

Thatsachen: 1) Dafs das Mondlicht dem Phänomene eine besondere Lichtstärke verleiht, welche so bedeutend ist, dafs aus dem grössern Glanze desselben mit vollständiger Sicherheit auf die Beimischung des Mondeinflusses geschlossen werden kann, auch welche derselbe noch bis 30 Minuten lang unter dem Horizonte verborgen bleibt. 2) Dafs das pyramidale Licht bis zum völligen Erlöschen eine Verringerung seiner Höhe, welche es nach dem Thau- fälle eingenommen hat, kaum wahrnehmen läfst. Welche Gründe die Annahme siderischer Ursachen für die Erklärung des Zodiacallichtes nothwendig erscheinen liefsen, und die Frage, ob nach dem jetzigen Stande der Wissenschaft dieselbe Nothwendigkeit noch andauert, liegt hier zu beantworten nicht vor; es war meine Aufgabe zu berichten, was ich gesehen habe.

Bahia 1869.

III. Ueber die Ersetzbarkeit geschlossener galvanischer Ströme durch magnetische Doppelflächen, insbesondere über die Ersetzung eines beliebigen Oberflächenspiralstromes durch eine räumliche Vertheilung magnetischer Massen; von E. Riecke.

(Der Ges. d. Wiss. zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. März 1870.)

-
1. Erinnerung an den Ampère'schen Satz über die Wirkung geschlossener galvanischer Ströme.

Wenn eine geschlossene Curve von einem galvanischen Strom durchflossen wird, so werden wir eine durch diese Curve hindurchgelegte und von derselben ringsum begrenzte Fläche als die Fläche des Stromes bezeichnen. Eine auf dieser Fläche errichtete Senkrechte nennen wir die Normale der Stromfläche, und zwar verstehen wir un-

ter der positiven Richtung der Normale diejenige, welche von einer in dem Strome schwimmenden und gegen den Mittelpunkt der Stromfläche hinsehenden menschlichen Figur markirt wird mit ausgestreckter Linken.

Mit Bezug auf die elektromagnetische Wirkung eines solchen Stromes gilt nun der bekannte Ampère'sche Satz:

Ein geschlossener galvanischer Strom kann in seiner Wirkung auf einen magnetischen Punkt ersetzt werden durch eine magnetische Doppelfläche, welche in folgender Weise construirt wird: Zu beiden Seiten der Stromfläche und in gleichem Abstände von ihr legen wir zwei Parallelfächen zu derselben, von welchen diejenige, welche gegen die Stromfläche in der Richtung der positiven Normale verschoben erscheint als die dem Strome zugewandte, die auf der entgegengesetzten Seite der Stromfläche befindliche als die von dem Strome abgewandte bezeichnet werden möge. Diese beiden Parallelfächen belegen wir gleichförmig mit magnetischer Masse, und zwar die dem Strome zugewandte mit positiver, die abgewandte mit negativer Masse. Die Dichtigkeit der Belegung machen wir auf beiden Blättern der Doppelfläche gleich der Stromintensität dividirt durch die Dicke der Doppelfläche, d. h. durch den Abstand der beiden Blätter von einander.

Es gilt dieser Satz auch für zwei geschlossene galvanische Ströme, welche zwischen sich eine ringförmige Stromfläche einschließen, wenn die beiden Ströme gleiche Intensität aber entgegengesetzte Richtung besitzen.

Zunächst ist jedoch der Ampère'sche Satz nur dann anwendbar, wenn die höheren Potenzen der Dicke der magnetischen Doppelfläche vernachlässigt werden können gegen die entsprechenden Potenzen der Entfernung des betrachteten Punktes von der Doppelfläche, und es muß demnach die Stromfläche stets so gewählt werden, daß diese Bedingung erfüllt wird. Man kann indessen durch andere Rücksichten an eine bestimmte Gestalt der Stromfläche gebunden seyn, z. B. bei einer ebenen Stromcurve an das von derselben begränzte ebene Flächenstück, und

in diesem Falle wird die angeführte Bedingung keineswegs für alle Lagen des magnetischen Punktes erfüllt seyn; es kann dann der Fall eintreten, daß der betrachtete Punkt auf die magnetische Doppelfläche selbst zu liegen kommt. Die hiedurch entstehende Schwierigkeit läßt sich umgehen, indem man an Stelle des endlichen, von der Stromcurve begränzten ebenen Flächenstücks, das von derselben begränzte ins Unendliche sich ausdehnende Flächenstück als Stromfläche benutzt, indessen kann auch das erstere Flächenstück beibehalten werden, da sich nur für den Fall, daß der betrachtete Punkt der magnetischen Doppelfläche selbst angehört, eine Modification des Ampère'schen Satzes ergibt.

2. Der Ampère'sche Satz für Punkte, welche der magnetischen Doppelfläche selbst angehören.

Wir werden uns im Folgenden beschränken auf die Betrachtung ebener Ströme, und wir werden hiebei als Stromfläche jederzeit das von der Stromcurve umschlossene ebene und endliche Flächenstück betrachten. Wir setzen ferner voraus, daß das Coordinatensystem, auf welches wir die Punkte des Raumes beziehen, so gewählt sey, daß die z -Axe desselben senkrecht stehe gegen die Stromfläche, und daß ihre positive Richtung zusammenfalle mit der positiven Richtung der Stromnormale.

Ehe wir auf den Ampère'schen Satz selbst eingehen, möge eine Bemerkung über das Potential magnetischer Doppelflächen vorangeschickt werden. Das Potential einer solchen Doppelfläche auf einen äußeren Punkt, dessen Coordinaten x, y, z seyn mögen, ist repräsentirt durch eine Function v von x, y, z , und zwar durch eine Function, welche sich mit der Lage des betrachteten Punktes stetig ändert, auch wenn dieser auf seiner Bahn die magnetische Doppelfläche durchbricht. Unter diesen Umständen stellt aber die Function v nicht in allen Punkten der Bahn das Potential der magnetischen Doppelfläche

dar, es ergibt sich vielmehr aus dem bekannten Gauß'schen Satze über das Potential einer Oberflächenbelegung folgende Bemerkung:

Bezeichnen wir durch v diejenige stetige Function von x, y, z , welche in allen aufserhalb der magnetischen Doppelfläche gelegenen Punkten das Potential dieser Fläche repräsentirt, so hat das Potential der Doppelfläche für einen Punkt der auf einem der beiden Blätter selbst liegt, den Werth

$$v + 2\pi k z,$$

für einen Punkt der zwischen den beiden Blättern der Doppelfläche liegt, den Werth

$$v + 4\pi k z,$$

wo wir unter k die Dichtigkeit der Belegung, unter z die der z -Axe parallele Coordinate des betrachteten Punktes verstehen.

Es sey nun zunächst ein kreisförmiger galvanischer Strom gegeben, unter dessen Axe die durch den Kreismittelpunkt hindurchgehende Normale verstanden werden soll. Das Potential dieses Stromes auf einen in der Axe liegenden Punkt läßt sich darstellen durch eine Function w der z -Coordinate dieses letzteren; das Potential der dem Strome entsprechenden magnetischen Doppelfläche stellt sich ebenfalls dar durch eine Function von z , welche durch v bezeichnet werden möge. Unter der Voraussetzung nun, daß die höheren Potenzen der Dicke der magnetischen Doppelfläche vernachlässigt werden können gegen die entsprechenden Potenzen der Entfernung des betrachteten Punktes von dem Umfange des Stromkreises, ergibt sich, daß die Functionen v und w für alle Punkte der Axe identisch sind. Es ist also unter dieser Voraussetzung auch das Potential des Kreisstromes identisch mit dem Potential der entsprechenden magnetischen Doppelfläche für alle Punkte der Axe mit Ausnahme derjenigen, welche der magnetischen Doppelfläche selbst angehören. Für diese letzteren aber ergibt sich aus der vorhergehenden Bemerkung das Resultat.

Bezeichnen wir durch w' und v' die Werthe, welche die Potentiale des gegebenen Stromes und der entsprechenden magnetischen Doppelfläche in denjenigen Punkten der Axe besitzen, in welchen dieselbe die beiden Blätter der magnetischen Doppelfläche durchschneidet, die Werthe der Potentiale in den zwischen beiden Blättern gelegenen Punkten der Axe durch w'' und v'' , so finden die Beziehungen statt:

$$w' = v' - \frac{\pi i z}{\delta}$$

$$w'' = v'' - \frac{2\pi i z}{\delta},$$

wo unter i die Stromstärke, unter 2δ die Dicke der magnetischen Doppelfläche zu verstehen ist.

Gehen wir über zu dem allgemeinen Fall, in welchem die Stromcurve durch eine beliebige ebene Curve repräsentirt ist, so können wir in folgender Weise verfahren. Um den Punkt, auf welchen die Wirkung des Stromes bestimmt werden soll, beschreiben wir eine Kugel, deren Halbmesser so groß ist, daß wir gegen die höheren Potenzen desselben die entsprechenden Potenzen der Dicke der magnetischen Doppelfläche vernachlässigen können; eine um den betrachteten Punkt beschriebene Kugel, welche diese Eigenschaft besitzt, möge als Kugel K bezeichnet werden.

Wenn diese Kugel das von der Stromcurve begränzte ebene Flächenstück, die Stromfläche, gar nicht schneidet, so ist die Anwendbarkeit des Ampère'schen Satzes von vornherein einleuchtend.

Es kann jedoch zweitens der Fall eintreten, daß die Kugel K die Stromfläche, aber nicht die Stromcurve schneidet, daß also der Schnitt mit der Stromfläche durch einen vollen Kreis repräsentirt wird. In diesem Falle können wir zu dem ursprünglich gegebenen Strom, ohne in der Wirkung desselben etwas zu ändern, noch zwei Ströme von derselben Stärke hinzunehmen, welche den Umfang jenes Kreises in entgegengesetzter Richtung durchfließen.

Auf den ursprünglich gegebenen Strom und den ihm entgegengesetzten Kreisstrom findet der Ampère'sche Satz unmittelbare Anwendung; wir können diese beiden Ströme ersetzen durch die von ihnen eingeschlossene ringförmige Doppelfläche. Es bleibt dann übrig derjenige Kreisstrom, welcher mit dem gegebenen gleich gerichtet ist. Der betrachtete magnetische Punkt liegt aber in der Axe dieses letzteren Kreisstromes, und es ergibt sich daher aus dem vorhergehenden, daß wir auch diesen ersetzen können durch die zugehörige Doppelfläche: diese kreisförmige Doppelfläche mit der ringförmigen zusammengenommen, bildet aber wieder die ganze dem ursprünglich gegebenen Strom entsprechende Doppelfläche; es zeigt sich somit, daß der Ampère'sche Satz in dem betrachteten Falle ebenfalls seine Gültigkeit behält. Unsere Betrachtungen erleiden nur dann eine Modification, wenn der betrachtete Punkt der Doppelfläche selbst angehört. Zu dem Potential des ursprünglich gegebenen Stromes können wir in diesem Falle wieder hinzunehmen die Potentiale der beiden Ströme, welche den auf der Stromfläche ausgeschnittenen Kreis in entgegengesetzter Richtung durchfließen; die Summe der Potentiale des gegebenen Stromes und des ihm entgegengesetzten Kreisstromes ist wieder gleich dem Potential der zwischen ihnen liegenden ringförmigen Doppelfläche; das Potential w des mit dem gegebenen gleichgerichteten Kreisstromes ist aber nicht mehr gleich dem Potential v der Doppelfläche, sondern es finden zwischen diesen Potentialen die Beziehungen statt

$$w = v - \frac{\pi i z}{\delta}$$

oder

$$w = v - \frac{2 \pi i z}{\delta},$$

je nachdem der betrachtete Punkt auf einem der beiden Blätter der Doppelfläche selbst liegt, oder zwischen beiden Blättern. Addiren wir auf der einen Seite dieser Gleichungen die Potentiale des gegebenen Stromes und des entgegengesetzten Kreisstromes, auf der andern Seite

das der Summe jener beiden gleiche Potential der ringförmigen magnetischen Doppelfläche, so sehen wir, daß die genannten Beziehungen sich ohne weiteres übertragen auf das Potential des ursprünglich gegebenen Stromes und der ihm zugehörigen Doppelfläche.

Wenn endlich die um den betrachteten Punkt beschriebene Kugel K von der Stromcurve selbst geschnitten wird, ist der Ampère'sche Satz gar nicht mehr anwendbar. Es ist dies der Fall bei allen Punkten, welche eingeschlossen sind in einer Röhrenfläche, deren Axe die gegebene Stromcurve ist, und welche alle Kugeln K umhüllt, die wir aus den einzelnen Punkten der Stromcurve als Mittelpunkten beschreiben können.

3. Ersetzung eines eine beliebige Oberfläche spiralförmig umziehenden Stromes durch eine räumliche Vertheilung magnetischer Massen.

An Stelle des Stromes, welcher die gegebene Oberfläche spiralförmig umwindet, setzen wir zunächst ein System einzelner galvanischer Ströme, welche auf der Oberfläche in folgender Weise vertheilt sind. Mit der gegebenen Oberfläche denken wir uns fest verbunden eine Richtung z , welche wir als die Axe der Fläche bezeichnen wollen. Auf dieser Axe tragen wir, die Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Windungen des Stromes ab, und theilen dieselbe hiedurch in eine ebenso große Anzahl gleicher Segmente, als die durch den Strom gebildete Spirale Windungen besitzt. Durch die Mitte jedes Segments führen wir eine Ebene senkrecht zur Axe; dem System der so bestimmten Ebenen entspricht auf der Oberfläche ein System von Curven, und diese Curven sind es, welche als Bahnen derjenigen galvanischen Ströme betrachtet werden sollen, die wir an Stelle des gegebenen Stromes substituiren. Die Stärke aller dieser Ströme ist natürlich gleich der Stärke des ursprünglich gegebenen Stromes, die Richtung übereinstimmend mit der Richtung des letztern. Wir setzen voraus, daß diese Richtung von

der Art ist, daß die positiven Stromnormalen mit der positiven Richtung der Flächenaxe z zusammenfallen.

Auf das so definirte Stromsystem werden wir nun den Ampère'schen Satz in Anwendung bringen. Um zunächst die Gränzen, innerhalb derer diese Anwendung gestattet ist, festzulegen, construiren wir um alle Strombahnen des Systemes die entsprechenden Umhüllungsflächen der Kugeln K , wobei wir die Dicke der magnetischen Doppelflächen gleich dem Abstände der einzelnen Strombahnen nehmen. Die so erhaltenen Röhrenflächen besitzen dann wieder eine gemeinsame Umhüllungsfläche, und die Ersetzung der einzelnen Ströme durch magnetische Doppelflächen ist dann für alle außerhalb dieser letzteren Umhüllungsfläche liegenden Punkte gestattet. Man sieht leicht, daß dieselbe in zwei Parallellflächen zu der gegebenen Oberfläche zerfällt, welche nach innen und außen in einem Abstände von derselben sich befinden, der gleich dem Halbmesser der Kugeln K ist. Wir werden im folgenden immer voraussetzen, daß die von uns betrachteten Punkte außerhalb des von den beiden Parallellflächen eingeschlossenen Raumes sich befinden, daß also die Ersetzung der Ströme durch magnetische Doppelflächen stets in Anwendung gebracht werden kann.

Wir behandeln zunächst den Fall, daß der betrachtete magnetische Punkt außerhalb der von den Strömen umzogenen Oberfläche liegt. Wir ersetzen jeden einzelnen Strom des Systemes durch die entsprechende magnetische Doppelfläche; das mit nördlichem Fluidum belegte Blatt dieser Fläche wollen wir bezeichnen als die Nordpolfläche, das mit südlichem Fluidum belegte Blatt als die Südpolfläche des entsprechenden Stromes. Wenn wir den Abstand der beiden Blätter einer Doppelfläche gleich den auf der Axe abgetragenen kleinen Segmenten machen, so wird immer eine Nordpolfläche des vorhergehenden, und eine Südpolfläche des folgenden Stromes durch den gemeinsamen Endpunkt zweier aufeinander folgender Segmente der Axe hindurchgehen, sie werden also vereinigt

liegen. Bezeichnen wir die Stromstärke durch i , die Zahl der Strombahnen, welche auf die Längeneinheit der Axe kommen, durch n , so ergibt sich für die Dichtigkeit der Belegung sowohl auf den mit nördlichen als auf den mit südlichem Fluidum belegten Flächen der Werth $n.i$; es heben sich also immer die Wirkungen der zusammenfallenden Theile zweier vereinigt liegender Polflächen auf. Uebrig bleiben nur die Wirkungen der ringförmigen Flächenstücke, um welche die eine dieser Polflächen die andere überragt. Diese ringförmigen Flächenstücke sind in den Theilen der Oberfläche, in welchen die innere Normale mit der Flächenaxe einen stumpfen Winkel macht, mit positivem, in den Theilen der Oberfläche, in welchen jener Winkel ein spitzer ist, mit negativem Fluidum von der Dichte $n.i$ belegt zu denken. Jedes Element ds , welches einem jener ringförmigen Flächenstücke angehört, kann angesehen werden als Projection eines entsprechenden Elementes do der gegebenen Oberfläche; es ist daher

$$ds = \mp do \cos (p_i, z)$$

wo das negative oder positive Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die innere Normale p_i in dem Element do mit der Axe z einen stumpfen oder einen spitzen Winkel einschließt. Jedes Element ds kann also in seiner Wirkung ersetzt werden durch ein entsprechendes Element do der gegebenen Oberfläche, dieses belegt gedacht mit magnetischem Fluidum von der Dichtigkeit

$$- n.i \cos (p_i, z).$$

Mit Bezug auf die Wirkung des die Oberfläche bedeckenden Stromsystemes, oder was auf dasselbe hinauskommt, des die Oberfläche umziehenden Stromes ergibt sich somit der Satz:

Wenn eine beliebige Oberfläche spiralförmig von einem galvanischen Strome umzogen wird, so läßt sich dieser Strom in seiner Wirkung auf Punkte, die außerhalb der Oberfläche gelegen sind, ersetzen durch eine Belegung der Oberfläche mit magnetischer Masse; die Dichtigkeit dieser Belegung ist in jedem Punkte gegeben durch

$$- n i \cos (p_i, z),$$

hier bezeichnet i die Stromstärke, n die Zahl der auf die Längeneinheit der Axe kommenden Windungen der Spirale, und p_i die innere Normale der Fläche in dem betrachteten Punkt.

Durch eine einfache geometrische Interpretation des Ausdruckes $-ni \cos(p_i, z)$ ergibt sich, daß jene Oberflächenbelegung aequivalent ist mit einer gleichförmigen Vertheilung magnetischer Massen innerhalb desjenigen Raumes, den unsere Oberfläche bei einer kleinen Verschiebung in der positiven Richtung der Axe beschreibt. Bezeichnen wir durch δ die Größe dieser Verschiebung, so ist hiebei derjenige Raum, welcher der Fläche nur in ihrer zweiten Lage angehört, erfüllt zu denken mit positivem magnetischem Fluidum von der Dichte $\frac{ni}{\delta}$, der Raum, der ihr nur in der ersten Lage angehört mit negativem Fluidum von derselben Dichtigkeit.

Wir gehen nunmehr über zu dem zweiten Falle, in welchem der betrachtete magnetische Punkt sich im Innern der von dem Stromsystem bedeckten Oberfläche befindet.

Wenn wir an Stelle der einzelnen Ströme des Systemes wieder die entsprechenden magnetischen Doppelflächen einführen, so werden im Allgemeinen die Potentiale dieser magnetischen Doppelflächen auf den betrachteten Punkt identisch seyn mit den Potentialen der entsprechenden Ströme. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn der magnetische Punkt auf einer der Doppelflächen selbst, oder zwischen ihren beiden Blättern liegt. Es leuchtet aber ein, daß dieß bei irgend einer der magnetischen Doppelflächen mit Nothwendigkeit der Fall seyn muß. Liegt der betrachtete Punkt zwischen den beiden Blättern dieser Doppelfläche, so findet nach dem früheren zwischen dem Potential w des entsprechenden Stromes und dem Potential v der Doppelfläche die Beziehung statt:

$$w = v - 4\pi n i z$$

wo z die der z -Axe parallele Coordinate des betrachteten Punktes mit Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinaten-

system ist, dessen Anfangspunkt beliebig im Raume gelegen seyn kann, dessen z -Axe aber zu den Ebenen der Strombahnen senkrecht steht, und mit den positiven Stromnormalen gleich gerichtet ist.

Wenn aber der magnetische Punkt auf einem der Blätter der magnetischen Doppelfläche selbst liegt, so muß er gleichzeitig auch einer der Polflächen des nächstvorhergehenden oder des nächstfolgenden Stromes angehören. Bezeichnen wir in diesem Falle durch w und w' die Potentiale der beiden Ströme, auf deren gemeinsamer Polfläche der Punkt liegt, durch v und v' die Potentiale der entsprechenden magnetischen Doppelflächen, so finden nach dem früheren die Beziehungen statt:

$$w = v - 2\pi n \cdot iz$$

$$w' = v' - 2\pi n iz$$

und daher

$$w + w' = v + v' - 4\pi n iz.$$

Während also im Allgemeinen die Potentiale der Ströme identisch sind mit den Potentialen der entsprechenden magnetischen Doppelflächen, müssen wir von dem Potential derjenigen Doppelfläche, zwischen deren Blättern der betrachtete Punkt liegt, oder von der Summe der Potentiale derjenigen benachbarten Doppelflächen, deren gemeinsamer Polfläche der betrachtete Punkt angehört, die GröÙe $4\pi n iz$ in Abzug bringen, um das Potential, beziehungsweise die Summe der Potentiale der entsprechenden Ströme zu erhalten. Es ergibt sich daher, daß die Summen der Potentiale sämtlicher Ströme, d. h. das Potential des die Oberfläche spiralförmig umziehenden Stromes, an dessen Stelle jene Ströme substituirt sind, gleich ist der Summe der Potentiale sämtlicher Doppelflächen vermindert um die GröÙe $4\pi n iz$. Das Potential sämtlicher Doppelflächen zusammengekommen reducirt sich aber auf das Potential der schon im vorhergehenden eingeführten Belegung der Oberfläche mit magnetischem Fluidum, oder der räumlichen Vertheilung magnetischer Massen, welche mit jener Oberflächenbelegung gleichwerthig ist. Wir ge-

langen somit für die Wirkung des gegebenen Stromes auf einen im Innern der Oberfläche liegenden Punkt zu dem Resultat:

Das Potential, welches ein eine gegebene Oberfläche spiralförmig umziehender galvanischer Strom von der Stärke i , auf einen im Innern gelegenen Punkt ausübt, ist gleich dem Potential, welches die den Strom in seiner Wirkung auf äussere Punkte ersetzende magnetische Belegung der Oberfläche auf denselben Punkt ausübt, vermindert um die Grösse

$$4\pi n i z,$$

wo n die Zahl der auf die Längeneinheit der Axe kommenden Windungen ist, und die z -Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems gleichgerichtet angenommen wird mit der positiven Richtung der Stromnormalen.

Wir betrachten noch den Fall, daß sich im Innern der gegebenen Oberfläche nicht ein einzelner magnetischer Punkt, sondern ein magnetischer Körper von innerhalb der Gültigkeitsgränzen des Ampère'schen Satzes beliebiger Gestalt und Grösse befindet. Wir lösen diesen Körper auf in ein System einzelner magnetischer Pole, welche durch $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$ bezeichnet werden mögen. Die Werthe, welche das Potential des gegebenen Stromes in diesen Polen besitzt, seyen $w, w_1, w_2 \dots$ die entsprechenden Werthe des Potentials der magnetischen Oberflächenbelegung $v, v_1, v_2 \dots$; es finden dann folgende Beziehungen statt:

$$w = v - 4\pi n i z$$

$$w_1 = v_1 - 4\pi n i z_1$$

$$w_2 = v_2 - 4\pi n i z_2$$

$$\dots \dots \dots$$

wo unter $z, z_1, z_2 \dots$ die z -Coordinaten der Punkte $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$ zu verstehen sind. Multipliciren wir diese Gleichungen beziehungsweise mit $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$, so ergibt sich durch Addition:

$$\begin{aligned}
& \mu w + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots \\
& = \mu v + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots \\
& \quad - 4\pi n i (\mu z + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots),
\end{aligned}$$

oder

$$\Sigma \mu w = \Sigma \mu v - 4\pi n i \Sigma \mu z.$$

Es ist aber $\Sigma \mu w$ nichts anderes als das Potential, welches von dem gegebenen Strome auf das System aller Pole zusammengenommen, d. h. auf den gegebenen magnetischen Körper ausgeübt wird; ebenso ist $\Sigma \mu v$ das Potential der magnetischen Belegung der Oberfläche auf denselben Körper; endlich ist $\Sigma \mu z$ nichts anderes, als das magnetische Moment dieses Körpers in der Richtung der z -Axe oder der damit übereinstimmenden Flächenaxe. Wir erhalten somit den Satz.

Das Potential, welches ein eine gegebene Oberfläche spiralförmig umziehender Strom auf einen im Innern dieser Oberfläche befindlichen magnetischen Körper ausübt, ist gleich dem Potential der mit dem Strome in seiner Wirkung auf äußere Punkte äquivalenten Oberflächenbelegung vermindert um das Product aus $4\pi n i$ in das magnetische Moment des Körpers nach der Richtung der Flächenaxe; die Zeichen n und i haben hier dieselbe Bedeutung wie früher.

4. Wirkung eines ein Ellipsoïd spiralförmig umziehenden Stromes auf einen Punkt im Inneren des Ellipsoïdes.

Von den Anwendungen, welche die vorhergehenden Sätze gestatten, möge hier auf eine einzige näher eingegangen werden, nämlich auf den Fall, daß die gegebene Oberfläche ein Ellipsoïd ist.

Das Coordinatensystem wählen wir so, daß die Axen desselben zusammenfallen mit den Axen des Ellipsoïdes. Die durch den Mittelpunkt des Ellipsoïdes hindurchgehende Axe der Spirale, welche die Windungen des Stromes auf der Oberfläche des Ellipsoïdes beschreiben, be-

zeichnen wir durch D , so daß die Richtung von D zusammenfällt mit der positiven Richtung der Stromnormalen; die Richtungscofinusse von D seyen m , p und r . Die räumliche Vertheilung magnetischer Massen, welche mit dem gegebenen Strome in seiner Wirkung auf äußere Punkte aequivalent ist, ergibt sich dadurch, daß wir das Ellipsoid in der Richtung der Axe D verschieben um eine kleine Strecke δ , und daß wir dann den Raum, der dem Ellipsoid nur in seiner zweiten Lage angehört uns angefüllt denken mit positivem magnetischen Fluidum von der Dichtigkeit $\frac{ni}{\delta}$, den Raum, der ihm nur in der ersten Lage angehört mit negativem Fluidum von derselben Dichtigkeit.

Wir wollen zunächst das Potential der so erhaltenen räumlichen Vertheilung magnetischer Massen auf den im Innern gelegenen Punkt ermitteln. Es läßt sich dies bekanntlich in folgender Weise leicht ausführen. Das Potential der betrachteten magnetischen Massenvertheilung, welches durch v , bezeichnet werden möge, läßt sich ansehen als die Summe zweier Potentiale, von denen das eine dem Ellipsoid in seiner ursprünglichen Lage, dieses erfüllt gedacht mit negativer magnetischer Masse von der Dichtigkeit $\frac{ni}{\delta}$, das zweite dem Ellipsoid in seiner zweiten Lage, erfüllt gedacht mit positiver magnetischer Masse von derselben Dichtigkeit angehört.

Das Potential des Ellipsoides in seiner ersten Lage erfüllt gedacht mit positiver magnetischer Masse von der Einheit der Dichtigkeit wollen wir bezeichnen durch U , die Coordinaten des betrachteten Punktes seyen x , y , z . Das Potential des um δ in der Richtung D verschobenen Ellipsoides auf den Punkt x , y , z ist dann offenbar gleich dem Potential des ursprünglichen Ellipsoides auf einen Punkt, welcher gegen den Punkt x , y , z verschoben ist um $-\delta$, welcher also die Coordinaten besitzt

$$x - m\delta, y - p\delta, z - r\delta.$$

Das Potential des ursprünglichen mit der Einheit der Dichtigkeit erfüllten Ellipsoïdes auf diesen Punkt ist aber

$$U(x - m\delta, y - p\delta, z - r\delta) = U(x, y, z) \\ - \partial \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

Folglich ist auch das Potential des verschobenen und mit der Einheit der Dichtigkeit erfüllten Ellipsoïdes auf den Punkt x, y, z

$$U' = U - \partial \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

und das Potential des verschobenen Ellipsoïdes, wenn wir uns dasselbe erfüllt denken mit magnetischer Masse von der Dichtigkeit $\frac{ni}{\delta}$

$$\frac{ni}{\delta} \cdot U' = \frac{ni}{\delta} U - ni \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

Das Potential des Ellipsoïdes in seiner ursprünglichen Lage erfüllt gedacht mit negativer magnetischer Masse von der Dichtigkeit $\frac{ni}{\delta}$ ist gleich

$$- \frac{ni}{\delta} U.$$

Addiren wir diese beiden Potentiale, so ergibt sich für das Potential der Oberflächenbelegung der Werth

$$V_i = - ni \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

U bezeichnet das Potential des gegebenen mit Masse von der Einheit der Dichtigkeit erfüllt gedachten Ellipsoïdes auf den in seinem Inneren gelegenen Punkt x, y, z . Es sind somit

$$- \frac{\partial U}{\partial x}, \quad - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad - \frac{\partial U}{\partial z}$$

die Componenten der Wirkung, welche das Ellipsoïd unter dieser Voraussetzung auf den Punkt x, y, z ausübt, wenn wir uns in diesem die Einheit der Masse vorhanden denken. Diese Componenten lassen sich aber bekanntlich in folgender Form darstellen:

$$X = Mx, \quad Y = Py, \quad Z = Rz,$$

wo M , P , R gewisse von den Dimensionen des Ellipsoïdes abhängige Gröſsen darstellen. Substituiren wir diese Ausdrücke an Stelle von $-\frac{\partial U}{\partial x}$, $-\frac{\partial U}{\partial y}$, $-\frac{\partial U}{\partial z}$, in dem Ausdrucke für das Potential U der Oberflächenbelegung, so ergibt sich:

$$V_i = ni \{ Mmx + Ppy + Rrz \}.$$

Es ist somit V_i eine lineare Function der Coordinaten des betrachteten Punktes und daher ist die Wirkung der Oberflächenbelegung constant für alle im Inneren gelegenen Punkte.

Es sey nun andererseits Ω_i das Potential des gegebenen Stromes auf den betrachteten magnetischen Punkt; fällen wir von diesem eine Senkrechte auf die Flächenaxe D , so schneidet diese auf D , vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes an gerechnet, eine Strecke ab, welche durch d bezeichnet werden möge. Zwischen den Potentialen Ω_i und V_i findet dann die Beziehung statt,

$$\Omega_i = V_i - 4\pi n i d.$$

Es ist aber

$$d = mx + py + rz.$$

Setzen wir diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung ein und substituiren wir gleichzeitig für V_i den oben gegebenen Ausdruck, so ergibt sich

$$\Omega_i = ni \{ (M - 4\pi) mx + (P - 4\pi) py + (R - 4\pi) rz \}.$$

Es ist somit auch Ω_i eine lineare Function der Coordinaten und daher auch die Wirkung des gegebenen Stromes auf alle Punkte im Innern constant.

Wir haben somit den Satz:

Ein spiralförmig von einem galvanischen Strom umzogenes Ellipsoïd übt auf einen in seinem Inneren befindlichen magnetischen Punkt eine constante von der Lage desselben unabhängige Wirkung aus. Das Potential dieser Wirkung hat den Werth:

$$\Omega_i = ni \{ (M - 4\pi) mx + (P - 4\pi) py + (R - 4\pi) rz \},$$

wo x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punktes mit Bezug auf die Hauptaxen des Ellipsoides, n die Zahl der Windungen, welche auf die Längeneinheit der Axe der Spirale kommen, m, p und r die Richtungs cosinusse dieser Axe bezeichnen. Endlich sind M, P und R gewisse von den Dimensionen des Ellipsoides abhängige Constante, welche für ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegeben ist, dargestellt sind durch die elliptischen Integrale:

$$M = \frac{4\pi bc}{a^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)u^2} \sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)u^2}}$$

$$P = \frac{4\pi ca}{b^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right)u^2} \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)u^2}}$$

$$R = \frac{4\pi ab}{c^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)u^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right)u^2}}$$

Die Uebereinstimmung der im dritten Abschnitt gegebenen Oberflächenbelegung mit der ebendasselbst angeführten räumlichen Vertheilung magnetischer Massen dürfte allgemein bekannt seyn; mir wurde dieselbe vor mehreren Jahren von Prof. Carl Neumann mitgetheilt. Der im letzten Abschnitte für das Ellipsoid entwickelte Satz ist, wie ich von Prof. Heinrich Weber erfuhr, bereits von Neumann in Königsberg gefunden; da sich derselbe aber als eine sehr einfache Anwendung des von mir gegebenen allgemeinen Satzes ergibt, und so viel mir bekannt wurde, nirgends veröffentlicht ist, glaubte ich denselben nicht unterdrücken zu sollen.

Göttingen im November 1871.