Sulle equazioni integrali.

(*Di* GIUSEPPE LAURICELLA, *a Catania.*)

Or son dieci anni il prof. VOLTERRA nella sua Memoria: *Sopra alcune quistioni di inversione di integrali definiti* (*) scriveva: « Il seguire le vicende del problema delle inversioni degli integrali definiti potrebbe dar luogo ad una pagina istruttiva ed interessante di storia dell'analisi, giacchè una tale ricerca intimamente legata alla integrazione delle equazioni differenziali, agli sviluppi in serie e ad una classe estesa di quistioni fisico-matematiche si è imposta di frequente all'attenzione dei geometri ». Da allora il detto problema di inversione ha fatto progressi immensi per opera principalmente dello stesso VOLTERRA e del FREDHOLM; ed il campo delle applicazioni di esso problema alla fisica-matematica ed all'analisi è ora divenuto così vasto ed importante, che la pagina di storia di cui parla il VOLTERRA sarebbe oggi di grande interesse, al fine sopra tutto di coordinare con i risultati generali, che si hanno sulla teoria delle equazioni integrali, i varii ed interessanti problemi, che si possono fare dipendere da questa teoria e che furono già trattati con criterii disparati. Un brillante capitolo di tale storia dell'analisi è stato scritto appunto dal prof. VOLTERRA nell'Art. I (§§ 1, 2,... 9) della sua citata Memoria.

Il compito assai modesto che io qui mi propongo è di esporre i più notevoli tra i risultati generali fin ora ottenuti (**) sul problema delle inversioni degli integrali definiti e sulle sue applicazioni, fermandomi un po' di più sulle applicazioni ai problemi di fisica-matematica. La considerazione di un importante problema di fisica-matematica mi darà inoltre occasione di proporre lo studio di una nuova equazione integrale.

I problemi di inversione di integrali definiti, dei quali parleremo, pos-

(*) *Annali di Matematica*, Serie 2.^{a}, Vol. XXV, 1897.

(**) Il presente articolo fu scritto nell'Agosto dello scorso anno e fu letto nel I Congresso (di Parma) della *Società Italiana per il progresso delle scienze.*

sono così enunciarsi: *date ad arbitrio una funzione $\psi(x)$ del campo reale qualsiasi $\overline{ab}$ ed una funzione $G(x, y)$ dei punti del quadrato, determinato dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = a$, $y = b$, trovare una funzione $\varphi(y)$ del campo $\overline{ab}$, tale che si abbia*

$$\int_a^x G(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x), \tag{1$_V$}$$

oppure:

$$\varphi(x) + \int_a^x G(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x), \tag{2$_V$}$$

oppure:

$$\int_a^b G(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x), \tag{1$_F$}$$

oppure:

$$\varphi(x) + \int_a^b G(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x). \tag{2$_F$}$$

Le equazioni $(1)_V$, $(2)_V$ si chiamano *equazioni integrali del tipo Volterra*, le equazioni $(1)_F$, $(2)_F$ *equazioni integrali del tipo Fredholm.* L'Hilbert poi chiama *equazioni integrali di 1.ª specie* le $(1)_V$, $(1)_F$, *equazioni integrali di 2.ª specie* le $(2)_V$, $(2)_F$. Alla $G(x, y)$ è stata data dal prof. Pincherle la denominazione di *funzione caratteristica*, dall'Hilbert la denominazione di *Kern* (*perno*). In ciò che segue noi adotteremo quella del Pincherle.

Abel nello studio di un certo problema meccanico, che comprende come caso particolare quello del tautocronismo, si imbattè in una equazione integrale, che si può ottenere dalla $(1)_V$, ponendo:

$$G(x, y) = (x - y)^{-n} \qquad (0 < n < 1).$$

Questa equazione, come è noto, fu risoluta dallo stesso Abel e poi, con metodi diversi, da altri autori, che ne fecero le più svariate ed eleganti applicazioni.

Per circa 60 anni la formola di risoluzione di Abel costituì l'unico esempio di inversione di integrali definiti con limiti variabili. Nel 1884 il Sonine (*)

(*) *Sur la généralisation d'une formule d'Abel* (Acta math., 4, 1884).

generalizzò il risultato di ABEL al caso in cui nella equazione $(1)_V$ si abbia:

$$G(x,\ y) = (x-y)^{-n}\, F(x-y) \qquad (0 < n < 1)$$

con $F(t)$ funzione sviluppabile in serie di MACLAURIN. Questa generalizzazione « segnò un vero e proprio passo nella quistione dell'inversione ».

Pure nel 1884 il prof. VOLTERRA (*) dette un metodo per risolvere l'equazione $(1)_F$. Tale metodo, indipendente dalla natura della funzione $\psi(x)$, consiste nel ricondurre la risoluzione della $(1)_F$ alla ricerca di una funzione $\lambda(z,\ \alpha)$ tale che l'integrale

$$\int_a^\alpha \lambda(y,\ \alpha) \,.\, G(x,\ y)\, d\, y$$

risulti indipendente da α.

Il prof. LEVI-CIVITA verso la fine del 1895 negli *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino* (**) dette un metodo, che può condurre all'inversione degli integrali $(1)_V$, $(1)_F$, quando la funzione $G(x, y)$ soddisfa ad un'equazione alle derivate parziali a variabili separate.

Tale metodo Egli applicò allo studio delle equazioni $(1)_V$, $(1)_F$ nel caso di

$$G(x,\ y) = f(x-y).$$

Le cose stavano a questo punto, quando nel Gennaio del 1896 il professore VOLTERRA (***) pubblicò la Sua formola generale di risoluzione dell'equazione $(1)_V$, estendendola al caso in cui la $G(x,\ y)$ per $x=y$ diviene infinita di ordine inferiore ad 1. In due successive Note dei ***Rendiconti dei Lincei*** (****) Egli dette la formola generale di risoluzione dell'equazione $(2)_V$, dimostrò che la risoluzione dell'equazione $(1)_V$ si può in generale ricondurre a quella della $(2)_V$, ed estese i Suoi risultati ai sistemi di equazioni dei due tipi $(1)_V$, $(2)_V$ ed al caso di campi a più dimensioni.

I risultati generali del VOLTERRA sull'equazione $(1)_V$ dànno come caso eccezionale quello in cui il limite inferiore della funzione $G(x,\ x)$ nel campo

(*) *Sopra un problema di elettrostatica* (Acc. dei Lincei, Transunti, Serie 3.ª, Vol. VIII).

(**) *Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale* (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino; Vol. XXXI, 1895-96).

(***) *Sull'inversione degli integrali definiti* (ibid.).

(****) Serie 5.ª, Vol. V; 1896.

$a\,b$ è lo *zero*; ed il Volterra stesso in due Note, pubblicate negli *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino* nei mesi di Marzo ed Aprile dello stesso anno, esaminò questo caso discutendolo in tutti i suoi dettagli.

Riassumo qui i risultati del Volterra sulle equazioni $(1)_V$, $(2)_V$ con le Sue medesime parole (*).

« Il metodo che ho seguito è fondato sopra tre principii fondamentali.

Principio di convergenza. *Se* $S_0(x, y)$, $a < x < y$, $a < y < b$ *è una funzione finita integrabile e a partire da essa si calcolano successivamente le:*

$$S_i(x, y) = \int_x^y S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

S_i *sarà indipendente da* j *e la serie*

$$s_0(x, y) = -\sum_0^\infty{}_i\, S_i(x, y),$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione integrabile.

Principio di reciprocità. *Se si opera sulla* $s_0(x, y)$ *come si è operato sulla* $S_0(x, y)$, *cioè se si forma:*

$$s_i(x, y) = \int_x^y s_{i-j}(x, \xi)\, s_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

si ritrova la funzione primitiva, vale a dire si ha:

$$S_0(x, y) = -\sum_0^\infty{}_i\, s_i(x, y),$$

e le due funzioni $S_0(x, y)$ *e* $s_0(x, y)$ *sono legate dalla relazione:*

$$S_0(x, y) + s_0(x, y) = \int_x^y S_0(x, \xi)\, s_0(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y s_0(x, \xi)\, S_0(\xi, y)\, d\xi.$$

Principio della inversione. *L'equazione funzionale:*

$$f(y) = \varphi(y) - \int_a^y \varphi(x)\, S_0(x, y)\, dx.$$

(*) Memoria citata degli *Annali di Matematica*.

si inverte in una maniera unica mediante la formola:

$$\varphi(y) = f(y) - \int_a^y f(x)\, s_0(x, y)\, dx.$$

Questi tre principii sono estensibili al caso di un sistema di funzioni,...

Una ulteriore estensione può poi ottenersi considerando, invece che una funzione o un sistema di funzioni di una coppia di variabili, una funzione o un sistema di funzioni di m coppie di variabili:...

Con questi principii si riconduce la risoluzione dei varii problemi di inversione, qualunque sia il numero delle funzioni incognite e qualunque sia il numero delle variabili da cui esse dipendono ad operazioni successive di quadratura.

Nel caso più semplice che possa presentarsi si ottiene il teorema:

Se si ha la equazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx,$$

in cui $f(y)$ *e* $f'(y)$ *si mantengono finite e continue per* y *compreso fra* α *e* $\alpha + A$ *e* $H(x, y)$ *e* $\frac{\partial H}{\partial y} = H_2(x, y)$ *sono pure finite per* $y > x > \alpha$, $\alpha + A > y > \alpha$, *e quest'ultima è integrabile, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di* $h(y) = H(y, y)$, *esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale per* y *compreso fra* α *e* $\alpha + A$, *la quale sarà data da:*

$$\varphi(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y f'(x) \sum_0^\infty S_i(x, y)\, dx.$$

in cui:

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

$$S_0(x, y) = \frac{H_2(x, y)}{h(x)}.$$

Nel caso particolare in cui $H(x, y)$ assume la forma $F[\lambda(x) - \lambda(y)]$ questo teorema si specializza...

Il caso in cui $H(x, y)$ diviene infinito per $x = y$, in modo che si possa porre $H(x, y) = \frac{G(x, y)}{(x - y)^\lambda}$ con $G(x, y)$ finita e $\lambda < 1$, e che comprende in sè evidentemente il caso di Sonine e quindi quello di Abel, si può ricondurre, con uno speciale artifizio all'analisi precedente, ed in tal modo si ottiene il teorema:

Se si ha l'equazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) \frac{G(x, y)}{(y - x)^\lambda} d x, \qquad (\lambda < 1),$$

in cui $f(y)$ e $f'(y)$ si mantengono finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + A$ $(A > 0)$; e $G(x, y)$ e $\frac{\partial G}{\partial y} = G_2(x, y)$ sono pure finite e continue per tutti i valori di x, y, compresi entro i limiti α e $\alpha + A$, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $g(y) = G(y, y)$ per y compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa l'equazione funzionale per y compreso fra α e $\alpha + A$, la quale sarà data da:

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen} \lambda \pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_\alpha^z f'(x) \sum_0^\infty{}_i T_i(x, z) d x,$$

in cui:

$$S_0(y, z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda \pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_y^z G_2(y, \xi) \left(\frac{\xi - y}{z - \xi}\right)^{1-\lambda} \frac{d \xi}{z - y}$$

$$T_0(x, z) = \frac{1}{(z - x)^{1-\lambda}}$$

$$T_i(x, z) = \int_z^x S_0(\xi, z) T_{i-1}(x, \xi) d \xi.$$

Questa proposizione, allorchè $G(x, y)$ ha la forma $F(x - y)$, si specializza...

Finalmente se $H(x, y)$ si annulla per $x = y$, il problema dell'inversione può in taluni casi riescire determinato, in altri no, e la discriminazione di essi può ricondursi ad operazioni algebriche. Il teorema fondamentale che si ha a questo proposito è il seguente.

Abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx, \qquad a > y > 0, \tag{25}$$

in cui:

$$f(y) = y^{n+1} f_1(y)$$

$$H(x, y) = \sum_0^n {}_i\, a_i x^i y^{n-i} + \sum_0^{n+1} {}_i\, x^i y^{n+1-i} L_i(x, y),$$

essendo le a_i *quantità costanti.*

Se $f_1(y)$ *e* $L_i(x, y)$ *e le loro derivate rapporto ad* y *sono finite e continue per* x *compreso fra* 0 *e* y *e* y *compreso fra* 0 *ed* a, *mentre in questo intervallo* $h(y) = H(y, y)$ *non si annulla che per* $y = 0$, *esisterà una ed una sola funzione finita e continua che soddisfa la* (25) *quando tutte le radici dell'equazione algebrica di grado* n:

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0,$$

essendo finite e differenti fra loro, avranno le parti reali positive. Invece, se le radici della equazione precedente saranno finite e diverse fra loro, ma una o più di esse avranno la parte reale negativa, allora il problema di dedurre $\varphi(x)$ *dalla* (25) *sarà indeterminato.*

L'effettiva risoluzione dell'equazione funzionale (25) quando le condizioni stabilite dal precedente teorema affinchè il problema sia determinato, sono soddisfatte può eseguirsi riconducendo la quistione ad un'altra analoga per la quale sia verificata la condizione $H(y, y) \gtrless 0$. »

Osserveremo, ancora col Volterra, che « la quistione di riconoscere se le parti reali di un'equazione algebrica a coefficienti reali hanno tutte lo stesso segno è stata trattata e risoluta in maniera completa ed elegante dal prof. Hurwitz (*). Applicando il criterio di Hurwitz si può giudicare a *priori* che la quistione d'inversione è determinata, eseguendo solo operazioni razionali nei coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$. »

Nella medesima Memoria degli *Annali di Matematica* il prof. Volterra

(*) *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitz* von A. Hurwitz (Math. Annalen; Bd. 46, S. 273).

estende il Suo metodo alla risoluzione di equazioni integrali con ambedue i limiti variabili, ed applica i Suoi risultati generali ad alcuni casi nei quali le operazioni di quadratura, che compariscono nelle formole di risoluzione, si eseguiscono con facilità. Noi qui tralasceremo l'esposizione, anche riassuntiva, di tali nuovi importanti risultati del VOLTERRA, e passeremo a dare un cenno di alcune tra le più interessanti quistioni analitiche, che si possono ricondurre alla risoluzione di equazioni integrali del tipo VOLTERRA.

Il prof. DINI (*) guidato dal concetto che mosse il BELTRAMI nell'estendere le ricerche dello SCHLÖMILCH sugli sviluppi in serie di funzioni di BESSEL (**), « dopo aver ottenuto sotto una forma generale lo sviluppo in serie di funzioni reali passa ad integrare termine a termine le dette serie, dopo averle moltiplicate per una funzione arbitraria. Ottiene in tal modo nuovi sviluppi. Se quello primitivo è

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n H_n(x),$$

i cui coefficienti A_n possono determinarsi dipendentemente dalla $f(x)$, e se $\psi(x, \xi)$ è la funzione moltiplicatrice, si ottiene in tal modo lo sviluppo in serie della funzione:

$$\int_c^\xi f(x) \psi(x, \xi) \, d x = F(\xi), \tag{11}$$

il quale sarà della forma:

$$\sum_0^\infty A_n K_n(\xi), \tag{12}$$

avendo posto:

$$K_n(\xi) = \int_c^\xi H_n(x) \psi(x, \xi) \, d x.$$

Se si potrà ricavare la $f(x)$, quando sia scelta la $F(\xi)$, avremo il modo di calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie (12) mediante la funzione da svilupparsi $F(\xi)$.

(*) *Annali delle Università Toscane.*
(**) Cfr. cit. Memoria del VOLTERRA negli *Annali di Mat.*, pag. 146.

La possibilità dunque della inversione di una equazione funzionale della forma (11) rende in generale possibile il passaggio da certi sviluppi i cui coefficienti sanno ricavarsi dalla funzione da svolgersi in serie, a nuovi sviluppi i cui coefficienti godono della stessa proprietà. »

Il Le Roux nella sua Memoria: *Sur les intégrales des equations linéaires*... (*) si propone la seguente quistione: dato un integrale (della specie che Egli chiama *principale*) $z(x, y, \alpha)$ dell'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z, \tag{A}$$

dipendente da una costante arbitraria α, determinare una funzione $f(\alpha)$ in modo che l'integrale

$$\int_{x_0}^{x} f(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha,$$

che allora soddisfa alla medesima equazione (A), per $y = y_0$ si riduca ad una funzione data $\psi(x)$. Il Le Roux, dopo di aver osservato che la quistione proposta equivale, come è evidente, alla risoluzione dell'equazione $(1)_V$, dimostra che la risoluzione di questa equazione integrale si può fare dipendere dalla risoluzione dell'equazione $(2)_V$, supposto che il limite inferiore di $G(x, x)$ sia diverso da zero; e poi passa alla risoluzione dell'equazione $(2)_V$ col metodo delle approssimazioni successive. In tal modo Egli dimostra l'esistenza di una soluzione dell'equazione integrale $(2)_V$ per $|x - x_0|$ minore di una determinata costante.

La Memoria di Le Roux precede di alcuni mesi la pubblicazione dei risultati del Volterra, il quale non conosceva allora tale Memoria.

I risultati del Le Roux, considerati come anteriori a quelli del Volterra segnano un notevole progresso nel problema generale della risoluzione delle equazioni $(1)_V$, $(2)_V$; però sono i risultati generali del Volterra che completano esaurientemente lo studio di tale problema. Infatti il Le Roux si è limitato a considerare solo il caso in cui il limite inferiore di $G(x, x)$ è diverso da *zero*, ed ha trovato che i Suoi risultati valgono solo per $|x - x_0|$ inferiore ad un certo limite. Quest'ultima limitazione dipende dal fatto che il Le Roux paragona la serie, che risolve l'equazione integrale $(2)_V$, ad una

(*) *Annales de l'École Normale Supérieure*, S. 3.ª, T. XII, 1895.

serie geometrica; mentre il VOLTERRA riesce a dimostrare che la Sua serie converge come una serie esponenziale.

Per ultimo indicherò brevemente col BATEMAN (*), come l'integrazione dell'equazione differenziale lineare generale di ordine n

$$P_x(y) \equiv \frac{d^n y}{d x^n} + C_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + C_n(x)\, y = 0, \tag{B}$$

si può ricondurre alla risoluzione di un'equazione del tipo $(2)_V$.

Se si moltiplicano ambo i membri della (B) per x^r $(r < n)$, e si integra lungo il cammino che va da α ad x, si trova:

$$\left\{ R_x \left[y(x),\, x^r \right] \right\}_\alpha^x + \int_\alpha^x y(x)\, p_x \left\{ x^r \right\} d x = 0, \tag{C}$$

dove $p_x(u) = 0$ è l'equazione aggiunta della (B), e dove

$$\frac{d}{d x} \{ R_x(y,\, u) \} = u\, P_x(y) - y\, p_x(u).$$

Facendo nella (C) $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ed eliminando dalle n equazioni, che così si ottengono, le $\frac{d^n y}{d x^n}, \ldots, \frac{d y}{d x}$, risulta la particolare equazione integrale del tipo $(2)_V$:

$$Q_{n-1}(x) = y(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int_\alpha^x p_t \{ (t + x)^{n-1} \}\, y(t)\, d t,$$

con $Q_{n-1}(x)$ polinomio di grado $n-1$.

Passando ora alla considerazione delle equazioni del tipo FREDHOLM, rammenterò dapprima il metodo del VOLTERRA per la risoluzione dell'equazione $(1)_F$, precedentemente menzionato, il quale stabilisce, in certo qual modo, un legame tra le equazioni $(1)_V$, $(1)_F$, e può condurre in certi casi alla risoluzione dell'equazione $(1)_F$; e rammenterò ancora lo studio sulla equazione $(1)_F$ del prof. LEVI-CIVITA, del quale pure facemmo menzione.

(*) *The theory of integral equations* (Proceedings of the London Mathematical Society; S. 2.ª, Vol. 4.º, Par. 2.ª).

Il FREDHOLM in una brevissima Nota del Gennaio 1900 (*) risolve l'equazione integrale del tipo $(2)_F$ in modo veramente semplice e sorprendente. Per potere seguire il FREDHOLM nelle sue splendide ricerche, importa notare anzitutto che il *problema di Neumann* quale fu enunciato dal POINCARÉ nella Sua celebre Memoria degli *Acta mathematica* (t. 20), si può considerare come un problema di inversione di integrali definiti del tipo:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, y) \varphi(y) \, dy = \psi(x), \tag{D}$$

con λ parametro arbitrario. Il FREDHOLM nella Sua Nota rammenta che il doppio strato, il quale risolve il problema di NEUMANN, come dimostrò il POINCARÉ, è una funzione meromorfa di λ; per conseguenza la densità di esso doppio strato deve anch'essa essere una funzione meromorfa di λ, e deve quindi potersi esprimere mediante il quoziente di due funzioni olomorfe di λ. Ciò premesso, Egli scrive le funzioni olomorfe di λ, che sono rispettivamente numeratore e denominatore della frazione, che rappresenta la soluzione dell'equazione integrale generale (D).

Nel metodo di FREDHOLM l'equazione (D) è considerata come limite di un sistema di equazioni lineari:

$$\varphi_t + \lambda \sum_1^n {}_i K_{ti} \varphi_i = \psi_t \text{ (**)}, \qquad (t = 1, 2, \ldots, n). \tag{D$'$}$$

Difatti il numeratore ed il denominatore della formola di risoluzione del FREDHOLM sono espressi per mezzo di due serie, che si possono ottenere dalla formola generale di risoluzione del sistema (D)′ con passaggio al limite.

Il FREDHOLM, scritte queste due serie, ne dimostra la convergenza uniforme in tutto il piano della variabile complessa λ con l'aiuto di un importante teorema di HADAMARD sul limite superiore del modulo di un determinante; e poi verifica che la frazione scritta soddisfa effettivamente all'equa-

(*) *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (Oefversigt of Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900; N.° 1; Stockholm).

(**) Il prof. VOLTERRA, nei suoi citati lavori del 1896, considera pure l'equazione integrale $(1)_V$ come limite di un sistema di equazioni lineari, al fine di giustificare, in certo modo, la singolarità che presenta la $(1)_V$, quando il limite inferiore di $G(x, x)$ è lo *zero*.

zione (D) per tutti i valori di λ, per i quali il denominatore, che Egli chiama *determinante* dell'equazione (D), è diverso da *zero.*

Dimostra in seguito che per i valori di λ, per i quali il determinante dell'equazione (D) si annulla, l'equazione integrale omogenea:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0 \tag{E}$$

ammette sempre qualche soluzione $\varphi(x)$ non identicamente nulla.

Ciò premesso, prova che nel caso del *problema interno di Dirichlet* la corrispondente equazione integrale omogenea (E) non ammette soluzione alcuna diversa da *zero*, e ne conclude quindi che l'equazione (D) nel caso del *problema interno di Dirichlet* ammette una soluzione.

Il noto metodo di Neumann, applicato dal Poincaré alla risoluzione del problema di Neumann, dà la risoluzione dell'equazione (D) per i valori di λ di modulo inferiore al modulo del valore di λ, più vicino allo *zero*, che annulla il corrispondente determinante. Il Kellogg (*) dimostra la coincidenza della serie che dà il metodo di Neumann nella risoluzione dell'equazione integrale (D), con quella data da Fredholm.

Nel 1903 il Fredholm in una bellissima Memoria degli *Acta mathematica* (t. 27) riprende lo studio dell'equazione (D) nella forma $(2)_F$. Introdotto il solito determinante D_G nell'ipotesi di $\lambda = 1$ e introdotte alcune serie, analoghe al determinante D_G, che chiama *minori* (dei varii ordini) del determinante, Egli stabilisce alcune relazioni fondamentali tra questi minori ed il determinante, suggerite dagli sviluppi della Sua prima Nota.

Allora, interpretando il primo membro dell'equazione $(2)_F$ come una operazione S_G eseguita sulla funzione $\varphi(x)$, deduce dalle dette relazioni, con tutta semplicità, i seguenti risultati generali:

1.° *se il determinante dell'equazione* $(2)_F$ *è diverso da zero, questa equazione ammette una soluzione ed una solamente, che si ottiene eseguendo sulla funzione data* $\psi(x)$ *una determinante operazione, analoga alla* S_G;

2.° *la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione*

(*) *Zur Theorie der Integralgleichung* $A(s, t) - \mathbf{A}(s, t) = \mu \int_0^1 A(s, r)\, \mathbf{A}(r, t)\, dr$ (Göttinger Nachrichten, 1902).

non identicamente nulla dell'equazione omogenea:

$$S_G\,\varphi(x) = 0, \tag{E)'$$

è che sia $D_G = 0$; se n è l'ordine del primo minore di D_G, che sia diverso da zero, l'equazione omogenea (E)′ *ammette n soluzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearmente indipendenti ed n solamente.*

Premessi questi risultati, torna ad occuparsi della risoluzione dell'equazione $(2)_F$ nel caso di $D_G = 0$. In tale ricerca è condotto a considerare l'equazione integrale omogenea (*coniugata*)

$$T_G\,\varphi(x) = 0, \tag{E)''$$

che si ottiene dalla (E)′ scambiando nella funzione caratteristica $G(x, y)$ la x con la y, e trova:

3.° *l'equazione* (E)″ *ammette anche essa n soluzioni $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ non identicamente nulle, linearmente indipendenti ed n solamente;*

4.° *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $(2)_F$ ammetta una soluzione è che la data funzione $\psi(x)$ soddisfi alle n condizioni:*

$$\int_a^b \psi_i(x) \, . \, \psi(x)\, d\,x = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{F}$$

Nella stessa Memoria il Fredholm riconduce, con artifizio altrettanto semplice ed elegante, il caso di un sistema di equazioni del tipo $(2)_F$ al caso di una sola equazione dello stesso tipo; ed in fine estende i Suoi risultati al caso, assai frequente nelle applicazioni, in cui la funzione caratteristica diviene infinita di ordine inferiore al primo per $x = y$. L'analisi relativa a questa estensione Egli completa nel solo caso in cui il determinante dell'equazione integrale è diverso da zero.

Il Plemelj (*), guidato dai risultati di Fredholm, riprende lo studio dell'equazione (D). Precisamente Egli considera l'equazione, che chiameremo $(D)_1$, analoga alla (D), la quale lega la funzione caratteristica $G(x, y)$ con la funzione caratteristica della formola di risoluzione della (D). Deduce dapprima la soluzione di tale equazione col metodo di Neumann, ed ese-

(*) *Zur theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung* (Monatshefte für Mathematik und Physik; XV, Jahrg.).

guisce poi il prolungamento analitico di questa soluzione. I nuovi risultati, che in questo modo ottiene, si possono così riassumere: *se il valore* $\lambda = \lambda_0$ *è radice di ordine p dell'equazione* $D_{\lambda G} = 0$ *ed n è l'ordine del primo minore di* $D_{\lambda G}$ *che non sia identicamente nullo, la funzione caratteristica della formola, che risolve l'equazione* (D), *cioè la soluzione dell'equazione* $(D)_1$, *avrà la forma:*

$$\frac{\varphi_1(x)\,\psi_1(y)}{(\lambda-\lambda_0)^{i_1}} + \frac{\varphi_2(x)\,\psi_2(y)}{(\lambda-\lambda_0)^{i_2}} + \cdots + \frac{\varphi_n(x)\,\psi_n(y)}{(\lambda-\lambda_0)^{i_n}} + F(x, y), \quad [i_1 + i_2 + \cdots + i_n = p]$$

con $F(x, y)$ *funzione finita per* $\lambda = \lambda_0$, *e dove le soluzioni* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *dell'equazione omogenea* $(E)'$ *e le soluzioni* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *dell'equazione omogenea coniugata* $(E)''$ *sono determinate in modo che, come può sempre farsi, soddisfacciano alla proprietà (detta di ortogonalità):*

$$\int_a^b \varphi_r(x)\,\psi_r(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s, \\ 0 & \text{»} \quad r \neq s. \end{cases}$$

Estende poi, con tutta facilità, i Suoi risultati al caso in cui la funzione caratteristica diviene infinita, discutendo in particolare anche il caso in cui il determinante $D_{\lambda G}$ si annulla.

Come si vede, i nuovi risultati del Plemelj sono un notevole complemento di quelli del Fredholm.

Il contributo portato da Hilbert e dai Suoi scolari allo studio dell'equazione integrale (D), principalmente per le splendide applicazioni all'analisi, è talmente vasto ed importante, da meritare una lunga e dettagliata esposizione. Però io debbo qui restringere molto i limiti di tale esposizione per non dare troppo lunghe proporzioni alla presente comunicazione e per non trascurare d'altra parte alcune quistioni delle quali voglio parlare.

Nella Sua prima comunicazione dei *Nachrichten* di Gottinga (1904) l'Hilbert, guidato dai criterii che condussero il Fredholm alla risoluzione dell'equazione (D), parte dal problema della trasformazione ortogonale di una forma quadratica di n variabili in una somma di quadrati, e, col passaggio al limite, arriva al seguente teorema fondamentale: *siano* $x(s)$, $y(s)$ *due funzioni arbitrarie tali che i due integrali:*

$$\int_a^b \{x(s)\}^2\,ds, \qquad \int_a^b \{y(s)\}^2\,ds$$

si mantengono inferiori ad una quantità positiva, che si può fissare, e sia $G(s, t)$ una funzione simmetrica di s e di t; allora si ha:

$$\int_a^b\int_a^b G(s, t)\, x(s)\, y(t)\, d s\, d t = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n(s)\, x(s)\, d s \int_a^b \varphi_n(s)\, y(s)\, d s,$$

dove le λ_n sono i valori di λ che annullano il determinante $D_{\lambda G}$, le φ_n sono le soluzioni dell'equazione:

$$0 = \varphi_n(s) + \lambda_n \int_a^b G(s, t)\, \varphi_n(t)\, d t$$

determinate con la condizione:

$$\int_a^b | \varphi_n(s) |^2\, d s = 1,$$

e dove ancora la serie del secondo membro è assolutamente convergente.

Da questo teorema deduce importanti criterii di sviluppibilità di una funzione in serie di funzioni φ_n, tra i quali citerò il seguente:

Se $G(s, t)$ è un allgemeiner Kern, ossia tale che, data una quantità positiva arbitrariamente piccola ε ed una qualsiasi funzione continua $g(s)$, esista sempre una funzione continua $h(s)$ tale che si abbia:

$$\int_a^b \left| g(s) - \int_a^b G(s, t)\, h(t)\, d t \right|^2 d s < \varepsilon;$$

e se $f(s)$ è una funzione che si può mettere sotto la forma:

$$f(s) = \int_a^b G(s, t)\, k(t)\, d t$$

con $k(t)$ funzione continua, allora si avrà:

$$f(s) = c_1\, \varphi_1(s) + c_2\, \varphi_2(s) +$$

$$c_i = \int_a^b f(s)\, \varphi_i(s)\, d s,$$

e la serie al secondo membro sarà convergente assolutamente e uniformemente.

In questa medesima comunicazione considera, in modo estremamente elegante, il caso in cui la funzione caratteristica $G(s, t)$ per $x = y$ diviene infinita di ordine inferiore ad $^1/_2$.

Nella seconda comunicazione introduce l'espressione differenziale:

$$L(u) \equiv \frac{d\left(p \frac{d u}{d x}\right)}{d x} + q u$$

e la funzione di Green relativa all'equazione $L(u) = 0$ con dati condizioni ai limiti a, b del campo di variabilità; e stabilisce i seguenti risultati: *se la funzione di* Green *relativa all'equazione* $L(u) = 0$ *viene considerata come funzione caratteristica dell'equazione* $(1)_F$ *e la funzione* $\psi(x)$ *è finita e continua e derivabile due volte, esisterà una soluzione di questa equazione ed una solamente, che sarà data dalla formola:*

$$\varphi(x) = -L\left(\psi(x)\right);$$

se la medesima funzione di Green *viene considerata come funzione caratteristica dell'equazione integrale* (D), *la funzione caratteristica della formola di risoluzione di questa equazione è uguale alla funzione di* Green *relativa all'equazione:*

$$L(u) - \lambda u = 0.$$

In seguito osserva che le funzioni φ_n, introdotte nella comunicazione precedente, rappresentano qui le soluzioni delle equazioni:

$$L(\varphi_n) - \lambda_n \varphi_n = 0;$$

e quindi, applicando i Suoi teoremi sugli sviluppi in serie ed estendendo ancora i Suoi risultati sull'espressione $L(u)$ al caso delle due dimensioni, ottiene come casi particolari i noti sviluppi di una funzione arbitraria in serie di funzioni trigonometriche, di Bessel, sferiche, di Lamé, quelli in serie di funzioni armoniche di Poincaré, ecc.

Nella terza comunicazione applica la teoria delle equazioni integrali alla risoluzione del problema di Riemann, limitandosi alla trattazione del problema di determinare una funzione di variabile complessa in un'area piana, con la condizione che al contorno la parte reale u e la parte immaginaria v soddisfacciano alla condizione lineare:

$$a(s) \,.\, u(s) + b(s) \,.\, v(s) + c(s) = 0,$$

essendo $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ date funzioni, sottoposte a certe restrizioni.

Prima di parlare, per quanto assai brevemente, delle due ultime e recenti comunicazioni di HILBERT (*), è opportuno che io qui faccia menzione di un interessante lavoro di ERHARD SCHMIDT (**), il quale si riconnette con i risultati delle due prime comunicazioni di HILBERT.

Lo SCHMIDT servendosi di disuguaglianze analoghe a quelle ben note di SCHWARZ, ritrova i risultati di HILBERT sugli sviluppi in serie, togliendo in particolare la condizione che la funzione $G(s,\ t)$ sia un *allgemeiner Kern*, e dà, per il caso di $G(s,\ t)$ funzione simmetrica la seguente elegante formola di risoluzione dell'equazione (D):

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b \psi(t)\, \varphi_\nu(t)\, d\, t.$$

In seguito estende alcuni dei Suoi risultati al caso di $G(s,\ t)$ funzione non simmetrica, introducendo le due funzioni caratteristiche date dagli integrali:

$$\overline{G}(s,\ t) = \int_a^b G(s,\ r)\, G(t,\ r)\, d\, r, \qquad \underline{G}(s,\ t) = \int_a^b G(r,\ s)\, G(r,\ t)\, d\, r$$

e sostituendo alle funzioni φ_n di HILBERT una serie di coppie di funzioni φ_n, ψ_n tali che

$$\varphi_n(s) = \lambda_n \int_a^b G(s,\ t)\, \psi_n(t)\, d\, t, \qquad \psi_n(s) = \lambda_n \int_a^b G(t,\ s)\, \varphi_n(t)\, d\, t.$$

Tornando ora ai lavori di HILBERT, diremo brevemente che nella quarta comunicazione fa una trattazione sistematica delle forme quadratiche con infinite variabili; e che nella quinta comunicazione Egli applica, gli ottenuti

(*) *Nachrichten* di Gottinga, 1905.

(**) *Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I Theil (Math. Annalen, Bd. LXIII).

risultati su queste forme, alla teoria dell'equazione integrale (D). Precisamente ritrova con rapidità ed eleganza i risultati di FREDHOLM, quelli Suoi e quelli di SCHMIDT. Inoltre deduce i Suoi risultati sulle equazioni differenziali del 2.° ordine, precedentemente menzionati, che estende ancora ai sistemi di equazioni, mediante l'introduzione di una certa equazione integrale del tipo (D), che chiama *equazione integrale polare.*

I risultati di HILBERT e di SCHMIDT, che abbiamo rapidamente passato in rivista, ed altri importanti ancora dovuti all'applicazione all'analisi della teoria dell'equazione (D), come ad esempio quelli di MAX MASON (*) sulle equazioni del tipo ellittico, di FUBINI sulle funzioni automorfe (**), ecc., mostrano qual valido strumento analitico sia la teoria creata da FREDHOLM sull'equazione $(2)_F$.

Ma ben altri e, se possibile, più meravigliosi frutti ha dati la teoria di FREDHOLM nel campo delle applicazioni alla fisica matematica.

L'artificio tanto semplice, ideato da FREDHOLM per risolvere il problema interno di DIRICHLET, si applica quasi tal quale alla maggior parte dei problemi al contorno, come ad esempio, quello dell'equilibrio dei solidi elastici, quello dell'equazione doppia di LAPLACE, quello delle temperature stazionarie, ecc. Esso si può riassumere nelle seguenti tre operazioni: 1.° costruire una opportuna equazione integrale $(2)_F$, od un opportuno sistema di equazioni integrali della specie $(2)_F$; 2.° dedurre sistematicamente la funzione caratteristica dell'equazione integrale costruita, da soluzioni particolari del problema al contorno che si studia, simili all'integrale $\frac{1}{r}$ dell'equazione di LAPLACE nello spazio ordinario; 3.° dimostrare che l'equazione integrale omogenea, corrispondente all'equazione integrale da risolvere, o la sua coniugata non ammettono soluzione alcuna diversa da zero.

Eseguite le dette operazioni, gli enunciati teoremi di FREDHOLM sull'equazione $(2)_F$ ci assicurano dell'esistenza della soluzione dell'equazione integrale (o del sistema) che si considera; ed allora il doppio strato, o il doppio strato generalizzato, il quale abbia per densità questa soluzione, risolve completamente il proposto problema al contorno.

Ma può darsi che l'equazione integrale omogenea, corrispondente all'equazione integrale che si studia, ammetta una o più soluzioni non identica-

(*) *Journal de math.*, Tomo 18, anno 1904.
(**) *Annali di Matematica*, T. XIV, 1907.

mente nulle. Allora la detta equazione integrale non omogenea, in generale, non ammette soluzioni; infatti gli enunciati teoremi di FREDHOLM ci dicono che in tal caso la funzione arbitrariamente data deve soddisfare a delle condizioni integrali [le (F)]. Qualche volta, come ad es. nell'integrazione dell'equazione doppia di LAPLACE per le aree piane, queste condizioni sono dovute al problema stesso che si studia; qualche altra invece, come ad es. nei problemi al contorno per i campi infiniti, sono dovuti al fatto che la soluzione del problema non è rappresentabile mediante un doppio strato o un doppio strato generalizzato. In quest'ultimo caso però il problema al contorno si può sempre risolvere, valendosi del seguente artifizio (*).

Si considerino alcuni integrali particolari del problema proposto, i quali non siano rappresentabili mediante doppii strati o doppii strati generalizzati; si aggiungano questi integrali, considerati nei punti del contorno del campo e moltiplicati per coefficienti indeterminati, alla funzione data ad arbitrio; si determinino questi coefficienti in modo che la somma ottenuta soddisfaccia alle condizioni (F). Allora la corrispondente equazione $(2)_F$ ammetterà una soluzione; e quindi il proposto problema al contorno sarà risoluto, nell'ipotesi che i valori al contorno siano quelli rappresentati dalla somma suddetta. Dopo ciò, è superfluo dire come si può arrivare immediatamente alla risoluzione del problema generale proposto.

La generalità dei metodi ora esposti è tale, che non sarà difficile immaginare *due* problemi al contorno, l'uno interno, l'altro esterno, i quali comprendano come casi particolari quello di DIRICHLET, quello dell'equilibrio di elasticità, quello delle temperature stazionarie, ecc. Infatti basterà costruire un sistema di strati generalizzati e un sistema di doppii strati generalizzati, che comprendano come casi particolari gli strati e doppi strati relativi agli enumerati problemi al contorno; scrivere poi le equazioni integrali che ne risultano, ed applicare a queste equazioni gli enunciati procedimenti generali. In questo modo verranno ad essere considerati sotto un unico punto di vista i più disparati problemi al contorno della fisica-matematica.

Tornando ora alle considerazioni sui singoli problemi al contorno, debbo osservare che non è sempre facile superare le difficoltà che presentano le tre operazioni, nelle quali si riassume l'artifizio di FREDHOLM. Così ad esempio, il FREDHOLM stesso nella risoluzione del problema dell'equilibrio dei

---

(*) LAURICELLA, *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali*... (Il Nuovo Cimento, Serie 5.ª, Vol. XIII, 1907).

corpi elastici per dati spostamenti in superficie (*), dopo di avere scritto un conveniente sistema di equazioni integrali, a dir vero, poco trasparente; cioè dopo di avere eseguita la prima delle tre indicate operazioni, abbandona il Suo primitivo metodo, forse in causa delle difficoltà incontrate nella seconda operazione. Tuttavia Egli ne riesce vittorioso mediante un procedimento, il quale, oltre a risolvere la quistione che si era proposta, può applicarsi ad altre importanti quistioni di fisica-matematica. Tale procedimento si fonda sulla seguente osservazione. Dalla dimostrazione di FREDHOLM sulla convergenza delle serie numeratore e denominatore (il determinante) della frazione, mediante cui può esprimersi la soluzione dell'equazione integrale $(2)_F$, risulta evidente che, se la funzione caratteristica di questa equazione è funzione olomorfa di un parametro k, anche le due dette serie saranno olomorfe in k, e per conseguenza la soluzione dell'equazione $(2)_F$ sarà funzione meromorfa di k. Ora le equazioni integrali di FREDHOLM per l'elasticità contengono linearmente il parametro k di elasticità; e poichè per $k=0$ il corrispondente determinante è diverso da zero, ne segue che esso non è identicamente nullo; e quindi che la soluzione delle dette equazioni integrali è data da un sistema di funzioni meromorfe di k. Il FREDHOLM costruisce allora un sistema di funzioni U, V, W dei punti del corpo elastico, analoghe ai doppii strati, e aventi per densità le suddette funzioni meromorfe. Le U, V, W saranno anch'esse funzioni meromorfe di k, e per i valori di k, per i quali il determinante è diverso da zero, soddisfano alle equazioni indefinite dell'equilibrio e nei punti della superficie prendono i valori dati. Per i casi di isotropia il FREDHOLM dimostra che le funzioni U, V, W sono certamente finite. Questo però non sarebbe sufficiente per dedurre allora, che le U, V, W nei punti della superficie contorno coincidono con le funzioni date; infatti si può dubitare che per qualche valore di k le funzioni densità abbiano un polo, pure essendo finite le funzioni U, V, W (come effettivamente succede in altri casi); e che per conseguenza non si possa applicare il teorema di discontinuità dei doppi strati. Un tal fatto non si verifica nei casi di isotropia; perchè, come si dimostra con la introduzione del concetto di pseudotensioni (**), in questi casi il determinante delle equazioni integrali è diverso da zero. Tuttavia l'analisi del FREDHOLM può rendersi esente dal cennato

(*) *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* (Arkiv för matematik, astr. och fysik, Bd. 2, N. 28).

(**) Vedi mia cit. Memoria, Cap. IV.

dubbio, indipendentemente dalla considerazione delle pseudo-tensioni con l'aggiunta di qualche dettaglio, come ho mostrato in una Nota (*) in corso di stampa, nella quale applico i risultati di FREDHOLM sull'elasticità (**) ad una nuova dimostrazione di esistenza relativa al problema dell'integrazione della equazione doppia di LAPLACE.

Avevo detto sopra che la nuova idea di FREDHOLM può essere utilmente applicata ad altre importanti quistioni di fisica-matematica. Per potere dare un'idea di queste nuove applicazioni, è necessario che io qui faccia menzione dei bellissimi risultati ottenuti dal PICARD, come applicazione della teoria di FREDHOLM. Senza parlare delle eleganti soluzioni che dà del problema delle temperature stazionarie e del problema dell'induzione magnetica, mi limiterò a rammentare che Egli riconduce l'integrazione dell'equazione differenziale lineare del 2.° ordine di tipo ellittico alla risoluzione di una equazione integrale della forma:

$$\varphi(x) + \int_a^b G(x, y) \left\{ \alpha(y) \cdot \frac{d\varphi}{dy} + \beta(y) \cdot \varphi(y) \right\} dy = \psi(x), \tag{G}$$

dove $G(x, y)$ è la nota funzione di GREEN e dove $\alpha(y)$, $\beta(y)$ sono funzioni note, finite e continue insieme alle derivate del 1.° ordine. Questa equazione trasforma poi in un'equazione integrale della forma $(2)_F$ mediante una integrazione per parti. Studia infine in modo particolare l'equazione delle vibrazioni delle membrane, introducendo la funzione di GREEN, a simiglianza di quanto fanno l'HILBERT e MAX MASON. Ritrova così i noti risultati su questa equazione, dovuti principalmente al POINCARÉ.

La critica mossa alcuni anni or sono dal prof. DINI (***) al classico metodo delle approssimazioni successive del PICARD per le equazioni alle derivate parziali del 2.° ordine, prova che, se da un canto l'uso della funzione di GREEN (o delle sue generalizzazioni) rende molto intuitivi i risultati che da essa si possono fare dipendere, d'altro canto la discussione completa di questi risultati richiede uno studio approfondito, di sua natura poco semplice, delle proprietà di essa funzione, e qualche volta richiede ancora delle limitazioni tali sulla natura del campo che si considera o sulla natura delle

(*) *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*; vol. XVI, serie 5.ª; 1907.

(**) Il prof. MARCOLONGO estende tali risultati di FREDHOLM ai campi infiniti.

(***) *Acta mathematica*, tomo 25.

funzioni date, da scemare di molto la generalità dei risultati. Ora nel caso delle equazioni delle vibrazioni delle membrane, come in casi analoghi della fisica-matematica, si può fare a meno di introdurre la funzione di Green (o le sue generalizzazioni). Basterà ricordare infatti che si posseggono integrali delle dette equazioni differenziali, perfettamente analoghi ai doppii strati: esse si possono ottenere dai potenziali ritardati e contengono un parametro variabile. Alle equazioni integrali, suggerite dalla considerazione di tali doppii strati generalizzati e contenenti un parametro variabile, si possono applicare appunto i ragionamenti che il Fredholm fa sulle equazioni integrali dell'elasticità. In questo modo, come ho mostrato per il caso del raffreddamento dei corpi in una Memoria, che sarà pubblicata negli *Annali di Matematica* (*), si ritrovano con semplicità, ed evitando quistioni di rigore, quei risultati che, iniziati dal Poincaré nella Sua celebre Memoria: *Sur les équations de la physique-mathématique* (**), furono poi maggiormente sviluppati in una serie di lavori dello Stekloff, del Liapaunoff, dello Zaremba, del Korn, ecc.

Fatta pure astrazione della incomparabile semplicità che si raggiunge con l'applicazione dei ragionamenti di Fredholm, non è certo trascurabile la generalità nei risultati. Infatti i ragionamenti dei detti autori si fondano essenzialmente su un noto lemma del Poincaré, dimostrato da questi solo per i campi convessi ed esteso ultimamente dal Korn e dal dott. E. Levi a campi non convessi, ma di limitata generalità; mentre i ragionamenti di Fredholm si applicano a campi non convessi, generali quanto quelli per i quali si dimostra il principio di Dirichlet.

Ma è assai probabile che ancora un nuovo importante ufficio debba compire il nuovo artifizio di Fredholm: intendo qui parlare della quistione delle *soluzioni eccezionali* nei campi infiniti, intorno alla quale si hanno tutt'ora idee incomplete.

Chiudo il mio dire sull'equazione (D), rammentando una bellissima Memoria del prof. Pincherle (***), scritta principalmente con l'intento di dedurre da un'unica fonte i risultati del Volterra e del Fredholm sulle equazioni integrali $(2)_V$, $(2)_F$.

In questa Memoria il prof. Pincherle, facendo tesoro di un Suo fecondo

(*) Vedi il Vol. XIV, pag. 143 e seguenti.

(**) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII, 1894.

(***) *Sulle equazioni funzionali lineari* (Mem. della R. Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna, S. 6.ª, Vol. III).

concetto, introduce una serie di potenze di un certo parametro k, i cui coefficienti sono potenze di una data operazione: questa serie nel caso dell'equazione $(2)_V$ corrisponde al valore $k = -1$ ed è convergente uniformemente ed assolutamente, mentre nel caso dell'equazione $(2)_F$ è funzione meromorfa di k.

Introduce inoltre il concetto di *elemento invariante*, che corrisponde alle soluzioni dell'equazione integrale omogenea (E); ed inizia la decomposizione di una funzione arbitraria f nella somma dei corrispondenti elementi invarianti.

I procedimenti e i risultati del prof. PINCHERLE fanno intravedere la possibilità di estendere al caso delle funzioni caratteristiche non simmetriche i risultati di HILBERT sugli sviluppi in serie, da un punto di vista diverso da quello di SCHMIDT, del quale abbiamo tenuto parola, e più prossimo ai criterii del POINCARÉ sui noti sviluppi in serie di soluzioni eccezionali.

Prima di passare a trattare dell'equazione $(1)_F$, credo opportuno dire qualche cosa del problema dell'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per date tensioni in superficie. Le equazioni integrali che si è condotti a scrivere, per analogia col problema derivato di DIRICHLET, non hanno alcun significato; difatti in generale le note formole del SOMIGLIANA non hanno alcun significato, quando il punto variabile si suppone sulla superficie. Per semplificare le mie considerazioni, dirò, limitandomi ad un campo piano σ chiuso da una linea s, che i doppi strati elastici sono della seguente forma:

$$u(x, y) = \int_s \left(a \frac{d \lg r}{d n} + b \frac{d \lg r}{d s}\right) u(s)\, d s$$

con a, b coefficienti costanti. Se si suppone che il punto (x, y) sia discosto da s si può, mediante un'integrazione per parti, trasformare la precedente formola nell'altra:

$$u(x, y) = \int_s \left(a \frac{d \lg r}{d n} u(s) + c \log r \frac{du}{ds}\right) d s.$$

L'equazione integrale alla quale così si perviene è della forma:

$$\varphi(x) + \int_a^b \left\{ H(x, y)\, \varphi(y) + K(x, y) \frac{d\varphi}{dy} \right\} d y = \psi(x) \tag{H}$$

con $\psi(x)$ funzione nota e $\varphi(x)$ funzione da determinare.

Questa equazione è della medesima natura della equazione (G) del PICARD; però mentre nel caso del PICARD con una integrazione per parti, si è ricondotti, come è stato detto, ad un'equazione del tipo $(2)_F$; nel caso del problema delle tensioni invece tale integrazione per parte non può più eseguirsi.

L'importanza del problema di fisica-matematica che, come abbiamo visto, si riconnette alla risoluzione dell'equazione integrale (H) è tale, da richiedere lo studio di questa equazione.

Passando ora alla considerazione dell'equazione integrale di 1.ª specie del tipo FREDHOLM, cioè alla $(1)_F$, debbo dire anzitutto che su di essa non si hanno risultati completi come quelli relativi alle equazioni integrali degli altri tre tipi. Difatti, a tacere di casi assai particolari, oltre agli studii già menzionati del VOLTERRA e del LEVI-CIVITA, si hanno sull'equazione $(1)_F$ i risultati, diciamo così, incidentali di HILBERT, già menzionati, per il caso in cui la funzione caratteristica sia la funzione di GREEN; ed alcuni casi particolari, di molta importanza, del KELLOGG (*) e del BATEMANN (**), nei quali la risoluzione dell'equazione $(1)_F$ è fatta dipendere dall'equazione $(2)_F$.

L'importanza della equazione $(1)_F$ nel campo delle applicazioni non è inferiore a quella relativa alle altre equazioni già considerate. Abbiamo visto che il teorema di HILBERT-SCHMIDT fa dipendere la quistione della sviluppabilità in serie, dalla risoluzione di un'equazione del tipo $(1)_F$: il noto problema della teoria della funzione potenziale, di costruire uno strato semplice di cui sono noti i valori in superficie, dipende anche esso dalla risoluzione di un'equazione del tipo $(1)_F$.

Il KELLOGG riconduce l'equazione integrale:

$$f(s)=\int_0^1 \varphi(t) \left\{ a \cot \pi (s-t) + S(s, t) \right\} d t \qquad \text{(I)}$$

con $S(s, t)$ funzione finita anche per $s=t$, alla risoluzione del tipo $(2)_F$; ed applica i Suoi risultati alla risoluzione del problema della teoria del potenziale, ora enunciato, nel caso di campi a due dimensioni, dei quali si conosca una rappresentazione conforme nel cerchio.

(*) *Unstetigkeiten in dem linearen Integralgleichungen* (Math. Ann., Bd. 58).

(**) L. c.

Tralascio di enumerare qui i varii ed interessanti risultati del BATEMAN, che rappresentano un notevole contributo alla teoria dell'equazione $(1)_F$, e mi limito a far vedere che il problema generale sopra enunciato della teoria del potenziale, cioè la risoluzione della equazione integrale del tipo $(1)_F$ a cui esso dà luogo, può risolversi mediante due equazioni coniugate del tipo $(2)_F$, di già risolute. Infatti, data una funzione arbitraria ψ dei punti della superficie σ, si costruisca, mediante un'equazione della specie $(2)_F$, il doppio strato, il quale, considerato nel campo finito limitato da σ, prenda in superficie i valori ψ, e si trasformi, pure mediante un'equazione della specie $(2)_F$ (la coniugata della precedente) il doppio strato, così ottenuto, in strato semplice (*). Questo strato semplice risolve il proposto problema di fisica-matematica, ossia la densità, così determinata, di questo strato semplice risolve la corrispondente equazione integrale $(1)_F$.

(*) Cfr. mia cit. Memoria, Cap. III, § 15.