Function von x. Dem vollständigen Integral der Differentialgleichung (15) wird man hiernach im Gebiete der grossen Werthe von x die Form

$$y = C_1\zeta + C_2 Y + C_3\omega$$

geben, wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Constante sind.

Nach einem von Herrn Fuchs bewiesenen Satze*) sind die Summe der zu den Hauptintegralen gehörigen Potenzexponenten, genommen in Bezug auf alle endlichen singulären Punkte, und die Summe der betreffenden Exponenten für das Gebiet der grossen x gleich zwei Werthen, die sich nur um eine ganze Zahl von einander unterscheiden. Wendet man diesen Satz auf die Differentialgleichung (15) an, so ergiebt sich, da $0, 1, b_1+\lambda-1$, bezw. $0, 1, b_2+\lambda-1$ die Anfangsexponenten der Reihen in der Umgebung des Punktes a_1, bezw. a_2 sind, für die erstere Summe der Ausdruck $b_1+b_2+2\lambda$. In der Horizontfläche sind die zu Y, ζ, ω gehörigen Exponenten gleich 0, $\lambda-1$, $b_1+b_2+\lambda$, ihre Summe gleich $b_1+b_2+2\lambda-1$, so dass die hier ermittelten Werthe in der That dem obigen Satze entsprechen.

Versucht man, die Differentialgleichung (15) durch eine Reihe von der Form

$$y = c_0(x-a_1)^{\varkappa} + c_1(x-a_1)^{\varkappa-1} + c_2(x-a_1)^{\varkappa-2} + \cdots \tag{38}$$

zu integriren, so findet man für den Anfangsexponenten $\varkappa$ die quadratische Gleichung

$$[\varkappa-(\lambda-1)]\,[\varkappa-(\lambda-2)] = 0.$$

Wird $\varkappa=\lambda-1$ gesetzt, so bleibt von den Coefficienten ausser c_0 auch c_1 willkürlich. Die Reihe (38) ist im Allgemeinen divergent. Ueber die ihr zukommende Bedeutung geben aber die vorstehenden Rechnungen einen gewissen Aufschluss. Die Reihe (38) enthält als speciellen Fall die in (36) angeführte Reihe, die mit dem Integral ζ identisch ist, und zwar geht sie in letztere über, wenn für $\varkappa$ und $\frac{c_1}{c_0}$ die Werthe $\varkappa=\lambda-1$ und

$$\frac{c_1}{c_0} = (1-\lambda)\frac{L_1}{L_0} = \frac{(1-\lambda)b_1}{(b_1+b_2)}(a_2-a_1)\frac{F(b_1+1;\, b_1+b_2+1;\, a_2-a_1)}{F(b_1;\, b_1+b_2;\, a_2-a_1)}$$

*) Cfr. Crelle's Journal Bd. 66, pag. 142.

gewählt werden. In diesem Falle convergirt also die Reihe (38). In allen übrigen Fällen ist sie divergent. Denn die Ausdrücke ζ, Y, ω stellen das vollständige System der Hauptintegrale für den Bezirk der grossen Werthe von x dar; ausser ζ ist kein particuläres Integral der Differentialgleichung (15) vorhanden, das, wenn x die Verbindungslinie von a_1 und a_2 umkreist, den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ aufnähme. Hieraus geht hervor, dass die erwähnte Gleichung für den Exponenten $\varkappa$, obwohl sie quadratisch ist, doch nur zu einem der particulären Integrale der Gleichung (15) in Beziehung steht, nämlich zu dem Integral ζ, dessen Unstetigkeit bei $x=\infty$ durch Division mit der Potenz $x^{\lambda-1}$ beseitigt werden kann. Der Umstand, dass für $\varkappa=\lambda-1$ der Quotient $\frac{c_1}{c_0}$ bei der obigen formellen Lösung der Differentialgleichung beliebig bleibt, gestattet, den irrationalen Werth $(1-\lambda)\frac{L_1}{L_0}$ für $\frac{c_1}{c_0}$ einzuführen, wodurch jene allein convergente Reihe aus (38) erhalten wird. Damit aber c_1 willkürlich neben c_0 sei (also auch der Fall $c_0=0$, $c_1=1$ möglich werde), muss formell der Werth $\varkappa=\lambda-2$ ausser dem Werthe $\varkappa=\lambda-1$ zulässig, mithin die Gleichung für $\varkappa$ quadratisch sein. Je drei Grössen L_ν, $L_{\nu+1}$, $L_{\nu+2}$ stehen, wie sich leicht zeigen lässt, zu einander in der Beziehung

$$(a_1-a_2)(b_1+\nu)L_\nu+(a_1-a_2+b_1+b_2+\nu)L_{\nu+1}+L_{\nu+2}=0.$$

Definirt man Λ_ν als das Product

$$\Lambda_\nu=(-1)^{\lambda-1+\nu}(\lambda-1)_\nu L_\nu,$$

so dass die Reihe für ζ

$$\zeta=(x-a_1)^{\lambda-1}\left\{\Lambda_0+\frac{\Lambda_1}{x-a_1}+\frac{\Lambda_2}{(x-a_1)^2}+\cdots\right\}$$

lautet, so geht die obige Gleichung zwischen L_ν, $L_{\nu+1}$, $L_{\nu+2}$ in die Relation

$$\left.\begin{array}{r}(a_1-a_2)(b_1+\nu)(\lambda-\nu-1)(\lambda-\nu-2)\Lambda_\nu\\ -(a_1-a_2+b_1+b_2+\nu)(\nu+1)(\lambda-\nu-2)\Lambda_{\nu+1}+(\nu+1)(\nu+2)\Lambda_{\nu+2}\end{array}\right\}=0$$

über. Letztere ist mit derjenigen Relation identisch, welche bei der Integration der Differentialgleichung (15) durch die Reihe (38) die Coefficienten c_ν, $c_{\nu+1}$, $c_{\nu+2}$ mit einander verbindet.

Es ist bisher vorausgesetzt worden, dass die reellen Bestandtheile der Constanten b_1, b_2, $\lambda-3$ positiv seien. Die auf λ bezügliche Beschränkung kann nun dahin abgeändert werden, dass der reelle Theil von λ selbst als positiv vorausgesetzt wird. Denn da die Reihen, in welche die bestimmten Integrale entwickelt worden sind, der Differentialgleichung (15) für beliebige Werthe der Constanten b_1, b_2 und λ genügen, so brauchen letztere nur diejenigen Bedingungen zu erfüllen, von denen die Convergenz der bestimmten Integrale abhängt. Die hier betrachteten Integrale haben aber, sobald b_1, b_2, λ im reellen Theil positiv sind, sämmtlich einen bestimmten Sinn. Auf den Fall, wo die reellen Theile von b_ν, λ negativ sind, wird in § 6 näher eingegangen.

§ 4.

Da das Integral Y mit der in (29) angegebenen Reihe identisch ist, so kann man die Eigenschaften desselben durch Betrachtung jener Reihe ableiten. Es soll nun der Satz, dass Y eine transcendente ganze Function von x ist, auch in der Art bewiesen werden, dass man zeigt, dass die Reihe (29) für jeden endlichen Werth von x convergirt.

In der Reihe

$$F(\alpha;\,\varrho;\,z) = 1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\varrho} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)} z^2 + \cdots + \text{inf.}$$

sei $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$, wo ϱ_1 und ϱ_2 reelle Werthe bedeuten; ferner werde mod. α kurz durch α', und mod. z durch z' bezeichnet. Ist ϱ_1 positiv und grösser als α', so besteht, wie sich aus der folgenden einfachen Rechnung ergiebt, die Ungleichheit

$$\text{mod. } F(\alpha;\,\varrho;\,z) < e^{z'}. \tag{39}$$

Da für reelle positive Werthe der Grösse ϱ_1 und einer sonst beliebigen Grösse σ

$$\text{mod. } (\alpha+\sigma) \leqq \alpha' + \sigma,$$

$$\text{mod. } (\varrho+\sigma) = \text{mod. } (\varrho_1+\sigma+i\varrho_2) \geqq \varrho_1 + \sigma,$$

$$\text{mod. } \frac{\alpha+\sigma}{\varrho+\sigma} \leqq \frac{\alpha'+\sigma}{\varrho_1+\sigma}$$

ist, so folgt aus der Voraussetzung $\varrho_1 > \alpha'$ die Ungleichheit

$$\text{mod. } \frac{\alpha+\sigma}{\varrho+\sigma} < 1,$$

die auch für $\sigma = 0$ gilt. Man findet also, indem man durch k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet und der Grösse σ nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots, k-1$ giebt, die Ungleichheiten

$$\text{mod. } \left(\frac{\alpha}{\varrho}\;\frac{\alpha+1}{\varrho+1}\;\frac{\alpha+2}{\varrho+2}\cdots\frac{\alpha+k-1}{\varrho+k-1}\right) < 1,$$

$$\text{mod. } \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+k-1)}\;\frac{z^k}{1\,.\,2\ldots k}\right) < \frac{z'^k}{1\,.\,2\ldots k}.$$

Aber der Modul einer Reihe ist höchstens gleich der Summe der Moduln der einzelnen Terme. Daher ergiebt sich

$$\text{mod. } F(\alpha;\,\varrho;\,z) < 1 + \frac{z'}{1} + \frac{z'^2}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{z'^k}{1\,.\,2\ldots k} + \cdots + \text{inf.},$$

$$\text{mod. } F(\alpha;\,\varrho;\,z) < e^{z'}.$$

Diese Ungleichheit wird auf die in der Reihe (29) vorkommenden Ausdrücke

$$F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1)$$

angewendet. Dass man $b_1+b_2+\lambda$ als einen nicht ganzzahligen Werth voraussetzt, wurde bereits in § 1 erwähnt. Wird mod. (a_2-a_1) durch $\mathfrak{p}$ bezeichnet, so besteht nach (39) die Ungleichheit

(40) $\quad$ mod. $F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1)<e^{\mathfrak{p}}$,

sobald der reelle Theil der Zahl $\nu-b_1-b_2-\lambda+3$ grösser als mod. $(1-b_2)$ ist. Der Modul der Constante $b_1+b_2+\lambda-2$ möge β heissen; dann übersteigt der reelle Theil von $\nu-b_1-b_2-\lambda+3$ die Zahl $\nu-\beta$, da er mindestens den Werth $\nu-\beta+1$ hat. Wählt man also irgend eine bestimmte positive ganze Zahl m, welche der Ungleichheit

$$m-\beta>\text{mod.}\,(1-b_2)$$

genügt, so ist um so mehr der reelle Theil von $m-b_1-b_2-\lambda+3$ grösser als mod. $(1-b_2)$. Folglich gilt bei dieser Definition von m die Ungleichheit (40) für alle Werthe ν, die $\geqq m$ sind.

Durch R_m soll nun die Summe aller derjenigen Terme der Reihe (29) bezeichnet werden, welche eine höhere Potenz von $x-a_1$ als die $(m-1)^{\text{te}}$ enthalten. Man setzt also (unter Anwendung der Bezeichnung (27))

$$R_m=B\sum_{\nu=m}^{\nu=\infty}\frac{(\lambda-1)_\nu\,(x-a_1)^\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}\,F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1).$$

Es ist aber (wenn $\nu\geqq m$), da $(\lambda-1)_\nu$ den Binomialcoefficienten bedeutet,

$$\frac{(\lambda-1)_\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}=\frac{1}{1.2\ldots\nu}\,\frac{[\lambda-1]_\nu}{[b_1+b_2+\lambda-3]_\nu}$$

$$=\frac{1}{1.2\ldots\nu}\,\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m)}{(b_1+b_2+\lambda-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-m-2)}$$

$$\cdot\frac{(\lambda-m-1)(\lambda-m-2)\ldots(\lambda-\nu)}{(b_1+b_2+\lambda-m-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-\nu-2)},$$

so dass in R_m der Factor

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m)}{(b_1+b_2+\lambda-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-m-2)}$$

vor das Summenzeichen tritt. Das Product aus dem letztgenannten Factor und der Constante B heisse B_1. Ferner werde in dem Quotienten

$$\frac{(\lambda-m-1)(\lambda-m-2)\ldots(\lambda-\nu)}{(b_1+b_2+\lambda-m-3)\ldots(b_1+b_2+\lambda-\nu-2)}$$

das Vorzeichen aller in den Klammern stehenden Grössen geändert, wodurch derselbe die Form

$$\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\lambda-1)\dots(m-\lambda+1)}{(\nu-b_1-b_2-\lambda+2)(\nu-b_1-b_2-\lambda+1)\dots(m-b_1-b_2-\lambda+3)}$$
$$=\frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}}$$

annimmt, während sein Werth sich nicht ändert. Auf diese Weise entsteht für R_m die Gleichung

$$R_m = B_1\sum_{\nu=m}^{\nu=\infty}\frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}}\,\frac{(x-a_1)^\nu}{1.2\dots\nu}$$
$$F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1).$$

Man nennt zur Abkürzung s_ν die Grösse

$$s_\nu=\text{mod.}\left\{\frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}}\,\frac{(x-a_1)^\nu}{1.2\dots\nu}\right.$$
$$\left.\cdot F(1-b_2;\ \nu-b_1-b_2-\lambda+3;\ a_2-a_1)\right\}$$

und S die Summe

$$S = s_m + s_{m+1} + s_{m+2} + \cdots + \text{inf.}.$$

Der Beweis, dass die Reihe (29) convergirt, ist erbracht, sobald man zeigt, das S einen endlichen Werth hat.

Es sei λ' der Modul von λ, und $\varkappa$ irgend eine reelle positive Zahl, die den Werth β, d. h. mod. $(b_1+b_2+\lambda-2)$, übersteigt. Dann ist

$$\text{mod.}\,(\varkappa-\lambda)\leqq\varkappa+\lambda',\quad \text{mod.}\,(\varkappa-[b_1+b_2+\lambda-2])\geqq\varkappa-\beta,$$

woraus, wenn $\varkappa$ successiv gleich $\nu, \nu-1, \dots, m+1$ gesetzt wird (die Zahl m ist nach ihrer Definition grösser als β), die Ungleichheiten

$$\text{mod.}[(\nu-\lambda)(\nu-\lambda-1)\dots(m-\lambda+1)]\leqq(\nu+\lambda')(\nu+\lambda'-1)\dots(m+\lambda'+1),$$
$$\text{mod.}[(\nu-b_1-b_2-\lambda+2)(\nu-b_1-b_2-\lambda+1)\dots(m-b_1-b_2-\lambda+3)]$$
$$\geqq(\nu-\beta)(\nu-\beta-1)\dots(m-\beta+1)$$

folgen. Indem man dieselben durch einander dividirt, findet man

$$\text{mod.}\,\frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}}\leqq\frac{\nu+\lambda'}{\nu-\beta}\,\frac{\nu+\lambda'-1}{\nu-\beta-1}\cdots\frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}.$$

Aber von den Brüchen

$$\frac{\nu+\lambda'}{\nu-\beta},\ \frac{\nu+\lambda'-1}{\nu-\beta-1},\ \dots,\ \frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$$

ist $\frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$ der grösste. Denn werden durch $\sigma-\beta$ und $\tau-\beta$ zwei reelle positive Zahlen bezeichnet, so ist im Fall $\sigma>\tau$

$$1+\frac{\beta+\lambda'}{\sigma-\beta}<1+\frac{\beta+\lambda'}{\tau-\beta},$$

$$\frac{\sigma+\lambda'}{\sigma-\beta}<\frac{\tau+\lambda'}{\tau-\beta}.$$

Man verstärkt demnach die obige Ungleichheit, indem man für jeden der $\nu - m$ Brüche den Werth $\frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$ einführt. Hierdurch ergiebt sich

$$\text{mod.}\ \frac{[\nu-\lambda]_{\nu-m}}{[\nu-b_1-b_2-\lambda+2]_{\nu-m}} < \Theta^{\nu-m},$$

wo Θ die (positive reelle) Constante

$$\Theta = \frac{m+\lambda'+1}{m-\beta+1}$$

bedeutet. Nach Berücksichtigung dieser und der in (40) angegebenen Ungleichheit erhält man, wenn mod. $(x-a_1) = \xi$ gesetzt wird, die Beziehung

$$s_\nu < e^{\mathfrak{p}}\, \Theta^{\nu-m} \frac{\xi^\nu}{1.2\ldots\nu},$$

woraus

$$S < e^{\mathfrak{p}} \xi^m \left\{ \frac{1}{1.2\ldots m} + \frac{\Theta\xi}{1.2\ldots(m+1)} + \frac{\Theta^2\xi^2}{1.2\ldots(m+2)} + \cdots \right\}$$

folgt. Es ist um so mehr

$$S < e^{\mathfrak{p}} \xi^m \left\{ 1 + \frac{\Theta\xi}{1} + \frac{\Theta^2\xi^2}{1.2} + \frac{\Theta^3\xi^3}{1.2.3} + \cdots \right\},$$

d. h.

$$S < e^{\mathfrak{p}+\Theta\xi} \xi^m.$$

Da nun $\mathfrak{p}$, m, Θ bestimmte endliche Constanten bezeichnen, so ist S ein endlicher Werth, sobald der Punkt x im Endlichen liegt. Mithin ist die Reihe (29) für jedes endliche Argument x unbedingt convergent.

§ 5.

Analoge Resultate wie für die Differentialgleichung (15) findet man für die in (2) genannte Tissot'sche Gleichung n^{ter} Ordnung. Die verschiedenen particulären Integrale derselben entsprechen in ihrer Form den in §§ 2 und 3 behandelten Functionen.

Die Differentialgleichung (2) besitzt, wie die Gleichung (15), ein particuläres Integral Y, das eine transcendente ganze Function von x ist. Dasselbe wird durch den Ausdruck

$$Y = \int_{-\infty}^{(x, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})} \Phi(u, x)\, du \tag{41}$$

angegeben, in welchem $\Phi(u, x)$ die Function (14) bedeutet. Man setzt voraus, dass von den verschiedenen Zweigen der Function $\Phi(u, x)$ in (41) ein bestimmter gewählt worden ist. Der Integrationsweg von Y ist aus Fig. 1 ersichtlich, wenn nur der dort gezeichnete Kreis so gross genommen wird, dass er alle singulären Punkte $a_1, \ldots, a_{n-1}$ umschliesst. Dass das Integral (41) in der Umgebung eines beliebigen singulären Punktes a_k eine eindeutige Function von x ist, folgt aus dem Umstand, dass es unverändert bleibt, wenn x einen Umlauf um a_k ausführt. Ausserdem ist, wie man leicht beweist, der Werth des Integrals ein endlicher, sobald x endlich ist. Es darf ferner in (41), da mod. $(u - a_1) >$ mod. $(x - a_1)$ ist (wenn man den erwähnten Kreis gross genug wählt), für $(u - x)^{\lambda-1}$ die convergente Reihe

$$(u - a_1)^{\lambda-1}\left[1 - (\lambda - 1)_1 \frac{x - a_1}{u - a_1} + \cdots + (-1)^\nu (\lambda - 1)_\nu \left(\frac{x - a_1}{u - a_1}\right)^\nu + \cdots\right]$$

substituirt werden. Hierdurch erhält man die Gleichung

$$(42) \qquad Y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu (\lambda - 1)_\nu P_\nu (x - a_1)^\nu,$$

in welcher P_ν den Werth

$$P_\nu = \int_{-\infty}^{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})} e^u (u - a_1)^{b_1+\lambda-\nu-2} (u - a_2)^{b_2-1} \ldots (u - a_{n-1})^{b_{n-1}-1} du$$

hat. Der Integrationsweg von P_ν stimmt mit dem von Y überein, ist also (da x in P_ν nicht vorkommt) als ein einfacher Umlauf um die Punktengruppe $a_1, \ldots, a_{n-1}$ zu bezeichnen. Sieht man einen der Parameter $a_1, \ldots, a_{n-1}$, z. B. a_1, als unabhängige Variable an, so ist P_ν selbst ein zu Y analoges particuläres Integral einer Tissot'schen Differentialgleichung $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung. So wird für $n = 4$ die Grösse P_ν mit dem Integral (22) identisch, falls in diesem die Werthe x, λ durch $a_1, b_1 + \lambda - \nu - 1$, und die Werthe a_1, a_2, b_1, b_2 durch a_2, a_3, b_2, b_3 ersetzt werden.

In dem Bezirke eines beliebigen singulären Punktes a_k wird das einzige daselbst vorhandene mehrdeutige Hauptintegral durch den Ausdruck

$$(43) \qquad \eta_k = \int_{a_k}^{x} \Phi(u, x)\, du$$

dargestellt, in welchem $\Phi(u, x)$ wiederum die Function (14) bezeichnet. Substituirt man hierin

$$u - a_k = \mathfrak{u}(x - a_k)$$

und nennt H die Function

$$H = e^{\mathfrak{u}(x-a_k)} \left(1 - \mathfrak{u}\frac{x - a_k}{a_1 - a_k}\right)^{b_1-1} \cdots$$

$$\left(1 - \mathfrak{u}\frac{x - a_k}{a_{k-1} - a_k}\right)^{b_{k-1}-1} \left(1 - \mathfrak{u}\frac{x - a_k}{a_{k+1} - a_k}\right)^{b_{k+1}-1}$$

$$\left(1 - \mathfrak{u}\frac{x - a_k}{a_{n-1} - a_k}\right)^{b_{n-1}-1},$$

so entsteht die Gleichung

$$\eta_k = \text{Const.}\,(x - a_k)^{b_k+\lambda-1}\int_0^1 u^{b_k-1}(1-u)^{\lambda-1}\,H\,du.$$

Die Coefficienten der Entwickelung der Function H nach steigenden Potenzen von $u(x-a_k)$ mögen $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ heissen, so dass

$$H = \delta_0 + \delta_1 u(x-a_k) + \delta_2 u^2(x-a_k)^2 + \cdots + \delta_\nu u^\nu (x-a_k)^\nu + \cdots$$

gesetzt wird. Dann findet man für η_k, nach Benutzung der Formel (20), die zu (21) analoge Gleichung

$$(44)\quad \eta_k = A(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\delta_\nu\,\frac{b_k(b_k+1)\cdots(b_k+\nu-1)}{(b_k+\lambda)\cdots(b_k+\lambda+\nu-1)}\,(x-a_k)^\nu,$$

in der A die Constante

$$(-1)^{\lambda-1}\,e^{a_k}\,E(b_k,\lambda)\,(a_k-a_1)^{b_1-1}\,(a_k-a_2)^{b_2-1}\ldots$$

bedeutet.

Es werde ferner von einem singulären Punkte a_l aus, der verschieden von a_k, aber sonst beliebig ist, eine geschlossene, sich nicht schneidende Curve gezogen, welche den Punkt x und den Punkt a_k, jedoch keinen der übrigen singulären Punkte umschliesst. Das längs dieser Curve genommene Integral

$$(45)\qquad y_l^{(k)} = \int_{a_l}^{\bullet(x,\,a_k)} \Phi(u,x)\,du,$$

welches analog zum Integral (30) gebildet ist und (nach § 1) der Differentialgleichung (2) genügt, ist eine eindeutige stetige Function von x in der Umgebung des Punktes $x = a_k$. Denn es bleibt unverändert, wenn die Variable x innerhalb der genannten Curve den Punkt a_k umkreist, und der Werth desselben ist ein endlicher, da nach (11) der reelle Theil von b_l positiv ist. Man entwickelt das Integral $y_l^{(k)}$ nach steigenden Potenzen von $x-a_k$, indem man für $(u-x)^{\lambda-1}$ die Reihe

$$(u-a_k)^{\lambda-1}\left[1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_k}{u-a_k}+\cdots+(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{x-a_k}{u-a_k}\right)^\nu+\cdots\right]$$

einführt. Dann ergiebt sich

$$(46)\qquad y_l^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\,\mathfrak{P}_\nu\,(x-a_k)^\nu,$$

wo zur Abkürzung

$$\mathfrak{P}_\nu = \int_{a_l}^{\bullet(a_k)} e^u (u-a_k)^{b_k+\lambda-\nu-2}\,U_k\,du,$$

$$U_k = (u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_{k-1})^{b_{k-1}-1}(u-a_{k+1})^{b_{k+1}-1}\ldots$$
$$\ldots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}$$

gesetzt wird. Der Integrationsweg von $\mathfrak{P}_\nu$ ist mit dem von $y_l^{(k)}$ identisch. Auch die Grösse $\mathfrak{P}_\nu$ stellt, wie P_ν, ein particuläres Integral einer Tissot'schen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, wenn einer der Parameter $a_1, \ldots, a_{n-1}$ als unabhängige Variable aufgefasst wird. Denn die zu integrirende Function in $\mathfrak{P}_\nu$ hat die Form (14), und der Integrationsweg entspricht der in (10) angegebenen Bedingung.

Durch Anwendung der particulären Lösungen (41), (43) und (45), welche in der Umgebung des Punktes a_k den Charakter von Hauptintegralen haben, erhält man als vollständiges Integral der Differentialgleichung (2) die Summe

$$C_1\eta_k + C_2 y_1^{(k)} + C_3 y_2^{(k)} + \cdots + C_k y_{k-1}^{(k)} + C_{k+1} y_{k+1}^{(k)} + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}^{(k)} + C_n Y,$$

in der $C_1, C_2, \ldots, C_n$ willkürliche Constante bedeuten.

Im Bezirk der grossen Werthe von x existiren $n-2$ von einander unabhängige particuläre Integrale der Gleichung (2), welche die Eigenschaft haben, nach Division durch $x^{\lambda-1}$ eine im genannten Gebiet eindeutige und stetige Function von x zu liefern. Durchläuft x (im positiven Sinne) eine sich nicht schneidende Curve, welche alle singulären Punkte $a_1, \ldots, a_{n-1}$ umschliesst, so nimmt in dem Integral

$$(47)\qquad \zeta_{k,l} = \int_{a_k}^{a_l} \Phi(u, x)\, du,$$

dessen Integrationsweg innerhalb jener Curve liegen soll, jedes einzelne Element den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ auf. Der Quotient $\frac{\zeta_{k,l}}{x^{\lambda-1}}$ ist daher in der Horizontfläche eine eindeutige Function von x. Die Gleichung

$$\frac{\zeta_{k,l}}{x^{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1}\int_{a_k}^{a_l} e^u (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_{n-1})^{b_{n-1}-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\lambda-1} du$$

zeigt ausserdem, dass dieser Quotient in den unendlich entfernten Theilen der x-Ebene einen endlichen Werth behält. Bei der Entwickelung von $\zeta_{k,l}$ in eine Potenzreihe, die für grosse Werthe von x convergirt, soll, in Analogie zu (36), die Differenz $x - a_k$ als Potenzbasis gewählt werden. Man setzt

$$(u-x)^{\lambda-1} = (-1)^{\lambda-1}(x-a_k)^{\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\left(\frac{u-a_k}{x-a_k}\right)^\nu$$

und erhält hierdurch die Gleichung

$$(48)\qquad \zeta_{k,l} = (-1)^{\lambda-1}(x-a_k)^{\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\, Q_\nu (x-a_k)^{-\nu},$$

in der Q_ν das constante Integral

$$Q_\nu = \int_{a_k}^{a_l} e^u (u-a_k)^{b_k+\nu-1}\, U_k\, du,$$

und U_k (wie oben) das Product

$$(u - a_1)^{b_1-1} (u - a_2)^{b_2-1} \ldots (u - a_{k-1})^{b_{k-1}-1} (u - a_{k+1})^{b_{k+1}-1} \ldots \\ \ldots (u - a_{n-1})^{b_{n-1}-1}$$

bezeichnet. Die Grösse Q_ν hat wiederum die Form eines particulären Integrals einer Tissot'schen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man bemerke, dass die Integrale $\zeta_{l,m}$, wenn l und m von k verschieden sind, in der Umgebung des Punktes a_k eindeutige und stetige Functionen von x darstellen und daher auch an Stelle der in (45) angegebenen Integrale $y_l^{(k)}$ angewendet werden können.

Das in (41) definirte Integral Y ist im Gebiete der grossen Werthe von x das einzige eindeutige Integral der Differentialgleichung (2). Als mehrdeutiges Hauptintegral im genannten Gebiete findet man ferner den Ausdruck

$$(49) \qquad \omega = \overline{\int_x}^{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})} \Phi(u, x)\, du,$$

in welchem die Variable u vom Punkte x aus einen positiven Umlauf um die $n-1$ Punkte $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ausführt. Denn ω genügt der Differentialgleichung (2) und nimmt (nach § 1 des vorstehenden Aufsatzes „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve") den Factor

$$e^{2\pi i(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+\lambda)}$$

auf, wenn x die Punktengruppe $a_1, \ldots, a_{n-1}$ in positiver Drehungsrichtung umkreist.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich, dass die Functionen

$$(50) \qquad \zeta_{1,2},\ \zeta_{2,3},\ \ldots,\ \zeta_{n-2,n-1},\ Y,\ \omega$$

n von einander unabhängige particuläre Lösungen von (2) sind, die in der Horizontfläche den Charakter von Hauptintegralen haben. Die Summe

$$C_1 \zeta_{1,2} + C_2 \zeta_{2,3} + \cdots + C_{n-2} \zeta_{n-2,n-1} + C_{n-1} Y + C_n \omega,$$

in der $C_1, \ldots, C_n$ willkürliche Constanten bezeichnen, stellt demnach eine für das Gebiet der grossen Werthe von x geeignete Form des allgemeinen Integrals der Gleichung (2) dar.

§ 6.

Die in § 5 als particuläre Lösungen der Gleichung (2) ermittelten bestimmten Integrale sind sämmtlich convergent, wenn die reellen Bestandtheile der Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \lambda$ das positive Vorzeichen haben. Ist aber der reelle Theil einer Constante b_ν, resp. der Constante λ negativ oder gleich Null, so werden diejenigen Integrale divergent, in denen a_ν, resp. x als Grenze vorkommt. Der kürzeren Bezeichnung halber wird, wie in (11), festgesetzt, dass, wenn die Constanten b_ν, λ nicht reell sind, die Ungleichheiten $b_\nu > 0$, $b_\nu < 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ sich auf die reellen Bestandtheile derselben beziehen sollen.

An Stelle des Integrals (43)

$$\eta_k = \int_{a_k}^{x} \Phi(u, x)\, du$$

kann, wenn $b_k > 0$, aber $\lambda < 0$ ist, der Ausdruck

$$\overline{\int_{a_k}^{(x)}} \Phi(u, x)\, du, \tag{51}$$

und wenn $\lambda > 0$, $b_k < 0$ ist, der Ausdruck

$$\overline{\int_{x}^{(a_k)}} \Phi(u, x)\, du \tag{52}$$

angewendet werden. Die Integrationswege von (51) und (52) bestehen aus einem einmaligen Umlauf um den Punkt x, bezw. um den Punkt a_k. Der Bedingung (10) geschieht Genüge, da bei dem ersteren Integral $g = h = a_k$, bei dem letzteren $g = h = x$ gesetzt wird. Ist weder b_k noch λ im reellen Theil positiv, so möge statt η_k das Integral

$$\overline{\int_{c}^{(x,\, a_k,\, x-,\, a_k-)}} \Phi(u, x)\, du \tag{53}$$

genommen werden, dessen untere Grenze ein beliebiger (nicht singulärer) Punkt c ist, und dessen Integrationsweg aus je einem positiven und je einem negativen Umlauf um den Punkt x und um den Punkt a_k, und zwar in der in (53) angedeuteten Reihenfolge, besteht. Der Bedingung (10) geschieht durch diesen Integrationsweg Genüge. Die Integrale (51), (52) und (53) lassen sich nach steigenden Potenzen von $x - a_k$ in Reihen entwickeln, welche sich von der Entwickelung (44) des Integrals η_k nur durch diejenigen Constanten unterscheiden, welche als Factoren vor die ganze Reihe treten. Während in (44) die Constante A das Euler'sche Integral $E(b_k, \lambda)$ als Factor enthält, kommen bei den aus den Integralen (51), (52), (53) entstehenden Reihen die constanten Integrale $\overline{E}(b_k, \lambda)$, $\overline{E}(\lambda, b_k)$, $\mathfrak{E}(b_k, \lambda)$ als Multiplicatoren vor*).

In analoger Weise ersetzt man das in (47) bezeichnete Integral $\zeta_{k,i}$ durch ein Integral, dessen Integrationsweg eine einfache geschlossene

*) Cfr. die Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" im 35ten Bande dieser Annalen, §§ 1—2.

Curve, resp. ein Doppelumlauf ist, sobald die reellen Bestandtheile der Constanten b_k, b_l negativ oder gleich Null werden.

Das Integral Y behält, gemäss seiner Definition in (41), für beliebige Werthe der Constanten einen bestimmten Sinn. Dagegen werden die Integrale $y_l^{(k)}$ und ω, bei denen, nach (45) und (49), die Variable u eine im Punkte a_l, resp. x, beginnende einfache geschlossene Curve durchläuft, für $b_l < 0$, resp. für $\lambda < 0$ divergent. Man wendet nun an Stelle von (45) im Fall $b_l < 0$ das Integral

$$(54) \qquad \overline{\int_c}^{(\mathfrak{R},\, a_l,\, \mathfrak{R}-,\, a_l-)} \Phi(u, x)\, du$$

und an Stelle von ω im Fall $\lambda < 0$ das Integral*)

$$(55) \qquad \overline{\int_c}^{(\mathfrak{A},\, x,\, \mathfrak{A}-,\, x-)} \Phi(u, x)\, du$$

an, woselbst $\mathfrak{R}$ die Verbindungslinie der Punkte x und a_k, und $\mathfrak{A}$ eine die $n-1$ Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ verbindende gebrochene Linie bedeuten möge. Die Integrale (54) und (55), bei denen x als ein endlicher, von $a_1, \ldots, a_{n-1}$ verschiedener Werth vorausgesetzt wird, sind ohne jede weitere Einschränkung convergent. Als untere Grenze c derselben kann ein beliebiger, nicht singulärer Werth gewählt werden.**)

---

*) Cfr. § 2 der vorstehenden Abh. „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve."

**) Herr C. Jordan veröffentlicht in dem (bereits auf pag. 501 dieses Bandes erwähnten) Band III seines Cours d'Analyse (Paris 1887), § 192 u. f., werthvolle Entwickelungen, welche in mancher Beziehung den in dieser Abhandlung angestellten Untersuchungen parallel laufen, jedoch auf allgemeineren Voraussetzungen beruhen. Herr C. Jordan behandelt in § 192 eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von derjenigen Form, die bei der verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung (Crelle's Journ. Bd. 71, pag. 336) vorliegt, und auf die man die Tissot'sche Differentialgleichung bringen kann (cfr. der obige § 1); er beschränkt aber die Betrachtung nicht auf den Fall, wo der Coefficient $\varphi(x)$ der höchsten Ableitung $\frac{d^n y}{dx^n}$ (in der Bezeichnung des § 1) eine ganze Function n^{ten} Grades (wie bei der hypergeometrischen Differentialgleichung) oder eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (wie bei der Tissot'schen Differentialgleichung) ist, sondern lässt auch niedrigere Grade dieser Function zu. Ist $\varphi(x)$ eine ganze Function $(n-s)^{\text{ten}}$, und $\psi(x)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x, so wird die in § 1 dieses Aufsatzes angegebene Differentialgleichung (2) durch s transcendente ganze Functionen von x, die wesentlich von einander verschieden sind, befriedigt. Man schreibt dieselben als bestimmte Integrale, indem man als untere und als obere Integralgrenze Punkte des unendlichen Horizonts, bei welchem s Abschnitte zu unterscheiden sind, wählt (§ 195 des Bandes III). Das Ziel der obigen Abhandlung lag, wie ich bereits in der Einleitung erwähnt

§ 7.

Zum Schluss sollen die Rechnungen der §§ 5 und 6 noch in der Weise ergänzt werden, dass man in der x-Ebene ein beliebiges ringförmiges Flächenstück, auf dem keine singulären Punkte liegen, betrachtet und die zugehörigen Hauptintegrale der Differentialgleichung (2) aufstellt.

Ist eine homogene lineare Differentialgleichung frei von logarithmischen Integralen, so gehören, wie aus den bekannten Untersuchungen des Herrn L. Fuchs folgt*), zu einer beliebigen geschlossenen Curve stets n particuläre Integrale von der Beschaffenheit, dass sie, wenn x den Umlauf längs der geschlossenen Curve vollendet hat, entweder ihren früheren Werth wiedererhalten oder einen constanten Factor aufnehmen. Befindet sich im Innern der geschlossenen Curve nur ein einziger singulärer Punkt der Differentialgleichung, so kann man die betreffenden Integrale kurz die Hauptintegrale dieses singulären Punktes nennen. Umschliesst die Curve sämmtliche singuläre Punkte, so sind die zugehörigen Integrale die Hauptintegrale für das Gebiet der grossen Werthe von x. Zwischen diesen beiden Annahmen liegt nun der Fall, dass von der betrachteten Curve, welche sich selbst nicht schneiden möge, mehrere singuläre Punkte der Differentialgleichung, jedoch nicht alle, umschlossen werden. Indem man die singulären Punkte, die im Innern der Curve liegen, durch eine gebrochene Linie verbindet und das der letzteren benachbarte Gebiet fortlässt, verwandelt man den von der geschlossenen Curve begrenzten Theil der x-Ebene in ein ringförmiges Flächenstück, welches keine singulären Punkte mehr enthält. Die zu der Curve gehörigen Hauptintegrale sind dann zugleich als die Hauptintegrale dieser ringförmigen Fläche zu bezeichnen.

Treten in einem Gebiete gleichzeitig mehrere eindeutige particuläre Integrale auf, resp. mehrere Integrale von derselben Mehrdeutigkeit, so sind selbstverständlich die Hauptintegrale der Gleichung dort keine völlig bestimmten Functionen; man erhält vielmehr eine Gruppe von particulären Integralen (multiplicirt mit willkürlichen Constanten), aus denen beliebige lineare Ausdrücke gebildet werden können. Dies gilt auch für die ringförmigen Flächenstücke der x-Ebene.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ diejenigen singulären Punkte der Differentialgleichung (2), welche sich im Innern einer geschlossenen, sich selbst

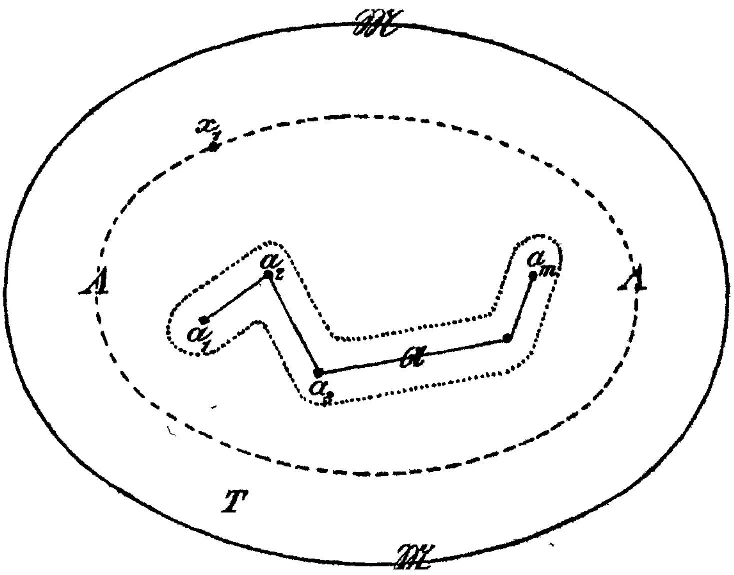
---

habe, hauptsächlich in der Aufstellung der vollständigen Systeme der Hauptintegrale der Tissot'schen Gleichung für die einzelnen Abschnitte der x-Ebene, wofür der in der vorgedruckten Arbeit abgeleitete Satz sich als wesentlich erwies.

*) § 3 der Abhandlung „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten“ in Bd. 66 des Crelle'schen Journals.

nicht schneidenden Curve $\mathfrak{M}$ befinden (Fig. 3). Das von der Curve $\mathfrak{M}$ umschlossene Flächenstück heisse T. Die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mögen durch eine gebrochene Linie $\mathfrak{A}$, welche sich selbst nicht schneidet und aus T nicht heraustritt, mit einander verbunden werden. Das ring-

Fig. 3.



förmige Flächenstück, welches aus T entsteht, wenn man die gebrochene Linie $\mathfrak{A}$ und ihre nächste Umgebung fortlässt, wird T' genannt. Innerhalb T' ziehe man, als Weg der Variable x, von einem beliebigen Punkte x_1 aus die sich selbst nicht schneidende, geschlossene Linie Λ, welche die Linie $\mathfrak{A}$ umgiebt.

In (47) wurde $\zeta_{k,l}$ als das particuläre Integral

$$\zeta_{k,l} = \int_{a_k}^{a_l} \Phi(u, x)\, du$$

definirt, in welchem $\Phi(u, x)$ die Function (14) bedeutet. Da nun nach der Voraussetzung die $n - m - 1$ singulären Punkte a_{m+1}, $a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}$ ausserhalb der Curve $\mathfrak{M}$ liegen, so erfahren die $n - m - 2$ Integrale

(56) $$\zeta_{m+1, m+2},\ \zeta_{m+2, m+3}, \ldots, \zeta_{n-2, n-1},$$

deren Integrationswege die Curve $\mathfrak{M}$ nicht schneiden sollen, keinerlei Aenderung, wenn die Variable x längs der Curve Λ die gebrochene Linie $\mathfrak{A}$ umkreist. Denn die zu integrirende Function $\Phi(u, x)$ hat im Endpunkte der x-Curve den nämlichen Werth wie im Ausgangspunkte derselben, und die Integrationswege werden durch den obigen Umlauf nicht beeinflusst. Diese Eigenschaft kommt ausserdem dem Integral

(57) $$\int_{a_{n-1}}^{-\infty} \Phi(u, x)\, du$$

und der in (41) angegebenen transcendenten ganzen Function Y zu.

Auch in (57) soll der Integrationsweg ausserhalb der Curve $\mathfrak{M}$ bleiben. Man erhält auf diese Weise $n-m$ von einander unabhängige particuläre Integrale der Tissot'schen Gleichung, welche auf der ringförmigen Fläche T' eindeutige stetige Functionen von x sind.

Die $m-1$ Integrale

$$(58)\qquad \zeta_{1,2},\ \zeta_{2,3},\ \ldots,\ \zeta_{m-1,m},$$

deren Integrationswege aus den Abschnitten der gebrochenen Linie $\mathfrak{A}$ gebildet werden mögen, sind mehrdeutige Hauptintegrale für die Fläche T'. Denn die Aenderung, die sie erleiden, wenn x die Curve Λ im positiven Sinne durchläuft, besteht nur in der Aufnahme des Factors $e^{2\pi i\lambda}$, welcher in jedem einzelnen Integralelemente zu der Function $\Phi(u,x)$ hinzutritt.

Das n^{te} Hauptintegral für die Fläche T' wird durch das bestimmte Integral

$$(59)\qquad \overline{\int_x^{(\mathfrak{A})}} \Phi(u,x)\,du$$

angegeben, dessen Integrationsweg im Punkte x beginnt und endigt und einen einfachen Umlauf um die gebrochene Linie $\mathfrak{A}$ beschreibt. Nach § 1 der vorstehenden Abhandlung „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve" nimmt das Integral (59) den Factor

$$(60)\qquad e^{2\pi i(b_1+b_2+\cdots+b_m+\lambda)}$$

auf, wenn x die Linie $\mathfrak{A}$ im positiven Sinne umkreist. Im allgemeinen Falle, wo $b_1, b_2, \ldots$ und λ beliebige Constanten sind, stellt der Ausdruck (59) ein Hauptintegral der Fläche T' von einer diesem Flächenstück eigenthümlichen Mehrdeutigkeit dar; denn die Aufnahme des Factors (60) erfolgt nur bei dem Integral (59) und nur im Falle eines Umlaufs um die Linie $\mathfrak{A}$.

Die obigen Betrachtungen übertragen sich, wie hier erwähnt sein möge, fast vollständig auf die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit den n endlichen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (Crelle's Journ., Bd. 71, pag. 336). Man hat dann in (13) und in den bestimmten Integralen der §§ 5 und 6 die Function $\Phi(u,x)$ durch das Product

$$(61)\qquad (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}$$

zu ersetzen. Die Gleichung besitzt (wie die Tissot'sche) $n-m$ particuläre Integrale, welche auf der ringförmigen Fläche T' eindeutig und stetig bleiben. Dies sind (während das Integral Y fortfällt) die $n-m-1$ zu (56) analogen Ausdrücke

$$\zeta_{m+1,m+2},\ \zeta_{m+2,m+3},\ \ldots,\ \zeta_{n-1,n}$$

und das zu (57) analoge Integral zwischen den Grenzen a_n und ∞. Ferner sind die mehrdeutigen Hauptintegrale (58) und (59) auch hier direct anwendbar, nachdem die Function (61) an die Stelle der Function $\Phi(u, x)$ getreten ist. Das Entsprechende gilt auch von der allgemeineren, in der Anmerkung zu pag. 539 genannten Differentialgleichung. Die zur ringförmigen Fläche T' gehörigen eindeutigen Integrale von der Form (56) verringern sich zugleich mit der Anzahl der singulären Punkte der Gleichung; andererseits treten die s particulären Integrale hinzu, welche transcendente ganze Functionen von x sind*).

Kiel, im Mai 1890.

---

*) Als Arbeiten, in denen die Integration linearer Differentialgleichungen mittelst bestimmter Integrale von einem ähnlichen Gesichtspunkte aus, wie in dem obigen Aufsatze, resp. wie in meinen früheren Publicationen, behandelt wird, sind auch die folgenden (in russischer Sprache geschriebenen) Abhandlungen des Herrn P. Nekrassoff in Moskau zu nennen: 1. „Die allgemeine Differentiation"; 2. „Anwendung der allgemeinen Differentiation auf die Integration der Differentialgleichungen von der Form $\sum (a_s + b_s x)\, x^s D^s y = 0$"; 3. „Anwendung der allgemeinen Differentiation auf die Reduction vielfacher Integrale (mit Rücksicht auf die Integration der Laplace'schen Gleichung)"; 4. „Die linearen, durch bestimmte Integrale lösbaren Differentialgleichungen". Die Abhandlungen sind in dem Math. Journal der Math. Gesellschaft der Universität Moskau erschienen, und zwar die 3 ersten in Bd. XIV, 1889, die vierte in Bd. XV, 1890. Wie mir der Verfasser mittheilt, wird derselbe demnächst über die von ihm daselbst erhaltenen Resultate in den mathematischen Annalen ausführliches Referat erstatten.

d. 27. November 1890.