

Neue Sätze über das Logarithmische Potential.

Von C. NEUMANN in Leipzig.

Obwohl ich bereits seit mehreren Jahren im Besitz dieser Sätze mich befinde und dieselben bereits zu *wiederholten* Malen in ausführlicher Weise nebst den erforderlichen Entwicklungen, Beweisen u. s. w. zu Papier gebracht habe (die *letzte* dieser Ausarbeitungen wurde vollendet am 19. Septbr. 1878); — so erscheint es mir dennoch angemessen, diese ausführliche Arbeit einstweilen noch *nicht* zu publiciren, sondern mich vorläufig zu beschränken auf einen kurzen Auszug.

Ich werde also im vorliegenden Aufsatz mich der Hauptsache nach beschränken auf die blosse Angabe der Sätze selber, die dabei erforderlichen Entwicklungen, Beweise u. s. w. aber einer späteren ausführlicheren Exposition vorbehalten.

§ 1.

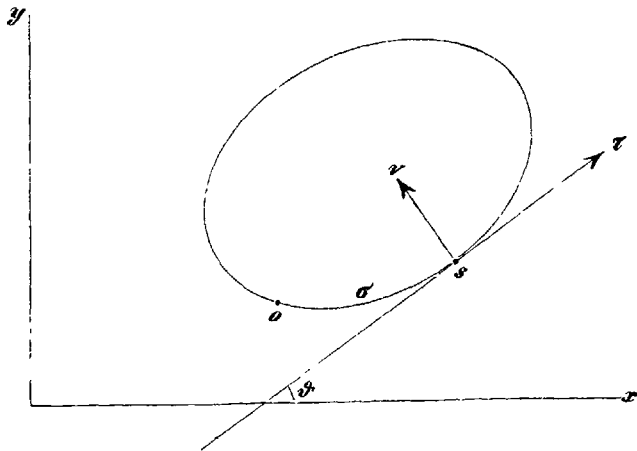
Die anzuwendenden Bezeichnungen.

In der Ebene sei eine *geschlossene Curve* σ gezeichnet, deren *innere* Normale ν , und deren Tangente τ heissen mag. Und zwar mag die Richtung der Tangente τ in solcher Weise gewählt sein, dass τ zu ν ebenso liegt, wie die x -Axe zur y -Axe. Um solches anzudeuten schreiben wir:

$$(1) \quad \tau : \nu = x : y.$$

Alsdann wird offenbar:

$$(2) \quad \cos(\tau, x) = \cos(\nu, y), \quad \cos(\tau, y) = -\cos(\nu, x);$$



und hieraus ergeben sich für die Richtungscosinus α, β der Tangente τ , und für die Richtungscosinus A, B der innern Normale ν folgende Formeln:

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha &= \cos(\tau, x) = \cos \vartheta, & A &= \cos(\nu, x) = -\sin \vartheta, \\ \beta &= \cos(\tau, y) = \sin \vartheta, & B &= \cos(\nu, y) = \cos \vartheta, \end{aligned}$$

wo ϑ das Azimuth der Tangente τ gegen die x -Axe vorstellt (vgl. d. Figur).

Wir werden im Allgemeinen einen *variablen Punkt* der gegebenen Curve mit s , und seine *Bogenlänge* mit σ bezeichnen, und zwar in solcher Weise, dass σ von einer festen Marke o aus gerechnet wird in der Richtung der Tangente τ (vgl. d. Figur). Sind σ und $\sigma + d\sigma$ die Bogenlängen zweier aufeinanderfolgender Punkte, ferner ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ die Azimuthe der diesen Punkten entsprechenden Tangenten, so gilt bekanntlich für den Krümmungsradius ρ , den die Curve an dieser Stelle besitzt, die Formel:

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} = \varepsilon \frac{d\vartheta}{d\sigma},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, jenachdem der Krümmungsmittelpunkt auf der *innern* oder *äussern* Normale liegt.

Die Grössen $\vartheta, \rho, \alpha, \beta, A, B$ mögen sämmtlich als *Functionen der Bogenlänge* σ angesehen, und die Ableitungen dieser Functionen durch Accente bezeichnet werden. Also z. B.

$$(5) \quad \begin{aligned} \vartheta' &= \frac{d\vartheta}{d\sigma}, & \rho' &= \frac{d\rho}{d\sigma}, & \alpha' &= \frac{d\alpha}{d\sigma}, \text{ etc.}, \\ \vartheta'' &= \frac{d^2\vartheta}{d\sigma^2}, & \rho'' &= \frac{d^2\rho}{d\sigma^2}, & \alpha'' &= \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Denkt man sich ferner die Curve mit einer *einfachen Belegung* von der Dichtigkeit q , oder auch mit einer sogenannten *Doppel-Belegung* vom Momente μ versehen, so mögen q und μ ebenfalls als *Functionen von* σ angesehen, und die Ableitungen derselben wiederum durch Accente bezeichnet werden. Also z. B.:

$$(6) \quad \begin{aligned} q' &= \frac{dq}{d\sigma}, & \mu' &= \frac{d\mu}{d\sigma}, \\ q'' &= \frac{d^2q}{d\sigma^2}, & \mu'' &= \frac{d^2\mu}{d\sigma^2}. \end{aligned}$$

Bezeichnet $f(\sigma)$ irgend eine beliebige Function der Bogenlänge, so nenne ich $f(\sigma)$ längs der gegebenen Curve *abtheilungsweise stetig*, wenn die Curve in eine *endliche* Anzahl Strecken zerlegbar ist, der Art, dass $f(\sigma)$ längs jeder solchen Strecke stetig bleibt.

Sämmtliche Punkte der Ebene mögen mit a, s oder i benannt werden, jenachdem sie *ausserhalb*, *auf* oder *innerhalb* der gegebenen Curve liegen. Und ist also $F = F(x, y)$ eine beliebig gegebene Function

des variablen Punktes (x, y) , so werden unter F_a, F_s, F_i die Werthe dieser Function in jenen Punkten a, s, i zu verstehen sein.

Mitunter werden bei einer solchen Function im Punkte s drei Werthe zu betrachten sein, nämlich erstens der daselbst *direct* vorhandene Werth F_s , ausserdem aber noch diejenigen beiden *Grenzwerte*, gegen welche F_a und F_i convergiren, sobald man die Punkte a und i unendlich nahe an s heranrücken lässt. Diese Grenzwerte mögen bezeichnet werden mit $F_{a,s}$ und $F_{i,s}$.

§ 2.

Das Potential V einer auf der Curve ausgebreiteten einfachen Belegung, und das Potential W einer längs derselben ausgebreiteten Doppelbelegung.

In diesem Paragraphen handelt es sich nur um die Recapitulation schon *bekannter* Sätze; dieselben mögen bezeichnet werden mit $Va.$ und $Wa.*$)

Satz $Va.$ — Denkt man sich die Curve versehen mit einer einfachen Belegung von der Dichtigkeit q , und macht man (was die Beschaffenheit der Curve und dieser Belegung betrifft) die Voraussetzung, dass

(7) ϑ und q längs der Curve abtheilungsweise stetig sind, so wird das von der Belegung auf den Punkt (x, y) ausgeübte Potential

$$V = \int T q d\sigma$$

in der ganzen Ebene allenthalben stetig sein, mit etwaiger Ausnahme der unendlich fernen Punkte*).

Hier ist $T = \log\left(\frac{1}{r}\right)$, falls nämlich r die Entfernung des variablen Punktes (x, y) vom Curvenelement $d\sigma$ vorstellt. Ausserdem bezeichnet ϑ den in (3) genannten Winkel. Und die Curve kann also, weil nach unserer Voraussetzung ϑ abtheilungsweise stetig sein soll, eine *endliche Zahl von Ecken* haben, muss aber, abgesehen von diesen Ecken, überall von *stetiger Biegung* sein.

Satz $Wa.$ — Denkt man sich die Curve versehen mit einer Doppelbelegung vom Momente μ , und macht man die Voraussetzung, dass

*) Durch allerhand Ausstellungen, die man hin und wieder an meinen Arbeiten gemacht hat, sehe ich mich veranlasst, zu bemerken, dass alle von mir aufgestellten Sätze so zu verstehen sind, wie ich sie ausgesprochen habe. So z. B. enthält der vorliegende Satz offenbar *nur* die Behauptung, dass die Erfüllung der Bedingungen (7) *ausreichend* sei zur Stetigkeit des Potentials. Und es würde also völlig ungerechtfertigt sein, wenn man mir etwa vorwerfen wollte, durch diesen Satz behauptet zu haben, dass jene Bedingungen (7) *nothwendig* wären zur Stetigkeit des Potentials.

(8) ϑ und μ längs der Curve stetig

sind, so wird das von dieser Belegung auf den variablen Punkt (x, y) ausgeübte Potential

$$W = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma$$

in der Ebene überall stetig sein, mit Ausnahme der gegebenen Curve. Es bilden nämlich die W_a inclusive der W_{as} ein überall endliches und stetiges Werthsystem; und die W_i inclusive der W_{is} bilden ein zweites solches System. Diese beiden Systeme aber stoßen in der Curve in unstetiger Weise zusammen, entsprechend der Formel:

$$W_{as} - W_{is} = -2\pi\mu_s,$$

wo μ_s den Werth des gegebenen Momentes μ im Punkte s vorstellt. Auch mag bemerkt sein, dass die Grenzwerte W_{as} und W_{is} zu dem im Punkte s vorhandenen directen Werthe W_s in der Beziehung stehen:

$$W_{as} = W_s - \pi\mu_s,$$

$$W_{is} = W_s + \pi\mu_s.$$

Nach der bei diesem Satze*) gemachten Voraussetzung soll ϑ überall stetig, also die Curve selber ohne Ecken und überall von stetiger Biegung sein.

§ 3.

Die ersten Ableitungen der Potentiale V und W .

Endlich gelangen wir nun zu den mitzutheilenden neuen Sätzen. Dieselben mögen bezeichnet werden mit $V\beta$, $W\beta$, $V\gamma$, $W\gamma$, ferner mit Vf , Wf , Wg und Wh . Der erste von diesen Sätzen sagt im Wesentlichen aus, dass die Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ des Potentials V (Seite 411) in die Form versetzt werden können:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}',$$

wo \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' die Potentiale gewisser auf der Curve ausgebreiteter einfacher Belegungen, und \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' die Potentiale gewisser längs derselben ausgebreiteter Doppelbelegungen vorstellen. Genauer ausgedrückt lautet der Satz folgendermassen:

*) Man findet den Beweis dieses Satzes in meinen *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential* (Leipzig bei Teubner, 1877), daselbst Seite 139 und 149.

Satz Vβ. — Nimmt man an, dass

- (9) ϑ, q längs der Curve stetig, und
 ϑ', q' abtheilungsweise stetig
 sind, so lassen sich die ersten Ableitungen des Potentials

(A)
$$V = \int T q d\sigma$$

in die Form versetzen:

(B)
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \int T (q\alpha)' d\sigma + \int \frac{\partial T}{\partial \nu} (-qA) d\sigma, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \int T (q\beta)' d\sigma + \int \frac{\partial T}{\partial \nu} (-qB) d\sigma, \end{aligned}$$

wo z. B. $(q\alpha)' = q\alpha' + \alpha q'$ sein soll.

Nachdem in dieser Weise die Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ in die Form $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}$ versetzt sind, kann die Stetigkeit resp. Unstetigkeit dieser Ableitungen unmittelbar beurtheilt werden durch die Sätze $V\alpha.$ und $W\alpha.$ Mit Hilfe dieser Sätze ergibt sich z. B., dass für jeden Punkt s der gegebenen Curve die Formel stattfindet:

(C)
$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{is} = 2\pi q_s A_s = 2\pi q_s \cos(\nu, x);$$

und hieraus ergeben sich weiter, falls man die x -Axe einmal mit der Tangente τ , das andere Mal mit der Normale ν zusammenfallen lässt*), die speciellern Formeln:

(D)
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{is} &= 0, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{is} &= 2\pi q_s. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich aus (B) mittelst der Sätze $V\alpha.$ und $W\alpha.$, dass

(E)
$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{as}, \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{as} \text{ und } \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{is}, \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{is}$$

vier Functionen des Punktes s vorstellen, von denen jede längs der gegebenen Curve stetig ist.

Satz Wβ. — Dieser Satz sagt aus, dass die Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ des Potentials W im Allgemeinen ebenfalls auf die Form $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}$ gebracht werden können. Macht man nämlich (um genauer auf die Sache einzugehen) die Voraussetzung, dass

- (10) ϑ, μ, μ' längs der Curve stetig, und
 ϑ'', μ'' abtheilungsweise stetig

sind, so lassen sich die ersten Ableitungen des Potentials

*) Die vom Punkte s ausgehenden Richtungen τ und ν werden von mir bald schlechtweg mit τ, ν , bald genauer mit τ_s, ν_s bezeichnet.

$$(A) \quad W = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma$$

in folgender Weise darstellen:

$$(B) \quad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \int T(\mu' A)' d\sigma + \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu' \alpha d\sigma, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \int T(\mu' B)' d\sigma + \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu' \beta d\sigma, \end{aligned}$$

wo z. B. $(\mu' A)' = \mu'' A + \mu' A'$ ist.

Hieraus ergibt sich mittelst der Sätze $V\alpha.$ und $W\alpha.$ die Relation:

$$(C) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{is} = -2\pi\mu'_s \alpha_s = -2\pi\mu'_s \cos(\tau_s, x);$$

und hieraus ergeben sich weiter, falls man die x -Axe einmal mit der Tangente τ , das andere Mal mit der Normale ν zusammenfallen lässt, die specielleren Relationen:

$$(D) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)_{is} &= -2\pi\mu'_s, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)_{is} &= 0. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (B), mit Hülfe der Sätze $V\alpha.$ und $W\alpha.$, dass

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)_{as}, \left(\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)_{as} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)_{is}, \left(\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)_{is}$$

vier Functionen des Punktes s vorstellen, von denen jede längs der gegebenen Curve stetig ist.

Bemerkung. — Obwohl ich, wie schon im Voraus bemerkt wurde, auf den Beweis der Sätze $V\beta.$ und $W\beta.$ mich hier nicht näher einlassen will, so mag doch darauf aufmerksam gemacht werden, dass diese beiden Sätze untereinander in einem sehr engen Zusammenhange stehen. In der That kann man den Satz $W\beta.$ aus dem Satze $V\beta.$ ableiten mittelst folgenden (auch an und für sich interessanten) Hilfssatzes:

Hilfssatz. — Nimmt man an, dass

ϑ, μ längs der Curve stetig, und
 ϑ', μ' abtheilungsweise stetig

sind, und versteht man unter V und W folgende auf den variablen Punkt (x, y) ausgeübten Potentiale

$$V = \int T \mu' d\sigma, \quad W = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma,$$

so ist $V + iW$ eine monogene Function von $x + iy$.

§ 4.

Ueber die höheren Ableitungen der Potentiale V und W .

Bezeichnet P eines der Potentiale V, W , so ist (nach den Sätzen $V\alpha.$, $W\alpha.$):

$$(11) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B},$$

mithin

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}.$$

Nun ist aber (zufolge der Sätze $V\beta.$ und $W\beta.$):

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}',$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}'',$$

Somit folgt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'') + (\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'),$$

oder kürzer geschrieben:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \mathfrak{v} + \mathfrak{w}.$$

Hier sollen selbstverständlich $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$, \mathfrak{v} die Potentiale irgend welcher auf der Curve ausgebreiteter *einfacher Belegungen*, und $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$, \mathfrak{w} die Potentiale irgend welcher daselbst ausgebreiteter *Doppelbelegungen* vorstellen.

Ebenso, wie man mittelst der Sätze $V\beta.$, $W\beta.$, von (11) zu (12) gelangt, ebenso wird man mittelst derselben Sätze von (12) aus zu folgender Formel gelangen:

$$(13) \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{w}';$$

dann von dieser aus zu folgender

$$(14) \quad \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = \mathfrak{v}'' + \mathfrak{w}'';$$

u. s. w. u. s. w. — Man übersieht bereits, dass sich in solcher oder ähnlicher Weise schliesslich folgendes Resultat herausstellt:

Allgemeiner Satz. — Benutzt man P als *Collectivbezeichnung* für die beiden Potentiale V, W , so kann im Allgemeinen jede Ableitung von P in die Form $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}$ versetzt werden; sodass man also (falls l, m beliebige ganze Zahlen vorstellen) schreiben kann:

$$(15) \quad \frac{\partial^{l+m} P}{\partial x^l \partial y^m} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}.$$

Dabei ist unter \mathfrak{B} das Potential einer auf der Curve ausgebreiteten ein-

fachen Belegung, andererseits unter \mathfrak{B} das Potential einer daselbst ausgebreiteten Doppelbelegung zu verstehen.

Will man indessen diesen Satz nicht im Allgemeinen, sondern mit wirklicher Genauigkeit angeben, so muss man allmählig von Stufe zu Stufe emporsteigen, und also von den im vorhergehenden Paragraph behandelten ersten Ableitungen zunächst übergehen zu den zweiten Ableitungen. Hiebei ergeben sich die beiden folgenden Sätze $V\gamma$. und $W\gamma$.

Satz $V\gamma$. — Nimmt man an, dass

$$(17) \quad \begin{aligned} &\vartheta, \vartheta', q, q' \text{ längs der Curve stetig, und} \\ &\vartheta'', q'' \text{ abtheilungsweise stetig} \end{aligned}$$

sind, so kann man die zweiten Ableitungen des Potentials

$$(A) \quad V = \int T q d\sigma$$

in die Form $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}$ versetzen, nämlich in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \int T (q' (a^2 - A^2) + q \vartheta' (2\alpha A))' d\sigma \\ &\quad - \int \frac{\partial T}{\partial v} (q' (2\alpha A) - q \vartheta' (a^2 - A^2)) d\sigma, \\ (B) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \int T (q' (\beta^2 - B^2) + q \vartheta' (2\beta B))' d\sigma \\ &\quad - \int \frac{\partial T}{\partial v} (q' (2\beta B) - q \vartheta' (\beta^2 - B^2)) d\sigma, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \int T (q' (\alpha\beta - AB) + q \vartheta' (\alpha B + \beta A))' d\sigma \\ &\quad - \int \frac{\partial T}{\partial v} (q' (\alpha B + \beta A) - q \vartheta' (\alpha\beta - AB)) d\sigma, \end{aligned}$$

wo die Accente durchweg Differentiationen nach der Bogenlänge σ andeuten.

Hieraus ergeben sich mittelst der Sätze $V\alpha$. und $W\alpha$. die Relationen:

$$(C) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{is} &= 2\pi (q' (2\alpha A) - q \vartheta' (a^2 - A^2))_s, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_{is} &= 2\pi (q' (\alpha B + \beta A) - q \vartheta' (\alpha\beta - AB))_s. \end{aligned}$$

Und hieraus entspringen weiter die specielleren Relationen:

$$(D) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}\right)_{is} &= -2\pi \left(\frac{\varepsilon q}{\varrho}\right)_s, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)_{is} &= +2\pi \left(\frac{\varepsilon q}{\varrho}\right)_s, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial v}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial v}\right)_{is} &= +2\pi q'_s, \end{aligned}$$

wo ϱ , ε die in (4) angegebene Bedeutung haben.

Satz $W\gamma$. *Nimmt man an, dass*

- (18) $\vartheta, \vartheta', \mu, \mu', \mu''$ längs der Curve stetig, und
 ϑ'', μ''' abtheilungsweise stetig
 sind, so kann man die zweiten Ableitungen des Potentials

$$(A) \quad W = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma$$

in die Form $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}$ versetzen, nämlich folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \int T(\mu''(2\alpha A) - \mu' \vartheta'(\alpha^2 - A^2))' d\sigma \\ &\quad + \int \frac{\partial T}{\partial \nu} (\mu''(\alpha^2 - A^2) + \mu' \vartheta'(2\alpha A)) d\sigma, \\ (B) \quad -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \int T(\mu''(2\beta B) - \mu' \vartheta'(\beta^2 - B^2))' d\sigma \\ &\quad + \int \frac{\partial T}{\partial \nu} (\mu''(\beta^2 - B^2) + \mu' \vartheta'(2\beta B)) d\sigma, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= \int T(\mu''(\alpha\beta + \beta A) - \mu' \vartheta'(\alpha\beta - AB))' d\sigma \\ &\quad + \int \frac{\partial T}{\partial \nu} (\mu''(\alpha\beta - AB) + \mu' \vartheta'(\alpha\beta + \beta A)) d\sigma. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich mittelst der Sätze $V\alpha$, $W\alpha$ die Relationen:

$$\begin{aligned} (C) \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{is} &= -2\pi(\mu''(\alpha^2 - A^2) + \mu' \vartheta'(2\alpha A))_s, \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{is} &= -2\pi(\mu''(\alpha\beta - AB) + \mu' \vartheta'(\alpha\beta + \beta A))_s; \end{aligned}$$

so wie auch die specielleren Relationen:

$$\begin{aligned} (D) \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}\right)_{is} &= -2\pi\mu_s'', \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \nu^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \nu^2}\right)_{is} &= +2\pi\mu_s'', \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau \partial \nu}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau \partial \nu}\right)_{is} &= -2\pi\left(\frac{\varepsilon \mu'}{\varrho}\right)_s, \end{aligned}$$

wo ϱ, ε die in (4) angegebenen Bedeutungen haben.

§ 5.

Die normalen, tangentialen und peripherischen Ableitungen der Potentiale V und W .

Der Satz $V\beta$. handelte über das Potential $V = \int Tq d\sigma$, unter der Voraussetzung, dass ϑ, q stetig, und ϑ', q' abtheilungsweise stetig sind. Und hiebei ergab sich, dass die Functionen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{as} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{is}$$

unter den eben genannten Voraussetzungen längs der Curve *stetig* sind. Auch lässt sich zeigen, dass der Charakter dieser Functionen ein wesentlich anderer wird, sobald man jene Voraussetzungen ganz oder theilweise fallen lässt. Nimmt man z. B. an, dass nur ϑ, ϑ' jenen Voraussetzungen entsprechen, dass hingegen q nicht *stetig*, sondern nur *abtheilungsweise stetig* sei, so werden die Functionen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{as} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{is}$$

ebenfalls nicht mehr *stetig*, sondern nur noch *abtheilungsweise stetig* sein. In der That gilt folgender Satz:

Satz Vf. — Nimmt man an, dass

$$(19) \quad \begin{array}{l} \vartheta \text{ längs der Curve stetig, und} \\ \vartheta', q \text{ abtheilungsweise stetig} \end{array}$$

sind, und setzt man:

$$(A) \quad V = \int T q d\sigma,$$

so sind

$$(B) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{as} - \pi q_s \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{is} + \pi q_s$$

zwei vom Punkte s abhängende Functionen, deren jede längs der Curve *stetig* ist. Hieraus folgt sofort, dass

$$(C) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{as} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{is}$$

längs der Curve *abtheilungsweise stetig* sind, und zwar in genau denselben Abtheilungen wie q .

In ähnlicher Weise, wie dieser Satz Vf. dem Satze Vß. zur Seite gestellt werden kann, in ähnlicher Weise kann dem Satze Wß. ein gewisser Satz Wf. zugeordnet werden, der folgendermassen lautet:

Satz Wf. Nimmt man an, dass

$$(20) \quad \begin{array}{l} \vartheta, \mu \text{ längs der Curve stetig, und} \\ \vartheta', \mu' \text{ abtheilungsweise stetig} \end{array}$$

sind, und setzt man:

$$(A) \quad W = \int \frac{\partial T}{\partial v} \mu d\sigma,$$

so werden die vom Punkte s abhängenden Functionen

$$(B) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)_{as} - \pi \mu'_s \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)_{is} + \pi \mu'_s$$

längs der Curve *stetig* sein. U. s. w.

Ohne mich auf die wirkliche Ableitung der Sätze Vf. und Wf. hier näher einzulassen, will ich nur bemerken, dass dieselbe von derjenigen der Sätze Vß. und Wß. wesentlich verschieden und mit mehr

Mühe verbunden ist. Uebrigens kann man vom Satze *Wf.* aus gewissermassen noch eine Stufe höher emporsteigen, und gelangt alsdann zu folgendem Resultat:

Satz *Wg.* — *Nimmt man an, dass*

$$(21) \quad \begin{array}{l} \vartheta, \vartheta', \mu, \mu' \text{ längs der Curve stetig, und} \\ \vartheta'', \mu'' \text{ abtheilungsweise stetig} \end{array}$$

sind, und setzt man:

$$(A) \quad W = \int \frac{\partial T}{\partial v} \mu d\sigma,$$

so werden

$$(B) \quad \begin{array}{ll} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \sigma^2} \right)_{as} + \pi \mu_s'', & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \sigma^2} \right)_{is} - \pi \mu_s'', \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_{as} + \pi \mu_s'', & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_{is} - \pi \mu_s'', \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right)_{as} - \pi \mu_s'', & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right)_{is} + \pi \mu_s'' \end{array}$$

sechs vom Punkte s abhängende Functionen sein, deren jede längs der Curve stetig ist.

Die drei Zeilen in (B) enthalten lauter *zweite Ableitungen*. Sie enthalten nämlich der Reihe nach die *zweite periphereische*, die *zweite tangentiale* und die *zweite normale* Ableitung. Dabei ist alsdann unter der *periphereischen* Ableitung die nach der *Bogenlänge σ* genommene zu verstehen. In Betreff dieser Ableitungen mögen hier folgende Bemerkungen ihren Platz finden.

Ist $F = F(x, y)$ eine beliebige Function des variablen Punktes (x, y) , so ist mit Rücksicht auf die in (1), (2), (3) eingeführten Bezeichnungen:

$$(s) \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(t) \quad \frac{\partial F}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(n) \quad \frac{\partial F}{\partial v} = A \frac{\partial F}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial y},$$

mithin $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \tau}$. Diese Uebereinstimmung zwischen der periphereischen und tangentialen Ableitung hört aber auf, sobald man zu den *zweiten* Ableitungen übergeht. Denn man erhält:

$$(S) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha' \frac{\partial F}{\partial x} + \beta' \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(T) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$(N) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Es liegt in der Natur des *Differentialquotienten*, dass man den-

selben nicht direct für einen einzelnen Punkt, sondern immer nur mit Rücksicht auf seine Nachbarpunkte bilden kann. Hiermit hängt zusammen, dass man in den vorstehenden sechs Formeln allerdings die Werthe von $\alpha, \beta, \alpha', \beta', A, B$ *direct* für jeden Punkt s der gegebenen Curve anzugeben vermag, nicht aber die Werthe von

$$(Q) \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Vielmehr ist man bei Bildung dieser Grössen (Q) gezwungen, einen gewissen *indirecten* Weg einzuschlagen, nämlich dieselben zuerst für irgend einen freibeweglichen *äussern* Punkt a , respective *innern* Punkt i zu bilden, sodann aber diesen Punkt a oder i nach s zu verschieben.

Ist die Function F zu beiden Seiten der Curve von verschiedenem Charakter, so werden sich im Allgemeinen bei der eben genannten Procedur, je nach Benutzung des Punktes a oder i , verschiedene Werthe ergeben; sodass man in diesem Fall z. B., was die Formel (n) betrifft, für $\frac{\partial F}{\partial v}$ *zwei verschiedene* Werthe zu notiren hat, welche anzudeuten sein werden, der eine durch:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{as} = A \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{as} + B \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{as},$$

der andere durch:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{is} = A \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{is} + B \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{is},$$

Analoges gilt für die übrigen Formeln (s), (t) und (S), (T), (N).

§ 6.

Potentiale von Doppelbelegungen, deren Moment abtheilungsweise stetig ist.

Beispiel des Kreises. — Es sei gegeben ein Kreis vom Radius ϱ . Ferner seien

$$(a) \quad \begin{cases} \xi = \varrho \cos \omega, \\ \eta = \varrho \sin \omega, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = r \cos u, \\ y = r \sin u, \end{cases} \quad (r < \varrho)$$

zwei Punkte, von denen der erstere (ξ, η) auf der *Peripherie*, der letztere (x, y) im *Innern* des Kreises liegt. Für den Logarithmus T der reciproken Entfernung dieser beiden Punkte ergibt sich alsdann der Werth:

$$\begin{aligned} (b) \quad T &= -\frac{1}{2} \log [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2], \\ &= -\frac{1}{2} \log [r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(u-\omega)], \\ &= \log \frac{1}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cos n(u-\omega); \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$(c) \quad \frac{\partial T}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cos n(u-\omega).$$

Das Bogenelement $d\sigma$ des Kreises ist $= \varrho d\omega$. Bezeichnet also ν (wie allgemein festgesetzt wurde) die *innere* Normale, so wird:

$$(d) \quad \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cos n(u-\omega) \right] d\omega.$$

Solches vorausgeschickt, wollen wir nun das Potential

$$(e) \quad W = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma$$

einer auf dem Kreise ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente μ wirklich berechnen, indem wir dabei annehmen, dass dieses μ längs des Kreises abtheilungsweise stetig, also entwickelbar sei in eine Fourier'sche Reihe:

$$(f) \quad \mu = \mu_\sigma = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega).^*)$$

Substituiren wir die Werthe (f) und (d) in die Formel (e), so erhalten wir für das Potential W im Punkte $i(r, u)$ folgenden Ausdruck:

$$(g) \quad W_i = 2\pi A_0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n (A_n \cos nu + B_n \sin nu).$$

Lassen wir nun den Punkt $i(r, u)$ unendlich nahe an den peripherischen Punkt $\sigma(\varrho, \omega)$ heranrücken, mithin r in ϱ und u in ω übergehen, so ergibt sich:

$$(h) \quad W_{i\sigma} = 2\pi A_0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega).$$

Nun ist nach dem Satze $W_{i\sigma}$:

$$(i) \quad W_{i\sigma} = W_{i\sigma} - \pi \mu_\sigma,$$

also wenn man rechts die Werthe (h), (f) substituirt:

$$(k) \quad W_{i\sigma} = \pi A_0.$$

Und wir gelangen daher zu folgendem merkwürdigen Resultat:

(22) ... Ist längs einer Kreisperipherie eine Doppelbelegung ausgebreitet, deren Moment stetig oder auch nur abtheilungsweise stetig ist, so wird das Potential dieser Belegung in allen Punkten der Peripherie ein und denselben constanten Werth haben.

*) Wir bezeichnen hier den peripherischen Punkt (ϱ, ω) kurzweg mit σ , und den daselbst vorhandenen Werth des Momentes μ mit μ_σ .

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, wenn wir uns in diesen Satz noch von einer etwas andern Seite her Einsicht zu verschaffen suchen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Kreisperipherie durch zwei Punkte A, B in einen *obern* Bogen $A1B$ und einen *untern* Bogen $A3B$ zerlegen, und annehmen, die *abtheilungsweise stetige* Function μ sei längs des *obern* Bogens $= 0$, und längs des *untern* $= 1$. Das Potential dieser Belegung hat alsdann in irgend einem Punkte (x, y) den Werth:

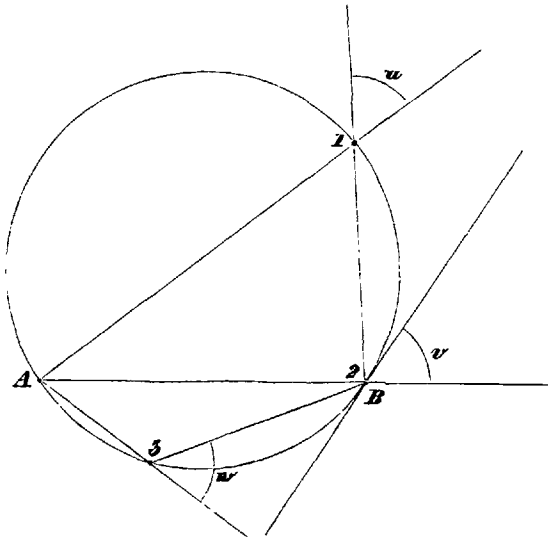
$$(l) \quad W_{(x,y)} = \int_{A3B} \frac{\partial T}{\partial v} d\sigma,$$

die Integration hinerstreckt über den *untern* Bogen $A3B$. Hieraus aber folgt sofort:*)

$$(m) \quad W_{(x,y)} = \int_{A3B} (d\sigma)_{(x,y)},$$

wo $(d\sigma)_{(x,y)}$ die mit ε multiplicirte *scheinbare* Grösse des Elementes $d\sigma$ für einen in (x, y) befindlichen Beobachter bezeichnet. Dabei ist $\varepsilon = +1$ oder $= -1$, je nachdem dieser Beobachter die *innere* oder *äussere* Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat.

Nimmt man also für (x, y) einen peripherischen Punkt, und zwar



der Reihe nach den Punkt 1, sodann den mit B identischen Punkt 2, und endlich den Punkt 3, so ergibt sich aus der Formel (m):

$$(n) \quad W_1 = u, \quad W_2 = v, \quad W_3 = w,$$

*) Vergl. meine schon citirten *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*, Seite 122.

wo u, v, w die in der nebenstehenden Figur angegebenen Winkel vorstellen. Nach dem Satz über die Peripheriewinkel des Kreises ist aber $u = v = w$, und folglich:

$$(o) \quad W_1 = W_2 = W_3;$$

was im Einklange ist mit unserm Satze (22) Seite 421. Man erkennt hieraus, dass jener Satz (22) in gewissem Sinne bezeichnet werden kann als eine Verallgemeinerung des Satzes über die Peripheriewinkel des Kreises.

Beispiel der Ellipse. — Es seien c und ϑ beliebig gegebene positive Constanten, und es sei gegeben eine Ellipse von der Brennpunktdistanz $2c$ und der Fadenlänge $c(e^\vartheta + e^{-\vartheta})$. Ferner seien:

$$(A) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2} c(e^\vartheta + e^{-\vartheta}) \cos \omega, \\ \eta = \frac{1}{2} c(e^\vartheta - e^{-\vartheta}) \sin \omega, \end{cases}$$

und

$$(A') \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} c(e^t + e^{-t}) \cos u, \\ y = \frac{1}{2} c(e^t - e^{-t}) \sin u, \end{cases}$$

$$(t < \vartheta)$$

zwei Punkte, von denen der erstere (ξ, η) auf der Peripherie, der letztere (x, y) im Innern der Ellipse liegt.

In der That erhält man aus den Formeln (A) alle peripherischen Punkte der Ellipse, wenn man ω von σ bis 2π wachsen lässt. Und andererseits erhält man aus den Formeln (A') alle innern Punkte der Ellipse, wenn man u von 0 bis 2π und t von 0 bis ϑ variiren lässt. ϑ selber ist eine gegebene positive Constante, welche etwa als der Parameter der Ellipse bezeichnet werden kann.

Zieht man, vom peripherischen Punkte (ϑ, ω) aus, ein Linienelement $d\sigma$ zum Punkte $(\vartheta, \omega + d\omega)$, und ein Linienelement dN zum Punkte $(\vartheta + d\vartheta, \omega)$, so wird

$$(B) \quad \begin{aligned} d\sigma &= \psi d\omega, \\ dN &= \psi d\vartheta, \end{aligned}$$

wo

$$\psi^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2 \cos 2\omega).$$

Offenbar ist $d\sigma$ ein Bogenelement der Ellipse, und dN ein Element ihrer äussern Normale.

Mit Bezug auf diese Formeln (B) sei noch Folgendes bemerkt. Ist f eine beliebige Function der Bogenlänge σ , oder (was dasselbe) eine beliebige Function der Variablen ω , so wird:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{d\sigma} &= \frac{df}{d\omega} \frac{1}{\psi}, \\
 \text{(C)} \quad \frac{d^2f}{d\sigma^2} &= \frac{d^2f}{d\omega^2} \frac{1}{\psi^2} - \frac{df}{d\omega} \frac{c^2 \sin 2\omega}{2\psi^4}, \\
 \frac{d^3f}{d\sigma^3} &= \frac{d^3f}{d\omega^3} \frac{1}{\psi^3} - \frac{d^2f}{d\omega^2} \frac{3c^2 \sin 2\omega}{2\psi^5} - \frac{df}{d\omega} \left(\frac{c^2 \cos 2\omega}{\psi^5} - \frac{(c^2 \sin 2\omega)^2}{\psi^7} \right).
 \end{aligned}$$

Für den Logarithmus T der reciproken Entfernung des Punktes (ξ, η) oder (ϑ, ω) vom Punkte (x, y) oder (t, u) ergibt sich der Werth:

$$\begin{aligned}
 T &= -\frac{1}{2} \log [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2], \\
 \text{(D)} \quad &= -\frac{1}{2} (C + \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\vartheta} [(e^{nt} + e^{-nt}) \cos nu \cos n\omega \\
 &\quad + (e^{nt} - e^{-nt}) \sin nu \sin n\omega],
 \end{aligned}$$

wo $C = \log\left(\frac{1}{2} c\right)$. Ferner ist nach (B):

$$\frac{d\sigma}{dN} = \frac{d\omega}{d\vartheta}, \quad \text{mithin} \quad \frac{dT}{dN} d\sigma = \frac{dT}{d\vartheta} d\omega,$$

oder falls man statt der äussern Normale N die *innere* Normale ν einführt:

$$\frac{dT}{d\nu} d\sigma = -\frac{dT}{d\vartheta} d\omega,$$

oder falls man hier für T seine Entwicklung (D) substituirt:

$$\begin{aligned}
 \text{(E)} \quad \frac{dT}{d\nu} d\sigma &= \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\vartheta} [(e^{nt} + e^{-nt}) \cos nu \cos n\omega \right. \\
 &\quad \left. + (e^{nt} - e^{-nt}) \sin nu \sin n\omega] \right\} d\omega.
 \end{aligned}$$

Diese Formeln vorangeschickt, wollen wir nun das Potential

$$\text{(F)} \quad W = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma$$

einer auf der Ellipse ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente μ zu berechnen versuchen, *unter der Voraussetzung, dass μ längs der Ellipse abtheilungsweise stetig*, mithin entwickelbar sei in eine Fourier'sche Reihe:

$$\text{(G)} \quad \mu = \mu_0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega). \quad *)$$

*) Wir bezeichnen den peripherischen Punkt (ϑ, ω) mit σ , und den daselbst vorhandenen Werth des Momentes μ mit μ_σ .

Substituiren wir in (F) die Werthe (G), (E), so erhalten wir für das Potential W im Punkte $i(t, u)$ den Ausdruck:

$$(H) \quad W_i = 2\pi A_0 + \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\vartheta} [(e^{nt} + e^{-nt}) A_n \cos nu + (e^{nt} - e^{-nt}) B_n \sin nu].$$

Und hieraus folgt, falls wir den Punkt $i(t, u)$ unendlich nahe an den peripherischen Punkt $\sigma(\vartheta, \omega)$ heranrücken, mithin t in ϑ , und u in ω übergehen lassen:

$$(I) \quad W_{i\sigma} = 2\pi A_0 + \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} [(A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega) + e^{-2n\vartheta} (A_n \cos n\omega - B_n \sin n\omega)].$$

Nach dem Satze $W\alpha$. gilt aber für jeden peripherischen Punkt σ die Relation:

$$(K) \quad W_\sigma = W_{i\sigma} - \pi\mu_\sigma;$$

und hieraus folgt durch Substitution der Werthe (G), (I):

$$(L) \quad W_\sigma = \pi A_0 + \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-2n\vartheta} (A_n \cos n\omega - B_n \sin n\omega).$$

Hieraus endlich folgt durch Differentiation:

$$(M) \quad \begin{aligned} \frac{dW_\sigma}{d\omega} &= \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} n e^{-2n\vartheta} (-A_n \sin n\omega - B_n \cos n\omega), \\ \frac{d^2 W_\sigma}{d\omega^2} &= \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 e^{-2n\vartheta} (-A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega), \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung ist μ längs der Ellipsenperipherie *abtheilungsweise stetig*, also die Reihe (G) *convergent* für jedwedes ω . Solches überträgt sich auf die Reihen (L), (M). Ja noch mehr! Diese Reihen (L), (M) sind nicht nur *convergent*, sondern werden auch, in Folge der in ihnen enthaltenen ächten Brüche $e^{-2n\vartheta}$, Werthe besitzen, die längs der Ellipsenperipherie allenthalben *stetig* sind.

Diese Stetigkeit der Functionen

$$(P) \quad W_\sigma, \quad \frac{dW_\sigma}{d\omega}, \quad \frac{d^2 W_\sigma}{d\omega^2}, \quad \text{etc. etc.}$$

überträgt sich auf die Functionen

$$(Q) \quad W_\sigma, \quad \frac{dW_\sigma}{d\sigma}, \quad \frac{d^2 W_\sigma}{d\sigma^2}, \quad \text{etc. etc.};$$

wie man solches aus den Formeln (C) sofort erkennt, da das dort vorhandene ψ [zufolge seiner in (B) gegebenen Definition] niemals

Null werden kann. Wir gelangen somit, indem wir die Functionen (Q) mit W_σ , W'_σ , W''_σ , etc., etc. bezeichnen, zu folgendem Resultat:

Denkt man sich auf der Ellipse eine Doppelbelegung angebracht, deren Moment μ abtheilungsweise stetig ist, und bezeichnet man das von dieser Doppelbelegung auf irgend einen peripherischen Punkt s ausgeübte Potential mit

$$(23) \quad W_s = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma,$$

so werden

$$W_s, \quad W'_s, \quad W''_s, \quad W'''_s, \text{ etc. etc.}$$

(die Ableitungen gebildet gedacht nach der Bogenlänge des Punktes s) *Functionen sein, welche längs der Ellipse allenthalben stetig sind.*

Diese für Kreis und Ellipse geltenden Sätze (22) und (23) lassen sich nun ausdehnen auf beliebige Curven. Es gilt nämlich folgender wichtige Satz:

Satz Wh. — *Denkt man sich eine geschlossene Curve gegeben, für welche*

$$\vartheta, \vartheta', \vartheta'' \text{ stetig sind, *)}$$

und auf dieser Curve eine Doppelbelegung ausgebreitet, deren Moment μ abtheilungsweise stetig ist, und bezeichnet man das von dieser Belegung auf einen peripherischen Punkt s ausgeübte Potential mit

$$(24) \quad W_s = \int \frac{\partial T}{\partial \nu} \mu d\sigma,$$

so werden

$$W_s, \quad W'_s \text{ und } W''_s$$

(die Ableitungen gebildet gedacht nach der Bogenlänge des Punktes s) *Functionen sein, welche längs der Curve überall stetig sind.*

Ohne auf den Beweis dieses Satzes hier näher einzugehen, will ich nur bemerken, dass derselbe deswegen nicht ganz einfach ist, weil das Integral (24) eine Differentiation nach der Bogenlänge s unter dem Integralzeichen nicht verträgt**).

*) $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ sollen die auf Seite 410 angegebenen Bedeutungen haben.

**) Das in (24) enthaltene T bezieht sich auf zwei peripherische Punkte σ und s , falls man nämlich unter σ den Ort des Elementes $d\sigma$ versteht. Gleichzeitig repräsentirt ν die im Punkt σ auf der Curve errichtete innere Normale. Differenzirt man nun aber den von diesen beiden Punkten σ und s abhängenden Ausdruck $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ nach der Bogenlänge s des Punktes s , so zeigt sich leicht, dass der so entstehende Differentialquotient $\frac{\partial^2 T}{\partial \nu \partial s}$ unendlich gross wird, sobald man jene beiden Punkte σ und s einander unendlich nahe rücken lässt. Somit ist also eine Differentiation des Integrals (24) nach der Bogenlänge s unter dem Integralzeichen in der That unzulässig.

§ 7.

Einige Sätze über Potentialfunctionen.

Um für unsere Untersuchungen — wenn auch vielleicht auf Kosten einer zu starken Specialisirung — eine feste und wohldefinierte Basis zu erhalten, wollen wir annehmen, dass die gegebene geschlossene Curve *zweiten Ranges* ist, und $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ stetig sind. Längs dieser Curve kann, wie aus meiner Methode des Arithmetischen Mittels hervorgeht (vgl. d. Math. Ann. XIII., Seite 287), die gegebene Masse *Eins* in solcher Weise vertheilt werden, dass ihr Potential auf alle *innern* Punkte *constant* ist. Auch wird sich (vgl. d. Math. Ann. XIII., S. 287) eine solche Vertheilung nur auf *einerlei* Art bewerkstelligen lassen. Bezeichnet man also die Dichtigkeit dieser Massenvertheilung mit γ , und den constanten Werth ihres innern Potentials mit Γ , so ist γ eine der Curve σ eigenthümliche Function, und Γ ein ihr zugehöriger constanter Parameter.

Je nach Beschaffenheit der Curve σ wird der Parameter Γ positiv, null, oder negativ sein; wobei zu bemerken, dass der Fall $\Gamma = \text{Null}$ einen *Ausnahmefall* constituiert, für welchen manche der sonst stattfindenden allgemeinen Sätze ihre Gültigkeit verlieren. Um die hieraus erwachsenden Schwierigkeiten resp. Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir jenen singulären Fall ganz ausschliessen, also festsetzen, *die Curve solle geschlossen und zweiten Ranges sein, ferner solle jede der Functionen*

$$(25) \quad \vartheta, \vartheta', \vartheta''$$

stetig sein, und überdies solle endlich die Curve von solcher Beschaffenheit sein, dass ihr Parameter Γ einen von Null verschiedenen Werth hat.

Durch diese gegebene Curve wird die unendliche Ebene in zwei Gebiete zerlegt, das äussere und das innere. Und wie üblich wollen wir unter einer *Potentialfunction des äussern Gebietes* das Potential irgend welcher Massen verstehen, welche theils *innerhalb* der Curve, theils *auf derselben* sich befinden. Ebenso wollen wir andererseits unter einer *Potentialfunction des inneren Gebietes* das Potential irgend welcher Massen verstehen, die theils *ausserhalb* der Curve, theils *auf derselben* ausgebreitet sind. Alsdann gilt zunächst folgender Satz:

(26) **Satz I.** — *Ist längs der gegebenen Curve (25) irgend eine stetige Function f vorgeschrieben, so existirt immer eine, und nur eine einzige, Potentialfunction des inneren Gebietes, welche auf der Curve mit f identisch ist.*

N.B. Für das äussere Gebiet gilt der analoge Satz.

Man findet den Beweis dieser Sätze in meinen Untersuchungen

über das Logarithmische und Newton'sche Potential (Leipzig 1877), namentlich aber auch in den Math. Annalen, Bd. XIII., Seite 288—290.

Zu diesem schon bekannten Satze I. sind wir aber, gestützt auf die in den vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Ergebnisse, noch einige *neue* Sätze hinzuzufügen im Stande. Wir wollen diese Sätze der Reihe nach aufführen, und jedesmal den Beweis folgen lassen.

(27) **Satz II.** — *Ist eine Potentialfunction des innern Gebietes sammt ihrer peripherischen Ableitung längs der Curve stetig [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig]*), so wird ihre normale Ableitung ebenfalls längs der Curve stetig sein.*

NB. Für das äussere Gebiet gilt der analoge Satz.

Bezeichnen wir, um auf den Beweis dieses Satzes näher einzugehen, die betrachtete Potentialfunction des *innern* Gebietes mit Ω , und die Werthe von Ω auf der Grenze dieses Gebietes d. i. auf der gegebenen Curve mit f , ferner die Ableitungen von f nach der Bogenlänge mit f', f'', f''', \dots , so sind nach der gemachten Voraussetzung

(28) f und f' stetig,
und f'' abtheilungsweise stetig.

Denken wir uns diese peripherischen Werthe f wirklich gegeben, so kann die Function Ω berechnet werden mittelst der Methode des arithmetischen Mittels, also dargestellt werden als das Potential einer gewissen auf der Curve ausgebreiteten Doppelbelegung; so dass wir also, indem wir das Moment dieser Doppelbelegung mit μ bezeichnen, zu folgender Formel gelangen:

$$(29) \quad \Omega = \int \frac{\partial T}{\partial r} \mu d\sigma.$$

Gleichzeitig ergibt sich aus jener Methode des arithmetischen Mittels**), dass das Moment

(30) μ längs der Curve stetig

*) Bezeichnet man also die *Randwerthe* der in Rede stehenden Potentialfunction mit f , und die Ableitungen von f nach der Bogenlänge mit f', f'', f''', \dots , so soll vorausgesetzt werden, dass

(α) f und f' stetig sind,
(β) und dass f'' abtheilungsweise stetig sei.

Im vorstehenden Satz (27) habe ich die Bedingung (α) vorzugsweise betont; hingegen die Bedingung (β), welche, wenn (α) erfüllt ist, in den meisten Fällen schon von selber erfüllt sein wird, nur in Parenthese beigelegt. Und in ähnlicher Weise werde ich auch in den folgenden Sätzen verfahren, um auf diese Weise die eigentliche Hauptsache deutlicher hervortreten zu lassen.

**) Vergleiche meine *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential* (Leipzig 1877), Seite 201.

ist. Markiren wir nun auf der gegebenen Curve einen beliebigen Punkt s , so ist nach Satz $W\alpha$. (Seite 411):

$$(31) \quad \pi\mu_s = \Omega_{is} - \Omega_s,$$

oder weil Ω_{is} (nach der Definition von f) identisch mit f_s ist:

$$(32) \quad \pi\mu_s = f_s - \Omega_s.$$

Gestützt auf die Thatsachen (25) und (30), können wir nun aber auf das Potential Ω den Satz Wh . (Seite 426) anwenden, und erkennen alsdann sofort, dass

$$(33) \quad \Omega_s, \Omega'_s, \Omega''_s \text{ längs der Curve stetig}$$

sind. Mit Rücksicht auf (28) und (33) folgt jetzt aus der Formel (32) sofort, dass

$$(34) \quad \begin{aligned} \mu_s, \mu'_s &\text{ stetig sind,} \\ \text{und } \mu''_s &\text{ abtheilungsweise stetig.} \end{aligned}$$

Und hieraus endlich folgt, mittelst des Satzes $W\beta$. (Seite 413), dass

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \nu}, \text{ d. i. } \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \nu}\right)_s,$$

ebenfalls längs der Curve stetig ist. Q. e. d.

In ähnlicher (nicht ganz in derselben) Weise kann man den analogen Satz für das äussere Gebiet beweisen.

(35) **Satz III.** — *Ist eine Potentialfunction des innern Gebietes sammt ihrer peripherischen Ableitung längs der Curve stetig [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig], so wird dieselbe immer darstellbar sein als das Potential einer auf der Curve ausgebreiteten einfachen Belegung. Und zwar wird die Dichtigkeit dieser Belegung längs der Curve stetig*) sein.*

N.B. Für das äussere Gebiet gilt der analoge Satz. Denkt man sich ferner zwei Potentialfunctionen respective des innern und äussern Gebietes, welche den in Rede stehenden Bedingungen entsprechen, und überdies längs der Curve identisch sind, so werden beide darstellbar sein als Potentiale ein und derselben Belegung.

Beweis. — Die in diesem Satze gemachten Voraussetzungen sind identisch mit denen des vorhergehenden Satzes. Ist also U die diesen Voraussetzungen entsprechende Potentialfunction des innern, und V diejenige des äussern Gebietes, so werden

$$(36) \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} \text{ und } \frac{\partial V}{\partial N}$$

(ν die innere und N die äussere Normale der Curve)

längs der Curve stetig sein (zufolge des vorhergehenden Satzes). Gleiches gilt von U und V selber. Machen wir ferner, um uns unsere Auf-

*) Dies das *punctum saliens*.

gabe zu erleichtern, die Annahme, dass U und V längs der Curve *gleichwerthig* sind, so ist

$$(37) \quad U_{\sigma} = V_{\sigma}, *)$$

wo σ einen beliebigen Punkt der Curve vorstellt.

Sind nun i und a zwei beliebige Punkte innerhalb und ausserhalb der gegebenen Curve, und T_{σ}^i und T_{σ}^a die Logarithmen der reciproken Werthe der Entfernungen ($i\sigma$) und ($a\sigma$), so gelten die bekannten Green'schen Formeln**):

$$(\delta) \quad 0 = \int \left(U \frac{\partial T^a}{\partial \nu} - T^a \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma,$$

$$(\varepsilon) \quad 2\pi U_i = \int \left(U \frac{\partial T^i}{\partial \nu} - T^i \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma, \quad (d\sigma \text{ das beim Punkte } \sigma \text{ gelegene Element der}$$

$$(\Delta) \quad 0 = \int \left(V \frac{\partial T^i}{\partial N} - T^i \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\sigma, \quad \text{gegebenen Curve})$$

$$(E) \quad 2\pi V_a = \int \left(V \frac{\partial T^a}{\partial N} - T^a \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\sigma,$$

wo unter den Integralzeichen der Kürze wegen U, V, T^i, T^a für $U_{\sigma}, V_{\sigma}, T_{\sigma}^i, T_{\sigma}^a$ gesetzt sind. Diese Formeln $(\delta), (\varepsilon), (\Delta), (E)$ sind im vorliegenden Fall völlig correct, weil die Grössen $(36), (37)$ längs der Curve stetig sind.

Durch Addition von $(\varepsilon), (\Delta)$ ergibt sich mit Rücksicht auf (37) :

$$(38) \quad 2\pi U_i = - \int T^i \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\sigma;$$

und ebenso ergibt sich aus $(\delta), (E)$:

$$(39) \quad 2\pi V_a = - \int T^a \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\sigma.$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$(40) \quad q = - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial V}{\partial N} \right),$$

so erhält man:

$$(41) \quad \begin{aligned} U_i &= \int T^i q d\sigma, \\ V_a &= \int T^a q d\sigma. \end{aligned}$$

*) Durch diese Annahme wird die Allgemeinheit unseres Beweises nicht beeinträchtigt. Denn ist z. B. U irgend eine beliebige, den Voraussetzungen unseres Satzes entsprechende Potentialfunction des inneren Gebietes, so können wir uns [nach Satz I.] jederzeit eine Potentialfunction V des äussern Gebietes construirt denken, welche mit U längs der Curve σ gleichwerthig ist. Und der Beweis, den wir zu geben im Begriff sind, zeigt alsdann, dass unser Satz richtig ist für jene beliebige Potentialfunction U .

**) Vergl. meine *Unt. über das L. u. N. Potential* (Leipzig 1877), Seite 19 (41. δ, ε) und Seite 21 (42. δ, ε).

Diese Formeln aber zeigen, dass U_i und V_a angesehen werden können als die Potentiale einer gewissen auf der Curve ausgebreiteten *einfachen Belegung*. Die Dichtigkeit q dieser Belegung hat den in (40) angegebenen Werth, und ist also, ebenso wie die Grössen (36), längs der Curve *stetig*. Q. e. d.

(42) **Satz IV.** — *Längs der Curve (25) sei irgend eine Function f gegeben; und zwar sei diese Function sammt ihrer peripherischen Ableitung stetig [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig]. Ferner bezeichne f_s den Werth dieser Function in einem variablen Punkte s der gegebenen Curve. Alsdann wird stets eine gewisse einfache Belegung der Curve existiren, deren Potential auf den Punkt s gleich f_s ist. Und zwar wird die Dichtigkeit dieser Belegung längs der Curve stetig sein.*

Beweis. Um den Beweis zu führen, brauchen wir uns nur diejenige Potentialfunction U_i vorzustellen, welche längs der Curve mit f gleichwerthig ist. (Dass eine solche Potentialfunction U_i wirklich existirt, erhellt aus dem Satze I.) Für dieses U_i ergibt sich alsdann (nach dem Satze III.) folgende Darstellung:

$$U_i = \int T^i q d\sigma,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(43) \quad U_i = \int T_{\sigma}^i q_{\sigma} d\sigma,$$

wo q_{σ} längs der Curve *stetig* ist (wie wiederum aus Satz III. hervorgeht). Aus dieser Formel (43) folgt aber, wenn man den Punkt i nach der peripherischen Stelle s hinrücken lässt:

$$(44) \quad U_s = \int T_{\sigma}^s q_{\sigma} d\sigma,$$

oder weil (nach der Definition von U) $U_s = f_s$ ist:

$$(45) \quad f_s = \int T_{\sigma}^s q_{\sigma} d\sigma. \quad \text{Q. e. d.}$$

Bemerkung. Der Uebergang von (43) zu (44) unterliegt keinem Bedenken. Denn die Formel (43) gilt für jedwede Lage des Punktes i , wie nahe derselbe an den peripherischen Punkt s auch heranrücken mag. Und gleichzeitig unterliegt es keinem Zweifel, dass, bei einer solchen Annäherung von i gegen s , sowohl die linke als auch die rechte Seite jener Formel gegen *bestimmte endliche* Werthe convergiren*). Folglich müssen diese Werthe *einander gleich* sein.

*) Bei der rechten Seite der Formel ergibt sich solches aus dem Umstande, dass q_{σ} längs der Curve *stetig* ist.