

SULLE LEGGI DI DISTRIBUZIONE DELL'ELETTRICITÀ DI TENSIONE
NEI CORPI PONDERABILI CONSIDERATI NÈ COME PERFETTI CON-
DUTTORI, NÈ COME PERFETTI COIBENTI, MA COME OPPONENTI
UNA RESISTENZA FINITA A RIMANERE ELETTRIZZATI; PER B.
RIEMANN.

Estratto del Dott. A. ROITI (1).

Quantunque queste considerazioni non sieno di data recente, pure reputiamo utile darne un sunto e perchè sono poco note, e per l'importanza che presentano ed anche in omaggio di quel valente che in così giovane età mancò alla scienza.

Egli vi fu indotto dalle misure esatte istituite dal Professor Kohlrausch padre sulla formazione del *residuo* nelle bottiglie di Leyda, cioè di quella nuova carica che in esse si forma quando si tengano isolate per qualche tempo dopo averle scaricate della *carica disponibile*.

Com'è noto, le indagini matematiche sull'elettricità di tensione si riferiscono alla sua distribuzione in corpi perfettamente conduttori e pienamente isolati, e quindi si rivolgono a corpi ponderabili che siano o assoluti conduttori o assoluti coibenti. Ne viene di conseguenza che per l'equilibrio l'elettricità si debba raccogliere tutta sulle superficie che separano i primi dai secondi. Ma tali condizioni sono meramente fittizie, perchè la natura non offre corpi di tal sorta.

Per uniformarsi all'esperienza, bisogna piuttosto ammettere che i corpi ponderabili si oppongano con forza finita a mante-

(1) Dagli *Atti della Società di Gottinga*.
Vol. XXIX.

nersi elettrizzati. Stando all'ipotesi dualistica, secondo la quale la elettricità di tensione è l'eccesso dell'elettricità positiva sulla negativa, bisogna ammettere in ogni punto del corpo ponderabile una causa che, con intensità proporzionale alla densità di questo eccesso, tenda a diminuire la densità dell'elettricità eccedente e ad accrescer quella di segno opposto. Stando invece alla ipotesi unitaria, per la quale la elettricità di tensione è l'eccesso dell'elettricità contenuta nel corpo sopra quella che gli è naturale, bisogna ammettere in ogni punto di esso corpo una causa tendente con intensità proporzionale alla densità dell'eccesso a scemare o ad accrescere la densità dello strato elettrico secondo che esso è positivo o negativo.

Ora, se i corpi ponderabili sono fra loro in quiete relativa e non sono soggetti ad influenze termiche, magnetiche nè d'induzione voltaica, oltre la causa di moto accennata, bisogna anche mettere in conto la forza elettro-motrice in conformità alla legge di Coulomb. In tali circostanze per la dipendenza del movimento dalle cause motrici si può ammettere la proporzionalità fra la forza elettro-motrice e l'intensità dell'efflusso elettrico che è ciò che chiamiamo corrente.

Per esprimere in formule le leggi di questo movimento, sia al tempo t nel punto $(x y z)$, riferito ad un sistema di coordinate ortogonali, ρ la densità dello strato elettrico, $4\pi u$ il potenziale dell'elettricità totale dietro la definizione di Gauss che il potenziale su un punto determinato è l'integrale esteso a tutte le masse elettriche divisa ciascuna per la distanza da questo punto. Le componenti parallele ai tre assi della forza elettro-motrice conforme alla legge di Coulomb saranno proporzionali a :

$$-\frac{du}{dx}, \quad -\frac{du}{dy}, \quad -\frac{du}{dz},$$

quelle derivanti dalla reazione del corpo ponderabile saranno proporzionali a :

$$-\frac{d\rho}{dx}, \quad -\frac{d\rho}{dy}, \quad -\frac{d\rho}{dz}.$$

Dunque le componenti della forza elettro-motrice si possono porre uguali a :

$$-\frac{du}{dx} = \beta \beta \frac{d\rho}{dx}, \quad -\frac{du}{dy} = \beta \beta \frac{d\rho}{dy}, \quad -\frac{du}{dz} = \beta \beta \frac{d\rho}{dz}$$

dove $\beta \beta$ dipende soltanto dalla natura del corpo ponderabile.

Ora queste sono proporzionali alle componenti dell'intensità della corrente, sono quindi $= \alpha \xi, \alpha \eta, \alpha \zeta$ rispettivamente, se si indicano con ξ, η, ζ le componenti dell'intensità della corrente e con α una costante che dipenda dalla natura del corpo ponderabile.

Aggiungendovi l'equazione :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

che si ottiene esprimendo in due maniere la quantità di elettricità che entra nell'elemento di spazio $dx \, dy \, dz$ durante l'elemento di tempo dt ; e l'altra :

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = -\rho$$

che deriva dal concetto del potenziale, e moltiplicando la prima per α e sostituendosi per ξ, η, ζ i loro valori, si ottiene :

$$\alpha \frac{d\rho}{dt} + \rho = \beta \beta \left(\frac{d^2 \rho}{dx^2} + \frac{d^2 \rho}{dy^2} + \frac{d^2 \rho}{dz^2} \right) = 0.$$

La quale eguaglianza dà per u un'equazione a derivate parziali di primo ordine rispetto a t e di quarto rispetto alle coordinate e quindi affinché, a partire da un istante fisso, u sia pienamente determinato nell'interno del corpo ponderabile e per tutto il tempo, si richiederà una condizione al tempo iniziale in ogni punto del corpo, e due condizioni in ogni punto della sua superficie per tutto il tempo successivo.

L'A. passa poi a paragonare coll'esperienza le conseguenze di questa legge in alcuni casi particolari.

Per l'equilibrio (in un conduttore isolato) si ha:

$$\frac{du}{dx} + \beta \beta \frac{d\rho}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \beta \beta \frac{d\rho}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} + \beta \beta \frac{d\rho}{dz} = 0$$

ovvero:

$$u + \beta \beta \rho = \text{costante}$$

od anche per la (1):

$$u - \beta \beta \left(\frac{d^2 \rho}{dx^2} + \frac{d^2 \rho}{dy^2} + \frac{d^2 \rho}{dz^2} \right) = \text{costante}$$

e pel caso dell'equilibrio dinamico ossia quando vi hanno correnti, ma esse, in una direzione qualunque, non variano col tempo (in un circuito chiuso di pile costanti) è:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

e quindi:

$$\rho - \beta \beta \left(\frac{d^2 \rho}{dx^2} + \frac{d^2 \rho}{dy^2} + \frac{d^2 \rho}{dz^2} \right) = 0.$$

Se β è piccolissimo di fronte alle dimensioni del corpo ponderabile, $u = \text{cost.}$ nel primo caso e ρ nel secondo decrescono molto rapidamente a partire dalla superficie, nell'interno sono piccolissime e precisamente queste quantità, ad una

distanza q dalla superficie, decrescono come $e^{-\frac{q}{\beta}}$. Questo caso è quello dei conduttori metallici; e ponendo $\beta = 0$ si hanno le note formole pei conduttori perfetti.

Per applicare queste leggi alla formazione del residuo nella bottiglia di Leida, poichè mancavano i dati intorno alle dimensioni degli apparati, Riemann dovette ammettere che esse fossero infinitamente grandi confronto alla distanza delle armature.

E poi senza riferire i calcoli ne dà solamente i risultati.

Dalle misure del Prof. Kohlrausch risultava che la carica disponibile, considerata come funzione del tempo, viene rappresentata approssimativamente da una parabola, ma che il parametro della parabola, la quale più si avvicina alla curva della carica, decresce lentamente cosicchè, rappresentando con L_0 la carica iniziale e con L_t quella al tempo t , è una quantità $\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ che decresce al crescere di t .

La stessa cosa risultò anche dai calcoli ammettendo che pel vetro tanto α quanto $\beta\beta$ fossero grandissimi, come già era da aspettarsi, e che, considerandoli infiniti, il loro quoziente rimanesse finito.

Confessa di non aver potuto istituire confronti più precisi fra i risultati del calcolo e quelli della osservazione per non avere i dati necessari a modificare conformemente ai fatti le premesse del calcolo stesso; tuttavia ritiene che la legge esposta intorno alla distribuzione dell'elettricità sia compiutamente confermata dalle esperienze del Prof. Kohlrausch.

Tratta in seguito dell'applicazione della legge medesima ad un altro soggetto.

Com'è noto la trasmissione delle correnti galvaniche nei conduttori metallici e l'equilibrio dinamico, che ne risulta quando le forze elettro-motrici siano costanti o lentamente variabili, si effettuano mediante l'elettricità di tensione che vi si presenta. Questo processo, a causa della sua grande celerità e delle azioni termiche e magnetiche che lo complicano, non si può studiare sperimentalmente che nei suoi risultati e le sole determinazioni sperimentali che ne abbiamo sono le misure della velocità di trasmissione nei fili telegrafici e le leggi di Ohm sulla permanenza delle correnti. Tuttavia una esatta analisi delle leggi di Ohm conduce pure a quanto si è qui ammesso e fu da esse primieramente che lo stesso Riemann vi fu condotto.

Ohm determina la distribuzione della corrente durante l'equilibrio dinamico colle due condizioni che seguono:

1. Per ottenere le forze elettro-motrici, proporzionali alle effettive intensità della corrente, bisogna aggiungere alle forze elettro-motrici esterne altre forze che sono le derivate d'una funzione del luogo (la tensione).

2. Durante la permanenza della corrente in ogni parte del conduttore ponderabile affluisce tanta elettricità quanta ne effluisce.

Ora Ohm credeva che la tensione, questa funzione del luogo le cui derivate sono le forze elettro-motrici interne, dipendesse dalla elettricità di tensione in guisa che fosse proporzionale alla sua densità, ciò che infatti spiega come si verifichino entrambe le condizioni. Ma Weber e Kirchhoff, quasi contemporaneamente, hanno già avvertito che in tal caso la elettricità dovrebbe essere in equilibrio quando essa riempisse uniformemente il corpo ponderabile, mentre l'esperienza insegna che nell'equilibrio è distribuita alla superficie. Nell'equilibrio la tensione dev'essere una funzione costante per tutto il conduttore e quindi piuttosto proporzionale al potenziale dell'elettricità ed allora queste forze elettro-motrici interne sono identiche con quelle regolate dalla legge di Coulomb.

Questa maniera di considerare la tensione fu anche accettata dalla maggior parte degli osservatori. Ma non furono istituite ricerche intorno le cause per le quali nella permanenza della corrente è soddisfatta la seconda condizione che la quantità d'elettricità rimanga costante in ogni parte ponderabile del corpo.

Nell'ipotesi dualistica deve rimaner costante la quantità dell'elettricità negativa come anche della positiva e, almeno quando non si voglia addentrarsi troppo nei rapporti delle grandezze, sembra di potere spiegare come non si formi un notevole eccesso dell'una elettricità sull'altra coll'attrazione delle elettricità opposte secondo la legge di Coulomb, ma allora bisogna ammettere inoltre una causa per la quale rimanga costante in ogni parte del corpo ponderabile la elettricità neutra. Indottovi dal Prof. Weber, il Riemann tentò di sottoporre a calcolo questa specie di pressione esercitata dal corpo ponderabile sull'elettricità neutra, ma non giunse a risultati soddisfacenti.

Nell'ipotesi unitaria basta una causa tendente in ogni parte del corpo ponderabile a mantener costante la quantità d'elettricità contenutavi. E così siamo condotti direttamente a ritenere come sopra che ogni corpo ponderabile tenda a possedere un'elettricità di densità determinata e si opponga a mantenerne di densità diversa da questa.

Tali considerazioni conducono dunque a ritenere la primitiva opinione di Franklin sui fenomeni elettrici come quella che va presa per fondamento a fine di vieppiù addentrarsi nella dipendenza di tali fenomeni fra loro e con altri, sviluppandola poi e modificandola dietro ai dettami dell'esperienza.

