

# Sur l'inversion de certaines séries.

(Par ERNEST CESÀRO, étudiant, à Torre Annunziata.)

---

1. En 1851, dans le *Journal de Liouville*, M. TCHÉBYCHEW s'est occupé du problème suivant: « Deux fonctions étant liées par une équation de l'une de ces trois formes:

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + \dots,$$

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + \dots,$$

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - \dots,$$

*exprimer la fonction  $f$  moyennant la fonction  $F$  ».*

En résolvant cette question, M. TCHÉBYCHEW est parvenu à des résultats fort curieux, qui sont de la plus grande utilité pour l'étude des faits arithmétiques de l'infini: c'est ce qui nous engage à reprendre le problème posé par M. TCHÉBYCHEW, en nous élevant à un point de vue tellement général, qu'il nous soit permis de découvrir le lien existant entre les recherches que l'on vient de rappeler et celles que le même savant a publiées, une année après, en collaboration avec M. POLIGNAC, et qui sont restées célèbres par leur application à l'étude de la *répartition des nombres premiers*.

2. Imaginons une suite de fonctions

$$\varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_2(x), \quad \varepsilon_3(x), \quad \varepsilon_4(x), \dots,$$

telles que l'on ait

$$\varepsilon_\alpha[\varepsilon_\beta(x)] = \varepsilon_{\alpha\beta}(x), \tag{1}$$

pour tout système de valeurs, entières et positives, de  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui exige, avant tout, que  $\varepsilon_1(x)$  coïncide constamment avec  $x$ . Soient

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)f[\varepsilon_n(x)], \quad H(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} h(n)f[\varepsilon_n(x)], \tag{2}$$

et évaluons la somme

$$h(1)G[\varepsilon_1(x)] + h(2)G[\varepsilon_2(x)] + h(3)G[\varepsilon_3(x)] + \dots$$

Il est évident que  $f[\varepsilon_n(x)]$  se trouve seulement dans

$$G[\varepsilon_a(x)], \quad G[\varepsilon_b(x)], \quad G[\varepsilon_c(x)], \dots,$$

où  $a, b, c, \dots$  représentent *tous les diviseurs* de  $n$ : ses coefficients, dans chacune de ces sommes, sont respectivement  $g\left(\frac{n}{a}\right), g\left(\frac{n}{b}\right), g\left(\frac{n}{c}\right), \dots$ : son coefficient total, dans la somme considérée, est donc

$$h(a)g\left(\frac{n}{a}\right) + h(b)g\left(\frac{n}{b}\right) + h(c)g\left(\frac{n}{c}\right) + \dots = F(n). \quad (3)$$

Conséquemment

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} h(n)G[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n)f[\varepsilon_n(x)]. \quad (4)$$

Si l'on observe que l'échange des lettres  $g$  et  $h$ , dans l'égalité (3), n'altère pas la fonction  $F$ , on peut écrire aussi

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)H[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n)f[\varepsilon_n(x)]. \quad (5)$$

3. Veut-on opérer l'*inversion* des séries (2), c'est-à-dire exprimer la fonction  $f$  moyennant  $G$  ou  $H$ ? Les formules (4) et (5) résolvent la question, dès que l'on prend  $F(x) = 1$ , pour  $x = 1$ , et  $F(x) = 0$ , en général. On obtient alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} h(n)G[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)H[\varepsilon_n(x)], \quad (6)$$

les fonctions  $g$  et  $h$  dépendant l'une de l'autre par la relation

$$h(a)g\left(\frac{n}{a}\right) + h(b)g\left(\frac{n}{b}\right) + h(c)g\left(\frac{n}{c}\right) + \dots = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 1 \\ 0, & \text{en général.} \end{cases} \quad (7)$$

On sait que l'on peut prendre

$$g(x) = 1, \quad h(x) = \mu(x).$$

Plus généralement, si la fonction  $g$  satisfait à la condition

$$g(x)g(y) = g(xy), \quad (8)$$

on doit prendre  $h(x) = g(x)\mu(x)$ . D'après cela, l'inversion de la série

$$G(x) = g(1)f[\varepsilon_1(x)] + g(2)f[\varepsilon_2(x)] + g(3)f[\varepsilon_3(x)] + \dots \quad (9)$$

est immédiatement opérée par l'égalité

$$f(x) = \mu(1)g(1)G[\varepsilon_1(x)] + \mu(2)g(2)G[\varepsilon_2(x)] + \mu(3)g(3)G[\varepsilon_3(x)] + \dots, \quad (10)$$

pourvu que la fonction  $g$  vérifie (8).

4. Les fonctions  $\varepsilon$  jouiront de la propriété (1), si nous prenons  $\varepsilon_n(x) = nx$ . Nous aurons alors le couple de séries inverses

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)f(nx), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n)g(n)G(nx), \quad (11)$$

qui, en particulier, pour ces trois formes de  $g(x)$ :

$$1, \quad \frac{1}{2} \{1 - (-1)^x\}, \quad \sin \frac{\pi x}{2}, \quad (12)$$

donne les trois couples que voici:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f(nx), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n)G(nx), \quad (13)$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f\{(2n-1)x\}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(2n-1)G\{(2n-1)x\}, \quad (14)$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} f\{(2n-1)x\}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \mu(2n-1)G\{(2n-1)x\}. \quad (15)$$

Ceux-ci sont les seuls que M. TCHÉBYCHEW ait considérés dans sa *Note*. Nous ne tarderons pas à en faire d'intéressantes applications.

5. Le cas où la fonction  $g$  satisfait à (8) est celui qui se présente ordinairement dans les applications, et nous avons vu qu'il suffit pour retrouver les trois exemples généraux, traités par M. TCHÉBYCHEW. Il est cependant utile de faire observer que les cas où la fonction  $g$  est quelconque peuvent être ramenés au précédent. Pour ne pas trop compliquer nos formules, nous nous bornerons à opérer l'inversion de la série

$$G(x) = f(x) - f(2x) + f(3x) - f(4x) + \dots$$

Ici, la fonction  $g(x)$  n'est autre que  $(-1)^{x+1}$ , de sorte qu'elle ne jouit pas de la propriété (8); mais nous trouvons sans peine

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} 2^{n-1} G(2^{n-1}x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots;$$

puis, en vertu de (13),

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{j=1}^{j=\infty} 2^{j-1} \mu(i) G(2^{j-1}ix). \quad (16)$$

Pour mettre le second membre sous sa forme normale, il faut chercher toutes les solutions *entières et positives* de l'équation  $i \cdot 2^{j-1} = n$ . On trouve ainsi que le coefficient de  $G(nx)$  est

$$2^{e_n} \mu(\partial_n) + 2^{e_n-1} \mu(2\partial_n) + \dots + \mu(2^{e_n} \partial_n),$$

où  $\partial_n$  est le *plus grand diviseur impair* de  $n$ , tandis que  $e_n$  représente l'*exposant de la plus haute puissance de 2, qui divise  $n$* . Dans la dernière somme, tous les termes qui suivent les deux premiers sont nuls, parceque les nombres soumis au signe  $\mu$  admettent des facteurs carrés. Le coefficient de  $G(nx)$  est donc

$$2^{e_n} \mu(\partial_n) + 2^{e_n-1} \mu(2\partial_n) = 2^{e_n-1} \mu(\partial_n),$$

pourvu que  $n$  soit *pair*. Si  $n$  est *impair*, le coefficient cherché est  $\mu(n)$ . D'après cela, la formule (16) devient

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \{3 + (-1)^{n+1}\} 2^{e_n-2} \mu(\partial_n) G(nx). \quad (17)$$

6. On a une application de la formule (17), en prenant la série

$$\pi \mathfrak{E}(x) = \frac{\sin 2\pi x}{1} - \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} - \frac{\sin 8\pi x}{4} + \dots,$$

où  $\mathfrak{E}(x)$  représente l'*excès de  $x$  sur le plus proche entier*: si  $x$  est à égale distance de deux entiers consécutifs, on doit faire  $\mathfrak{E}(x) = 0$ . La formule (17) donne immédiatement

$$\sin 2\pi x = \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{4} \cdot \frac{\mu(\partial_n)}{\partial_n} \mathfrak{E}(nx).$$

De même, si  $f(x)$  jouit de la propriété (8), on trouve

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \{3 + (-1)^{n+1}\} 2^{e_n} \mu(\partial_n) f(n) = \frac{4}{f(1) - f(2) + f(3) - \dots}.$$

Par exemple:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{4} \cdot \frac{\mu(\partial_n)}{\partial_n} = \frac{1}{\log 2}.$$

7. Naturellement, les *séries de Fourier* sont celles qui donnent lieu aux applications les plus curieuses. Ainsi, on a

$$\frac{\pi^2}{8} \left\{ 1 - 4 \mathfrak{E}(x) \right\} = \frac{\cos 2\pi x}{1^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \frac{\cos 10\pi x}{5^2} + \dots, \quad (18)$$

ou bien, après une transformation simple,

$$\frac{\pi^2}{4} \mathfrak{E}(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{1^2} + \frac{\sin^2 3 \pi x}{3^2} + \frac{\sin^2 5 \pi x}{5^2} + \dots \quad (19)$$

Comme d'habitude, nous représentons par  $\mathfrak{E}(x)$  la *plus petite quantité, qu'il faut ajouter ou retrancher à  $x$ , pour obtenir un nombre entier*. Cela étant, on trouve, en vertu de (14),

$$\frac{\mu(1)\mathfrak{E}(x)}{1^2} + \frac{\mu(3)\mathfrak{E}(3x)}{3^2} + \frac{\mu(5)\mathfrak{E}(5x)}{5^2} + \dots = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \pi x.$$

Cette formule en engendre d'autres. Remarquons, en effet, que, si l'on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)f(nx)}{n^r}, \quad s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(2n-1)f\{(2n-1)x\}}{(2n-1)^r},$$

on a

$$S(x) = s(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(2n)f(2nx)}{(2n)^r}.$$

Or, il est évident que  $\mu(2n)$  est 0 ou  $-\mu(n)$ , suivant que  $n$  est *pair* ou *im-pair*. Par suite:

$$S(x) = s(x) - \frac{s(2x)}{2^r}.$$

Si, par exemple, on fait

$$r = 2, \quad f(x) = \mathfrak{E}(x),$$

on a

$$s(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \pi x, \quad S(x) = \frac{4}{\pi^2} \left( \sin^2 \pi x - \frac{1}{4} \sin^2 2\pi x \right) = \frac{4}{\pi^2} \sin^4 \pi x.$$

Conséquemment

$$\frac{\mu(1)\mathfrak{E}(x)}{1^2} + \frac{\mu(2)\mathfrak{E}(2x)}{2^2} + \frac{\mu(3)\mathfrak{E}(3x)}{3^2} + \dots = \frac{4}{\pi^2} \sin^4 \pi x.$$

L'inversion de la dernière série, au moyen de (13), donne encore

$$\frac{\pi^2}{4} \mathfrak{E}(x) = \frac{\sin^4 \pi x}{1^2} + \frac{\sin^4 2 \pi x}{2^2} + \frac{\sin^4 3 \pi x}{3^2} + \dots$$

Ce résultat est, d'ailleurs, facile à déduire directement de la formule (19).

8. Soit encore  $f(x) = q^x$ , de sorte que, pour mod.  $q < 1$ ,  $G(x)$  prend une de ces formes:

$$\frac{q^x}{1 - q^x}, \quad \frac{q^x}{1 - q^{2x}}, \quad \frac{q^x}{1 + q^{2x}}.$$

On a, d'après (13), (14), (15), et pour  $x = 1$ ,

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \mu(n)}{1 - q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1} \mu(2n-1)}{1 - q^{4n-2}}, = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{2n-1} \mu(2n-1)}{1 + q^{4n-2}}.$$

En d'autres termes, *chacune des séries*

$$\begin{aligned} & \frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^6}{1-q^6} - \frac{q^7}{1-q^7} + \frac{q^{10}}{1-q^{10}} - \dots, \\ & \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} - \frac{q^{11}}{1-q^{22}} - \frac{q^{13}}{1-q^{26}} + \frac{q^{15}}{1-q^{30}} - \dots, \\ & \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^3}{1+q^6} - \frac{q^5}{1+q^{10}} + \frac{q^7}{1+q^{14}} + \frac{q^{11}}{1+q^{22}} - \frac{q^{13}}{1+q^{26}} - \frac{q^{15}}{1+q^{30}} - \dots, \end{aligned}$$

est égale à  $q$ .

9. Reprenons les séries (11). Pour les appliquer, nous pouvons utiliser tout développement tel que

$$\Psi(x) = x\psi(1)g(1) + x^2\psi(2)g(2) + x^3\psi(3)g(3) + \dots,$$

où la fonction  $\psi$  jouit, comme  $g$ , de la propriété (8). Ce développement peut être écrit comme il suit:

$$\psi(x)\Psi(q^x) = g(1)\psi(x)q^x + g(2)\psi(2x)q^{2x} + g(3)\psi(3x)q^{3x} + \dots,$$

de sorte que nous pouvons prendre

$$G(x) = \psi(x)\Psi(q^x), \quad f(x) = q^x\psi(x).$$

Il en résulte

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\psi(n)g(n)\Psi(q^n). \quad (20)$$

Les exemples du paragraphe précédent répondent au cas de  $\psi(x) = 1$ . Faisons encore  $\psi(x) = \frac{1}{x}$ . Les formes de  $\Psi(x)$ , correspondant aux formes (12) de  $g(x)$ , sont

$$\log \frac{1}{1-x}, \quad \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \operatorname{arctg} x.$$

Par suite:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \cdot \log \frac{1}{1-q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(2n-1)}{2n-1} \log \sqrt{\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \mu(2n-1)}{2n-1} \operatorname{arctg} q^n. \end{aligned}$$

Sous une autre forme:

$$e^{-q} = \frac{(1-q)(1-q^6)^{\frac{1}{6}}(1-q^{10})^{\frac{1}{10}}(1-q^{14})^{\frac{1}{14}}(1-q^{15})^{\frac{1}{15}}\dots}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}(1-q^3)^{\frac{1}{3}}(1-q^5)^{\frac{1}{5}}(1-q^7)^{\frac{1}{7}}(1-q^{11})^{\frac{1}{11}}\dots},$$

$$e^{2q} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^3}{1+q^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-q^5}{1+q^5}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1-q^7}{1+q^7}\right)^{\frac{1}{7}}\left(\frac{1-q^{11}}{1+q^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}\left(\frac{1-q^{13}}{1+q^{13}}\right)^{\frac{1}{13}}\left(\frac{1+q^{15}}{1-q^{15}}\right)^{\frac{1}{15}}\dots,$$

$$q = \operatorname{arctg} q + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} q^3 - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} q^5 + \frac{1}{7} \operatorname{arctg} q^7 +$$

$$+ \frac{1}{11} \operatorname{arctg} q^{11} - \frac{1}{13} \operatorname{arctg} q^{13} - \dots$$

10. Soient

$$s_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \dots, \quad \sigma_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \dots:$$

la seconde somme est étendue à tous les nombres *premiers*, la première à tous les nombres entiers. Il est évident que

$$s_m = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^m}} \dots,$$

d'où, en prenant les logarithmes naturels, et en développant,

$$\log s_m = \sigma_m + \frac{1}{2} \sigma_{2m} + \frac{1}{3} \sigma_{3m} + \dots$$

Par suite, en vertu de (13), nous avons

$$\sigma_m = \mu(1) \log s_m + \frac{\mu(2)}{2} \log s_{2m} + \frac{\mu(3)}{3} \log s_{3m} + \dots$$

Par exemple, la somme des inverses des carrés de tous les nombres premiers est

$$\log \left\{ \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\sqrt{90}}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{954}}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt[5]{93555}}{\pi^2} \dots \right\} = 0,45224\dots$$

M. TCHÉBYCHEW s'occupe, dans sa *Note*, de quelques autres séries du même genre. Il trouve, par exemple,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = 0,33498\dots,$$

chaque nombre étant pris avec le signe  $+$  ou le signe  $-$ , suivant qu'il est de la forme  $4k-1$  ou  $4k+1$ .

11. Jusqu'ici nous avons supposé constamment  $\varepsilon_n(x) = nx$ ; mais l'on est libre de prendre, pour  $\varepsilon_n(x)$ , toute fonction jouissant de la propriété (1). Voyons, par exemple, s'il est possible d'avoir

$$\varepsilon_n(x) = \frac{x U(n)}{1 - x V(n)},$$

en disposant convenablement des fonctions  $U$  et  $V$ . Pour satisfaire à (1), il faut que

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha\beta), \quad V(\alpha)U(\beta) + V(\beta) = V(\alpha\beta).$$

Si la fonction  $U(x)$  n'est pas constamment égale à l'unité, la seconde condition nous oblige à prendre

$$V(x) = k \{U(x) - 1\},$$

$k$  étant une constante. Si  $U(x) = 1$ , on doit faire  $V(x) = k \log x$ . D'après cela, on trouve, par exemple, que la série

$$F(x) = f(x) + f\left(\frac{2x}{1-x}\right) + f\left(\frac{3x}{1-2x}\right) + f\left(\frac{4x}{1-3x}\right) + f\left(\frac{5x}{1-4x}\right) + \dots$$

a pour inverse la série

$$f(x) = F(x) - F\left(\frac{2x}{1-x}\right) - F\left(\frac{3x}{1-2x}\right) - F\left(\frac{5x}{1-4x}\right) + F\left(\frac{6x}{1-5x}\right) - \dots$$

De même, la série

$$\begin{aligned} F(x) = f(x) + f\left(\frac{x}{1-x \log 2}\right) + f\left(\frac{x}{1-x \log 3}\right) + \\ + f\left(\frac{x}{1-x \log 4}\right) + f\left(\frac{x}{1-x \log 5}\right) + \dots, \end{aligned}$$

a pour inverse

$$\begin{aligned} f(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{1-x \log 2}\right) - F\left(\frac{x}{1-x \log 3}\right) - \\ - F\left(\frac{x}{1-x \log 5}\right) + F\left(\frac{x}{1-x \log 6}\right) - \dots \end{aligned}$$

Nous laisserons de côté les applications.

12. Une autre forme importante de  $\varepsilon_n(x)$  est  $\frac{x}{n}$ . On a, par exemple, le couple de séries inverses

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f\left(\frac{x}{n}\right), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right). \quad (21)$$



Ainsi, l'identité de Tchébychew et Polignac

$$\chi\left[\frac{x}{1}\right] + \chi\left[\frac{x}{2}\right] + \chi\left[\frac{x}{3}\right] + \cdots = \log \{[x]!\}, \quad (22)$$

permet de prendre, simultanément,

$$f(x) = \chi[x], \quad F(x) = \log \{[x]!\}.$$

Donc, d'après (21),

$$\chi[x] = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n) \log \left\{ \left[ \frac{x}{n} \right]! \right\}.$$

Si  $x$  est un nombre entier  $n$ , on voit que le plus petit multiple commun des  $n$  premiers nombres naturels est

$$e^{\chi(n)} = \frac{\left[ \frac{n}{1} \right]! \left[ \frac{n}{6} \right]! \left[ \frac{n}{10} \right]! \left[ \frac{n}{14} \right]! \left[ \frac{n}{15} \right]! \cdots}{\left[ \frac{n}{2} \right]! \left[ \frac{n}{3} \right]! \left[ \frac{n}{5} \right]! \left[ \frac{n}{7} \right]! \left[ \frac{n}{11} \right]! \cdots}.$$

On a, de même, le couple de séries inverses

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda(n) f\left(\frac{x}{n}\right), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda(n) \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right). \quad (23)$$

Or, d'après une formule connue,

$$\left[ \frac{x}{1} \right] \lambda(1) + \left[ \frac{x}{2} \right] \lambda(2) + \left[ \frac{x}{3} \right] \lambda(3) + \cdots = [\sqrt{x}],$$

d'où il résulte que l'on peut prendre simultanément

$$f(x) = [x], \quad F(x) = [\sqrt{x}].$$

Par suite, en vertu de (23),

$$[x] = [\sqrt{x}] + \left[ \sqrt{\frac{x}{2}} \right] + \left[ \sqrt{\frac{x}{3}} \right] + \left[ \sqrt{\frac{x}{5}} \right] + \left[ \sqrt{\frac{x}{6}} \right] + \cdots$$

Dans le second membre, les nombres 1, 2, 3, 5, 6, ... sont tous les nombres dépourvus de facteurs carrés. Enfin, dans le couple

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f\left(\frac{x}{2n-1}\right), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(2n-1) F\left(\frac{x}{2n-1}\right),$$

faisons  $f(x) = \log\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)$ . Il vient d'abord

$$F(x) = \log\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \cdots = \log \cdot \cos x;$$

puis:

$$1 - \frac{4x^2}{\pi^2} = \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{15} \cdot \cos \frac{x}{21} \cdot \cos \frac{x}{33} \cdot \cos \frac{x}{35} \cdots}{\cos \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{5} \cdot \cos \frac{x}{7} \cdot \cos \frac{x}{11} \cdot \cos \frac{x}{13} \cdots}.$$

13. Actuellement, il nous convient d'introduire dans nos calculs une nouvelle fonction, dont l'importance ne tardera pas à se faire sentir dans la suite de ces recherches. Supposons que le nombre  $n$  soit décomposé en ses facteurs premiers:

$$n = u^\alpha v^\beta w^\gamma \dots$$

La fonction que nous voulons employer est

$$j(n) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\dots} \cdot \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}.$$

En particulier, nous supposons  $j(1) = 1$ . Observons que

$$j\left(\frac{n}{u}\right) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\dots-1} \cdot \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots - 1)!}{(\alpha - 1)! \beta! \gamma! \dots} = - \frac{\alpha j(n)}{\alpha + \beta + \gamma + \dots},$$

d'où il résulte

$$j\left(\frac{n}{u}\right) + j\left(\frac{n}{v}\right) + j\left(\frac{n}{w}\right) + \dots = -j(n).$$

D'après cela, nous pouvons, dans (7), supposer

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ est premier} \\ 0, & \text{en général} \end{cases}, \quad g(x) = j(x).$$

Les formules (6) deviennent

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} j(n) H[\varepsilon_n(x)] = \sum_p G[\varepsilon_p(x)];$$

la dernière somme est étendue à tous les nombres premiers, y compris l'unité, et les fonctions  $G$ ,  $H$ , sont définies par les égalités

$$H(x) = \sum_p f[\varepsilon_p(x)], \quad G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} j(n) f[\varepsilon_n(x)].$$

Il en résulte, par exemple, que, pour opérer l'inversion de la série

$$G(x) = j(1)f(x) + j(2)f(2x) + j(3)f(3x) + j(4)f(4x) + \dots,$$

on a la formule

$$f(x) = G(x) + G(2x) + G(3x) + G(5x) + G(7x) + G(11x) + \dots$$

14. On utiliserait de la même manière le cas de  $\varepsilon_n(x) = x^n$ , ce qui nous reconduirait à quelques-unes des formules données précédemment. Une identité générale, qui demande pour  $\varepsilon_n(x)$  l'emploi simultané des formes  $nx$  et  $x^n$ , a été donnée, en 1878, au *Congrès de Paris*, par M. TCHÉBYCHEW. Ayant posé successivement

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f(nx), \quad F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} G(x^n), \quad (24)$$

on a :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f(n) \log n = \sum_p F(p) \log p. \quad (25)$$

Cette formule, pour ainsi dire intuitive, est une féconde source de résultats curieux. En particulier, elle renferme la formule (22), pour  $f(x) = 1$ , si  $x \leq N$ , et  $f(x) = 0$ , si  $x > N$ , comme l'a fait observer M. TCHÉBYCHEW. On sait aussi que M. TCHÉBYCHEW se sert de la même formule pour démontrer que *les nombres premiers, de la forme  $4k + 1$ , sont infiniment plus nombreux que ceux de la forme  $4k - 1$* . Si l'on se donne  $f(x)$ , la détermination de  $F(x)$  peut se faire de plusieurs manières, parceque cette fonction se présente sous la forme d'une double série :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{j=1}^{j=\infty} f(ixj).$$

On peut se donner  $F(x)$ , et alors la détermination de  $f(x)$  s'effectuera par les formules d'inversion, démontrées dans cette *Note*. En effet, l'inversion des séries (24), au moyen de (13) et de la formule analogue, relative au cas de  $\varepsilon_n(x) = x^n$ , donne

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n) F(x^n), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n) G(nx).$$

Ces formules permettent d'exprimer la fonction  $f$ , au moyen de  $F$ , par l'élimination de la fonction auxiliaire  $G$ .

15. Dans le t. IV de la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, M. CATALAN a démontré fort simplement la formule (25). Nous tenons à faire voir que cette égalité est un cas extrêmement particulier de notre formule (4). Imaginons, à cet effet, deux fonctions quelconques,  $f$  et  $g$ , la dernière étant douée de la propriété (8). D'après (3), et en tenant compte des propriétés de la fonction  $\nu$ , nous pouvons supposer

$$h(x) = g(x)\nu(x), \quad F(x) = g(x)\log x.$$

La formule (4) devient

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) \nu(n) G[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) \log n f[\varepsilon_n(x)].$$

Nous prendrons  $\varepsilon_n(x) = nx$ , bien que les développements qui suivent subsistent pour toute forme de  $\varepsilon_n(x)$ , satisfaisant à (1). Réunissons, dans le premier membre, les termes de rang  $p, p^2, p^3, \dots$ ,  $p$  étant *premier*. Pour ces termes, la fonction  $\nu$  est égale, par définition, à  $\log p$ : le coefficient de  $\log p$ , dans le second membre, est donc

$$\mathfrak{f}(p, x) = g(p)G(px) + g(p^2)G(p^2x) + g(p^3)G(p^3x) + \dots,$$

où, d'après (2),

$$G(x) = g(1)f(x) + g(2)f(2x) + g(3)f(3x) + \dots \quad (26)$$

Conséquemment:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)f(nx)\log n = \sum_p \mathfrak{f}(p, x)\log p.$$

Pour  $g(x) = 1$ , et  $x = 1$ , on obtient la formule (25).

16. Pour finir, nous appellerons l'attention du lecteur sur l'excessive fécondité de la formule (4). Tout ce qui a été dit jusqu'à présent repose, en effet, sur cette relation, et se rapporte à *deux* formes, très-particulières, de  $F(x)$ . Pour chaque nouvelle forme de  $F(x)$ , on obtient une infinité d'autres résultats. Ainsi, soit  $h(x) = g(x)\lambda(x)$ , où  $g(x)$  satisfait à (8). La fonction  $F(x)$ , généralement nulle, coïncide avec  $g(x)$ , lorsque  $x$  est un *carré*. Cela étant, nous trouvons que, si l'on définit la fonction  $G$  par l'égalité (26), on a:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda(n)g(n)G(nx) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n^2)f(n^2x).$$

Par exemple, pour

$$g(x) = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}, \quad f(x) = q^x,$$

et  $x = 1$ , on trouve que la *série elliptique*  $q + q^9 + q^{25} + \dots$  équivaut à la *série*

$$\operatorname{arctg} q + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} q^3 - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} q^5 + \frac{1}{7} \operatorname{arctg} q^7 + \frac{1}{9} \operatorname{arctg} q^9 + \frac{1}{11} \operatorname{arctg} q^{11} - \dots$$

De même, pour

$$g(x) = 1, \quad f(x) = \frac{\sin^4 \pi x}{x^2},$$

on trouve que la série

$$\left(\frac{\sin \pi x}{1}\right)^4 + \left(\frac{\sin 4 \pi x}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sin 9 \pi x}{3}\right)^4 + \left(\frac{\sin 16 \pi x}{4}\right)^4 + \left(\frac{\sin 25 \pi x}{5}\right)^4 + \dots,$$

multipliée par  $\frac{4}{\pi^2}$ , équivaut à

FINE DEL TOMO XIII.º (SERIE II.ª)

$$\frac{\mathfrak{C}(x)}{1} - \frac{\mathfrak{C}(2x)}{4} - \frac{\mathfrak{C}(3x)}{9} + \frac{\mathfrak{C}(4x)}{16} - \frac{\mathfrak{C}(5x)}{25} + \frac{\mathfrak{C}(6x)}{36} - \frac{\mathfrak{C}(7x)}{49} - \dots$$

---

FINE DEL TOMO XIII.º (SERIE II.ª)