

## 23. Über mechanische Quadraturen.

(Von Herrn Th. Clausen zu München.)

Die von Laplace *Méc. céleste* T. IV. p. 207. gegebene Formel veranlaßte mich den allgemeinen Ausdruck für die darin enthaltenen Coëfficienten zu suchen. Man gelangt dazu auf folgendem Wege. Denkt man sich die gegebene Function in eine Reihe Glieder von der Form  $H(e^{hx} - e^{-hx})$  entwickelt, so sieht man leicht, daß die Interpolationsreihe, die allgemein für jedes Glied von dieser Form gilt, ebenfalls für die Function gelte, und daß man von den constanten Coëfficienten abstrahiren könne. Es sei demnach die Reihe Werthe von  $y_x$ , für  $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  folgendermaßen geordnet, mit ihren successiven Differenzen:

$x$	$y_x$	$\Delta \cdot y_x$	$\Delta^2 \cdot y_x$	$\Delta^3 \cdot y_x$
0	1 — 1			
1	$e^h - e^{-h}$	$(e^h - 1)(1 + e^{-h})$	$(e^h - 1)^2(1 - e^{-2h})$	
2	$e^{2h} - e^{-2h}$	$(e^h - 1)(e^h + e^{-2h})$	$(e^h - 1)^2(e^h - e^{-3h})$	$(e^h - 1)^3(1 + e^{-3h})$
3	$e^{3h} - e^{-3h}$	$(e^h - 1)(e^{2h} + e^{-3h})$		
⋮				
n-1	$e^{(n-1)h} - e^{-(n-1)h}$	$(e^h - 1)(e^{(n-2)h} + e^{-(n-1)h})$	$(e^h - 1)^2(e^{(n-2)h} - e^{-nh})$	$(e^h - 1)^3(e^{(n-3)h} + e^{-nh})$
n	$e^{nh} - e^{-nh}$	$(e^h - 1)(e^{(n-1)h} + e^{-nh})$		

Für diesen Werth von  $y_x$  hat man also:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 - \Delta y_{n-1} &= -(1 - e^{-h})(e^{nh} - 1) + (1 - e^h)(e^{-nh} - 1), \\ \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{n-2} &= + (1 - e^{-h})^2(e^{nh} - 1) - (1 - e^h)^2(e^{-nh} - 1), \\ \Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_{n-3} &= - (1 - e^{-h})^3(e^{nh} - 1) + (1 - e^h)^3(e^{-nh} - 1), \\ \Delta^4 y_0 + \Delta^4 y_{n-4} &= + (1 - e^{-h})^4(e^{nh} - 1) - (1 - e^h)^4(e^{-nh} - 1), \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Nun ist aber  $\int_0^n (e^{hx} - e^{-hx}) dx = \frac{1}{h}(e^{nh} - 1) + \frac{1}{h}(e^{-nh} - 1)$ ; und

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n &\text{ nach einer leichten Reduction} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^h + 1}{e^h - 1}(e^{nh} - 1) - \frac{1}{2} \frac{e^{-h} + 1}{e^{-h} - 1}(e^{-nh} - 1).\end{aligned}$$

Es ist also, wenn man setzt:

Crelle's Journal d. M. VI. Bd. 3. Hft.

$$\begin{aligned} \int_0^n y_x dx &= \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \\ &\quad + A_1 (\Delta y_0 - \Delta y_{n-1}) \\ &\quad + A_2 (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{n-2}) \\ &\quad + A_3 (\Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_{n-3}) \\ &\quad + A_4 (\Delta^4 y_0 + \Delta^4 y_{n-4}) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

gleichfalls

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \frac{e^h + 1}{e^h - 1} - A_1 (1 - e^{-h}) + A_2 (1 - e^{-h})^2 - A_3 (1 - e^{-h})^3 + A_4 (1 - e^{-h})^4 - \text{etc.},$$

oder wenn man  $1 - e^{-h} = z$  setzt:

$$\frac{1}{-\log \text{nat} (1 - z)} = \frac{1}{2} \frac{2 - z}{z} - A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + A_4 z^4 - \text{etc.},$$

oder endlich:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{5}z^4 + \dots} = 1 - \frac{1}{2}z - A_1 z^2 + A_2 z^3 - A_3 z^4 + A_4 z^5 - \dots$$

Außer den fünf von Laplace a. a. O. gegebenen Coëfficienten habe ich selbst noch folgende nach dieser Formel, und zur Sicherheit gegen Rechnungsfehler nach der Formel

$$\pm A_n = \int_0^1 \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \dots x - n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} dx$$

berechnet.

$$\begin{array}{ll} A_1 = + \frac{1}{12}; & A_7 = + \frac{33953}{3628800}; \\ A_2 = - \frac{1}{24}; & A_8 = - \frac{8183}{1036800}; \\ A_3 = + \frac{19}{720}; & A_9 = + \frac{3250433}{479001600}; \\ A_4 = - \frac{3}{160}; & A_{10} = - \frac{4671}{788480}; \\ A_5 = + \frac{863}{60480}; & A_{11} = + \frac{13695779093}{2615348736000}; \\ A_6 = - \frac{275}{24192}; & A_{12} = - \frac{2224234463}{475517952000}. \end{array}$$

Zwischen den Grenzen  $x = -\frac{1}{2}$  und  $n + \frac{1}{2}$  ist  $\int e^{hx} - e^{-hx}$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}h}}{h} (e^{nh} - 1) - \frac{e^{-\frac{1}{2}h}}{-h} (e^{-nh} - 1)$$

und

$$y_0 + y_1 \dots + y_{n-1} + y_n = \frac{e^h}{e^h - 1} (e^{nh} - 1) - \frac{e^{-h}}{e^{-h} - 1} (e^{-nh} - 1).$$

Wenn man also

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} y_x \partial x &= y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n \\
 &\quad + B_1(\Delta y_0 - \Delta y_{n-1}) \\
 &\quad + B_2(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{n-2}) \\
 &\quad + B_3(\Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_{n-3}) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{e^{\frac{1}{2}h}}{h} = \frac{e^h}{e^h - 1} - B_1(1 - e^{-h}) + B_2(1 - e^{-h})^2 - B_3(1 - e^{-h})^3 + B_4(1 - e^{-h})^4 - \text{etc.},$$

oder wenn man gleichfalls hier  $1 - e^{-h} = z$  setzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{-\mathcal{V}(1-z) \log \text{nat}(1-z)} &= \frac{1}{z} - B_1 z + B_2 z^2 - B_3 z^3 + B_4 z^4 - B_5 z^5 + \dots, \\
 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 \\
 \frac{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 + \text{etc.}} &= 1 - B_1 z^2 + B_2 z^3 - B_3 z^4 + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Die numerischen Werthe dieser Coëfficienten, gleichfalls auf zwei Arten berechnet, habe ich gefunden:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{1}{24}; & B_7 &= -\frac{13528301}{464486400}; \\
 B_2 &= +\frac{1}{24}; & B_8 &= +\frac{3194621}{116121600}; \\
 B_3 &= -\frac{223}{5760}; & B_9 &= -\frac{3201305803}{122624409600}; \\
 B_4 &= +\frac{103}{2880}; & B_{10} &= +\frac{122002655}{4904976384}; \\
 B_5 &= -\frac{32119}{967680}; & B_{11} &= -\frac{63687408047173}{2678117105664000}; \\
 B_6 &= +\frac{1111}{35840}; & B_{12} &= +\frac{10179163217133}{446352850944000}.
 \end{aligned}$$