Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814.

Mit Anmerkungen herausgegeben

von

Felix Klein in Göttingen.

Hierzu ein Faksimile.

Abgedruckt aus der „Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung, 1901.

Inhaltsübersicht.

Vorbemerkungen.

Die tagebuchartigen Aufzeichnungen von Gauß, welche im folgenden zum ersten Male zusammenhängend zur Veröffentlichung kommen, füllen 19 kleine Oktavseiten in einem unscheinbaren Heftchen, welches sich seit Gauß' Tode in der Familie weiter vererbt hat und uns durch Vermittelung von Herrn Stäckel im Sommer 1898 seitens des Enkels von Gauß, des Herrn C. Gauß in Hameln, zur Benutzung bei der Weiterführung der Gesamtausgabe von Gauß' Werken zur Verfügung gestellt wurde. Herr C. Gauß hat später — unter Wahrung seines persönlichen Eigentumsrechts — in dankenswerter Weise verfügt, daß besagtes Heftchen dauernd im hiesigen Gauß-Archiv aufbewahrt werden soll.

Die außerordentliche wissenschaftliche Bedeutung dieses Tagebuchs oder *Notizenjournals* (wie es Gauß selbst gelegentlich in einem Brief an Olbers nennt; siehe Nr. 88 des folgenden Abdrucks) ist von mir bereits im zweiten derjenigen Berichte, welche ich der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften alljährlich über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken erstatte, unter Mitteilung einiger charakteristischer Stellen hervorgehoben worden,*) — sie tritt nicht minder in dem neuerschienenen Band VIII von Gauß' Werken hervor, wo wir vielfach auf die Angaben des Tagebuches rekurrieren konnten. Nach dem von der K. Gesellschaft angenommenen allgemeinen Plane für die Weiterführung der Gesamtausgabe soll dasselbe mit dem gesamten sonstigen in Betracht kommenden biographischen Material in Bd. X der Werke ausführlich publiziert und bearbeitet werden. Aber es ist bis dahin noch ein langer Weg, dessen Ende noch nicht mit Sicherheit abzusehen sein dürfte. Ich glaube also auf allgemeine Zustimmung rechnen zu dürfen, wenn ich das Tagebuch hier vorab als Beitrag zu der von der K. Gesellschaft der Wissenschaften anläßlich ihres 150jährigen Bestehens geplanten historischen Festschrift *in vorläufiger Form* veröffentliche. Die endgültige Bearbeitung in Bd. X wird damit nichts an ihrem Werte verlieren, sie wird aber dadurch, daß das Material schon jetzt zur öffentlichen Kenntnis und öffentlichen Diskussion kommt, erleichtert werden.

Zwei Dinge dürfen ja wohl gleich hier vorab hervorgehoben werden, welche dem Tagebuch einen unvergleichlichen biographischen Wert verleihen.

Das eine ist der unmittelbare, sozusagen persönliche Einblick, den wir gerade für die entscheidenden Jahre 1796—1800 in den wissenschaftlichen Werdegang des jungen Gauß gewinnen**). Da ist noch keine Spur der abgeschlossenen Reife des wissenschaftlichen Urteils oder auch der vornehmen Zurückhaltung, wie sie Gauß in späteren Lebensjahren zu eigen waren. Wichtiges und Unwichtiges wechselt ab; neben Entdeckungen von der größten Tragweite finden sich Trivialitäten, wie sie der Anfänger zu überwinden hat; überall aber tritt der persönliche Anteil, den Gauß an seinen Mühen und Erfolgen nimmt, in überquellender Weise zu Tage. Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen.

---

*) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1899, Geschäftliche Mitteilungen, Heft 1. (Abgedruckt in Bd. 53 der Math. Annalen, p. 45—48.)

**) Gauß ist am 30. April 1777 geboren, war also, als er das Tagebuch am 30. März 1796 begann, noch nicht ganz 19 Jahre alt.

Das andere ist die Verknüpfung der einzelnen wissenschaftlichen Fortschritte, die Gauß gelingen, und die genaue Datierung bestimmter Entdeckungen. Man kann allerdings den Wunsch nicht unterdrücken, Gauß möchte bei seinen Aufzeichnungen mit größerer Konsequenz vorgegangen sein und sich außerdem nicht so vielfach mit bloßen Andeutungen begnügt haben. Manche Frage nach der Entstehung von Gauß' späteren mathematischen Auffassungen und Ideen wird sich auch mit Hilfe des Tagebuches niemals beantworten lassen und andererseits wird uns manche Tagebuchnotiz dauernd unverständlich bleiben. Trotzdem ist der Fortschritt, der sich aus einem genauen Vergleich der einzelnen Nummern des Tagebuches mit den erhaltenen Stücken des Nachlasses ergeben muß, zweifellos ein sehr bedeutender. Ich habe bei der folgenden Publikation als meine Hauptaufgabe angesehen, in dieser Hinsicht die Wege nur erst zu ebnen, und bin nur nach *einer* Seite weiter gegangen, indem ich nämlich das Material aus den Jahren 1797—1800 heranzog, welches sich auf die *Theorie der elliptischen Funktionen* bezieht. Das Hauptergebnis meiner betreffenden Studien findet sich in einer Fußnote zu Nr. 111 des Tagebuches (p. 26 unten); die Fachgenossen müssen entscheiden, wie weit sie dasselbe als gesicherten Besitz acceptieren und dementsprechend die bisher geltende Auffassung abändern wollen.

Hinsichtlich der Art der im folgenden gegebenen Veröffentlichung und der hinzugefügten Bemerkungen mögen übrigens folgende Angaben vorausgeschickt werden.

Zunächst, was die Notizen des Tagebuches selbst betrifft, so habe ich mich bei deren Wiedergabe keineswegs genau an die Äußerlichkeiten des Originals gebunden. Vor allen Dingen habe ich im Interesse der Übersichtlichkeit und der bequemeren Bezugnahme die sämtlichen Sätze durchlaufend numeriert (siehe auch das auf p. 33, 34 abgedruckte Sachregister). Die Angaben über Ort und Zeit wurden möglichst gleichförmig gestaltet, und auch dem Text, wo es wünschenswert schien, hin und wieder ein Wort oder eine Silbe (die dann in eckige Klammern [—] eingeschlossen sind) hinzugefügt. Leicht erkennbare sprachliche Unrichtigkeiten wurden kurzweg verbessert. Die Formeln wurden herausgehoben und in moderner Weise gedruckt. Einer Anzahl Nummern wurden horizontale Striche zugesetzt; dieselben sollen in freier Form gewisse Marken von wechselnder Gestalt reproduzieren, welche Gauß den einzelnen Notizen vorangestellt hat, um deren Wichtigkeit hervorzuheben. Eine große Zahl der Notizen, insbesondere derjenigen zahlentheoretischen Inhalts, ist im Original unterstrichen; ich habe im Druck diese Unterstreichungen weggelassen, weil es scheint, als seien dieselben erst hinterher angebracht und darauf bezüglich, ob Gauß die einzelne Notiz bei späteren Arbeiten benutzt hat oder nicht. Im übrigen wolle man das als Tafel beigegebene Faksimile einer Seite des Tagebuchs vergleichen, welche die Nummern 92—100 der weiterhin eingehaltenen Zählung enthält.

Dann aber, was die Bemerkungen angeht, die ich einzelnen Nummern zugesetzt habe, so haben sie sämtlich den Zweck, den aktenmäßigen Wert des mitgeteilten Materials zu erhöhen. Hierzu schien mir vor allen Dingen der Hinweis auf parallellaufende Zeitangaben in den bisherigen Veröffentlichungen von Gauß' Werken oder Briefen erwünscht. Die Bände der Gesamtausgabe werden dabei durch bloße römische Ziffern zitiert; sonst finden sich noch abgekürzte Hinweise auf die Festrede, welche Schering 1877 gelegentlich der Feier von Gauß' hundertjährigem Geburtstage hielt (Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften, 22. Band), auf den Briefwechsel von Gauß mit W. Bolyai (herausgegeben von Fr. Schmidt und P. Stäckel, Leipzig 1899) und auf den Briefwechsel von Gauß mit Olbers (Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke, herausgegeben von C. Schilling, zweiter Band, Berlin 1900). Besonderen Dank habe ich Herrn Dedekind für einige erläuternde Bemerkungen zu sagen, die ich mit der Chiffre D. versehen den in Betracht kommenden Nummern hinzufügte. Hierüber hinaus habe ich verschiedentlich auf den handschriftlichen Nachlaß von Gauß, wie er z. Z. im hiesigen Gauß-Archiv aufbewahrt wird, Bezug genommen und insbesondere bei denjenigen Nummern, die sich auf die elliptischen Funktionen in den Jahren 1797—1800 beziehen, solche Stücke des Nachlasses abgedruckt, die nun erst an der Hand des Tagebuches ihre volle Bedeutung gewinnen. Für die Jahre 1796, 1797 ist in dieser Hinsicht ein mit Schreibpapier durchschossenes Exemplar des Lehrbuches von Leiste: Die Arithmetik und Algebra, Wolfenbüttel 1790, (114 pag.) besonders wertvoll, indem Gauß damals auf dessen freie Seiten eine Reihe der interessantesten Eintragungen gemacht hat (wie er ja überhaupt in die Bücher seiner Bibliothek vielfach Notizen eintrug, gleich als wollte er jedes leere Blatt ausnutzen, das Dauer zu besitzen schien)*). Für die Jahre 1798—1800 kommen dann neben losen Zetteln, die sich zufällig erhalten haben, insbesondere die sogenannten *Schedae* in Betracht, d. h. Notizheftchen, welche in ungeregelter Aufeinanderfolge Zahlenrechnungen und Bemerkungen der verschiedensten Art, vielfach auch die Ansätze zu zusammenhängenden Darstellungen enthalten; das Nähere hierüber ist unten bei den einzelnen Nummern mitgetheilt. —

Ich habe noch nach verschiedenen Seiten hin für vielfache Unter-

*) Die Notizen aus Leiste werden in der Folge so zitiert, daß jedesmal die Druckseite angegeben wird, *neben* der sie sich in dem durchschossenen Exemplare befinden.

stützung, die ich bei meiner Arbeit fand, Dank auszusprechen. Das Faksimile einer Seite des Tagebuches, welches am Schlusse folgt, ist von Herrn Brendel dahier (dem jetzigen Generalredaktor der Gaußausgabe) besorgt worden; derselbe hat mich durch seine große Kenntnis des Nachlasses auch sonst weitgehend unterstützt. Nicht minder bin ich den Bearbeitern von Bd. VIII der Gaußischen Werke, den Herren Börsch, Fricke und Stäckel, sowie den Herren Fueter und Sommer dahier für vielfache Bemerkungen und sonstige Hilfe verpflichtet. Der Mitwirkung von Herrn Dedekind gedachte ich schon oben; dieselbe erstreckte sich schließlich auf fast alle Teile des Tagebuches und ist mir besonders wertvoll gewesen.

Göttingen, den 3. Juli 1901.

F. Klein.

Gauß' Tagebuch 1796—1814.

1796.

1) Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.

Mart. 30. Brunsvigae.

Das gleiche Datum in I, p. 476 (nach dem Vermerk in Gauß' Handexemplar der Disquisitiones Arithmeticae, Anm. zu Art. 365), ebenso in Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, p. 16*); v. Waltershausen bemerkt dort:

„Diese Entdeckung" [der Konstruktion des Siebzehnecks], „welche Gauß bis zum Ende seines Lebens sehr hoch schätzte, ist es vornehmlich gewesen, welche seinem Leben eine bestimmte Richtung gegeben hat, denn von jenem Tage an war er fest entschlossen, nur der Mathematik sein Leben zu widmen."

2) Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

Apr. 8. Brunsvigae.

Vergl. I, p. 475, wo die Worte des Artikels 130 der Disquisitiones arithmeticae: „Postquam rigorose demonstravimus, quemvis numerum primum formae $4n+1$ et positive et negative acceptum alicuius numeri primi ipso minoris non-residuum esse ..." mit folgender Bemerkung begleitet werden: *hanc demonstrationem deteximus 1796 Apr. 8.* Im Anschluß an diesen Satz gibt Gauß in Art. 131 seiner Disq. a. den ersten seiner sechs Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bezüglich dessen

---

*) Die bald hernach erfolgte erste Veröffentlichung des Resultats (auf die bereits Schering in seiner Festrede von 1877 hinweist) ist seither noch nicht in extenso abgedruckt worden und mag daher hier reproduziert werden. Dieselbe findet sich im „Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung", Nr. 66 vom 1. Juli 1796 (p. 554 des Jahrgangs), und hat folgenden Wortlaut:

„Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, daß verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreieck, Viereck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, daß das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, daß *außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebenzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist.* Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Korollarium zu einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden."

„C. F. Gauß a. Braunschweig, Stud. der Mathematik zu Göttingen."

„Es verdient angemerkt zu werden, daß Herr Gauß jetzt in seinem 18. Jahre steht und sich hier in Braunschweig mit ebenso glücklichem Erfolg der Philosophie und der klassischen Litteratur als der höheren Mathematik gewidmet hat."

„Den 18. April 96." „E. A. W. Zimmermann, Prof."

in I, p. 476 (Anm. zu Art. 131) des weiteren mitgeteilt wird: *Theorema fundamentale per inductionem detectum 1795 Martio. Demonstratio prima, quae in hac sectione traditur, inventa 1796 Apr.*

3) Formulae pro cosinibus angulorum peripheriae submultiplorum expressionem generaliorem non admittent nisi in duab[us] periodis.

Apr. 12. Brunsvigae.

4) Amplificatio normae residuorum ad residua et mensuras non indivisibiles.

Apr. 29. Gottingae.

Wegen des Datums vergl. I, p. 476 (Bem. zu Art. 133 der Disq. a.).

5) Numeri cuiusvis divisibilitas varia in binos primos.

Mai. 14. Gottingae.

6) Coefficientes aequationum per radicum potestates additas facile dantur.

Mai. 23. Gottingae.

Bezügliche Formeln finden sich in Leiste neben der Druckseite 6.

7) Transformatio seriei

$$1 - 2 + 8 - 64 + \cdots$$

in fractionem continuam:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{56}{1+\cfrac{128}{\cdots}}}}}}}}$$

$$1 - 1 + 1\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 7 + 1\cdot 3\cdot 7\cdot 15 - \cdots = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{28}{\cdots}}}}}}$$

et aliae.

Mai. 24. Gottingae.

Vgl. unten Nr. 58.

8) Scalam simplicem in seriebus variatim recurrentibus esse functionem similem secundi ordinis scalarum componentium.

Mai. 26.

Als Skala einer rekurrenten Reihe bezeichnen die älteren Mathematiker die Koeffizienten des linearen Gesetzes, welches die aufeinanderfolgenden Reihenglieder verbindet.

9) Comparationes infinitorum in numeris primis et factoribus cont[entorum].
Mai. 31. Gottingae.

10) Scala ubi seriei termini sunt producta vel adeo functiones quaecunque terminorum quotcunque serierum.
Jun. 3. Gottingae.

11) Formula pro summa factorum numeri cuiusvis compositi f[actor] gener[alis] $\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.
Jun. 5. Gottingae.

12) Periodorum summa omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis fact[or] gen[eralis] $((n+1)a-na)a^{n-1}$.
Jun. 5. Gottingae.

Der Ausdruck $((n+1)a-na)a^{n-1}$ ist hier genau so abgedruckt worden, wie er im Original zu stehen scheint, trotzdem er in dieser Form ersichtlich keinen verständlichen Sinn gibt.

13) Leges distributionis.
Jun. 19. Gottingae.

14) Factorum summae in infinito $=\frac{\pi^2}{6}\cdot$ sum[ma] num[erorum].
Jun. 20. Gottingae.

Vergl. Nr. 31 unten.

15) Coepi de multiplicatoribus (in formis divisorum form[arum] qu[adraticarum]) connexis cogitare.
Jun. 22. Gottingae.

Vergl. I, p. 476, wo zur Überschrift der Sectio quinta der Disq. a. „de formis aequationibusque indeterminatis secundi gradus" vermerkt ist: *Inde a Jun. 22. 1796.*

<u>16)</u> Nova theorematis aurei demonstratio a priori toto coelo diversa eaque haud parum elegans.
Jun. 27.

Vergl. I, p. 476 (Bem. zu Art. 262 der Disq. a.), wo indes als Datum für die Auffindung dieses „zweiten Beweises" des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, in Übereinstimmung mit Gauß' eigener Notiz in seinem Handexemplar der Disq. a., *1796 Juli 27* angegeben ist. Es handelt sich dabei offenbar um einen Schreibfehler.

17) Quaeque partitio numeri $\acute{a}$ in tria □ dat forman in tria □ separabilem.
Jul. 3.

□ ist so viel wie „quadrata".

<u>18)</u> *ΕΥΡΗΚΑ* num[erus] $=\Delta+\Delta+\Delta$.
Jul. 10. Gottingae.

$\Delta+\Delta+\Delta$ bedeutet ersichtlich: Summe dreier Dreieckszahlen.

19) Determinatio Euleriana formarum in quibus numeri compositi plus unâ vice continentur.

20) Principia componendi scalas serierum variatim recurrentium.

Jul. 16. Gottingae.

21) Methodus Euleriana pro demonstranda relatione inter rectangula sub segmentis rectarum sese secantium in sectionibus conicis ad omnes curvas applicatum.

Jul. 31. Gottingae.

22) $a^{2^n \overline{+1}(p)} \equiv 1$ semper solvere in potestate.

Aug. 3. Gottingae.

Der Exponent von a ist nicht recht verständlich; er ist aber möglichst genau nach dem Original wiedergegeben.

23) Rationem theorematis aurei quomodo profundius perscrutari oporteat perspexi et ad hoc accingor supra quadraticas aequationes egredi conatus. Inventio formularum qui semper per primos: $\sqrt[n]{1}$ (numerice) dividi possunt.

Aug. 13. Gottingae.

Ansatz zum dritten und vierten Beweise des Reziprozitätsgesetzes quadratischer Reste; siehe unten, No. 30.

24) Obiter $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ evolutum.

Aug. 14.

25) Rei summa iamiam intellecta. Restat ut singula muniantur.

Aug. 16. Gottingae.

26) $(a^p) \equiv (a)$ mod. p, a radix aequationis cuiusvis quomodocunque irrationalis.

[Aug.] 18.

Wahrscheinlich bedeutet (a) eine Funktion von x, die für $x = a$ verschwindet, und entsprechend (a^p) die Funktion, deren Wurzeln die p^{ten} Potenzen von den Wurzeln der ersten Funktion sind; p Primzahl. (D.)

27) Si P, Q functiones alg[ebraicae] quantitatis indeterminatae fuerint inc[ognitae]. Datur:

$$tP + uQ = 1$$

in algebra tum speciata tum numerica.

[Aug.] 19. Gottingae.

Algebra speciata = Buchstabenrechnung.

28) Exprimuntur potestates radicum aequationis propositae aggregatae per coefficientes aequationis lege perquam simplici (cum aliis quibusdam geometr[icis] in Exercc:).

[Aug.] 21. Gottingae.

29) Summatio seriei infinitae

$$1 + \frac{x^n}{1 \cdots n} + \frac{x^{2n}}{1 \cdots 2n} + \cdots$$

eod[em] [die].

30) Minutiis quibusdam exceptis feliciter scopum attigi scil[icet] si

$$p^n \equiv 1 \ (\text{mod. } \pi)$$

fore $x^\pi - 1$ compositum e factoribus gradum n non excedentibus et proin aequationem conditionalem fore solubilem; unde duas theor[ematis] aurei demonstr[ationes] deduxi.

Sept. 2. Gottingae.

Siehe oben, No. 23, und No. 68 unten. Die aequatio conditionalis ist vermutlich dieselbe, die sonst von Gauß aequatio auxiliaris genannt wurde, man vergl. in II, p. 229, 233, 234, die Artikel 360, 365, 366 der Analysis residuorum, sowie die Fußnote zu No. 68. (D.)

31) Numerus fractionum inaequalium quarum denominatores certum limitem non superant ad numerum fractionum omnium quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem in infinito ut $6 : \pi^2$.

Sept. 6.

Vgl. No. 14 oben.

32) Si $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ stat[uitur] $\Pi(x) = z$ et $x = \Phi(z)$

erit

$$\Phi(z) = z - \frac{z^4}{8} + \frac{z^7}{112} - \frac{z^{10}}{1792} + \frac{3 \cdot z^{13}}{1792 \cdot 52} - \frac{3 \cdot 185 \cdot z^{16}}{1792 \cdot 52 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} + \cdots$$

Sept. 9.

Auf vorstehende Notiz nimmt Fricke in VIII, p. 95, ausdrücklich Bezug.

33) Si:

$$\Phi\left(\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\right) = x$$

erit:

$$\Phi(z) = z - \frac{1 \cdot z^{n+1}}{2(n+1)} \cdot A + \frac{(n-1) z^{2n+1}}{4(2n+1)} B - \frac{(n^2-n-1) z^{3n+1}}{2(n+1)(3n+1)} C + \cdots$$

Die Exponenten von z sind im Original unrichtig angegeben.

34) Methodus facilis inveniendi aeq[uationem] in y ex aeq[uatione] in x, si ponatur:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = y.$$

Sept. 14.

35) Fractiones quarum denominator continet quantitates irrationales (quomodocunque?) in alias transmutare ab hoc incommodo liberatas.

Sept. 16.

36) Coefficientes aeq[uationis] auxiliariae eliminationi inservientis ex radicibus aeq[uationis] datae determinati.

eo[dem] [die].

37) Nova methodus qua resolutionem aequationum universalem investigare

forsitanque invenire licebit. Scil[icet] transm[utare] aeq[uationem] in aliam cuius radices:

$$\alpha\varrho' + \beta\varrho'' + \gamma\varrho''' + \cdots$$

ubi:

$$\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta \text{ etc.}$$

et n numerus aequationis gradum denotans.

Sept. 17.

38) In mentem mihi venit radices aeq[ationis] $x^n - 1$ ex aeq[ationibus] communes radices habentibus elicere ut adeo plerumque tantum aequationes coefficientibus rationalibus gaudentes resolvi oporteat.

Sept. 29. Brunsvigae.

39) Aequatio tertii gradus est haec:

$$x^3 + x^2 - nx + \frac{n^2 - 3n - 1 - mp}{3} = 0$$

ubi $3n + 1 = p$ et m numerus resid[uorum] cubic[orum] similes sui excipientes. Unde sequitur si $n = 3k$ fore $m + 1 = 3l$; si $n = 3k \pm 1$ fore $m = 3l$.

Sive

$$z^3 - 3pz + (p^2 - 8p - 9pm) = 0$$

hoc [modo] m penitus determinatum, $m + 1$ semper $\square + 3 \cdot \square$.

Oct. 1. Brunsvigae.

Statt „excipientes" muß es vermutlich „excipientium" heißen. — In Leiste finden sich neben der Druckseite 8 Einzelbeispiele. Vergl. übrigens No. 67.

40) Aequationis

$$x^p - 1 = 0$$

radices per integros multiplicatae aggregatae cifram producere non possunt.

⊙ *Oct. 9. Brunsvigae.*

41) Quaedam sese obtulerunt de multiplicatoribus aequationum ut certi termini eiiciantur, quae praeclara pollicentur.

⊙ *Oct. 16. Brunsvigae.*

42) Lex detecta: quando et demon[stra]ta erit, systema ad perfectionem evexerimus

Oct. 18. Brunsvigae.

43) Vicimus GEGAN.

Oct. 21. Brunsvigae.

Auf der Innenseite des vorderen Einbanddeckels des Tagebuches steht:

GEGAN

WAEGEGAN.

44) Formula interpolationis elegans.

Nov. 25. Gottingae.

45) Incepi expressionem:

$$1-\frac{1}{2^{\omega}}+\frac{1}{3^{\omega}}-\cdots$$

in seriem transmutare secundum potestates ipsius ω progredientem.

Nov. 26. Gottingae.

46) Formulae trigonometricae per series expressae.

per Dec.

47) Differentiationes generalissimae.

Dec. 23.

48) Curvam parabolicam quadrare suscepi cuius puncta quotcunque dantur.

Dec. 26.

Hierher gehörige Formeln finden sich bei Leiste neben Druckseite 13.

49) Demonstrationem genuinam theorematis Lagrangiani detexi.

Dec. 27.

Vergl. den „Neuen Beweis des Lagrangischen Lehrsatzes" in VIII, p. 76—79, bei welchem Fricke (p. 79) ausdrücklich auf vorstehende Tagebuchnotiz verweist. In Leiste findet sich neben den Druckseiten 10 und 11 eine etwas andere Darstellung des betreffenden Beweises (mit weniger Text).

1797.

50)

$$\left.\begin{aligned}\int\sqrt{\sin x}\;dx &= 2\int\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^4}}\\ \int\sqrt{\operatorname{tang} x}\,dx &= 2\int\frac{dy}{\sqrt[4]{1-y^4}}\\ \int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\;dx &= 2\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\end{aligned}\right\}\; y^2=\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,x.$$

Jan. 7.

51) Curvam (elasticam) lemniscatam a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

pendentem perscrutari coepi.

Jan. 8.

Dasselbe Datum in III, p. 493. Das Wort „elasticam" ist im Original durchstrichen und an seine Stelle „lemniscatam" gesetzt. In Leiste stehen neben den Druckseiten 16, 17, 18 einige Notizen, in denen das Additionstheorem der lemniskatischen Funktion und die Multiplikation mit 2 und 3 behandelt wird; *in der dazugehörigen Überschrift findet sich genau dieselbe Korrektur.*

52) Criterii Euleriani rationem sponte detexi.

Jan. 10.

53) Integrale complet[um]

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

ad circ[uli] quadr[aturam] reducere commentus sum.

Jan. 12.

54) Methodus facilis

$$\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$$

determinandi.

Bezügliche Formeln stehen in Leiste neben der Druckseite 27.

55) Supplementum eximium ad polygonorum descriptionem inveni. Sc[ilicet] si $a, b, c, d \cdots$ sint factores primi numeri primi p unitate truncati tunc ad polygoni p laterum [descriptionem] nihil aliud requiri quam ut:

1.° arcus indefinitus in $a, b, c, d \cdots$ partes secetur.

2.° ut polygona $a, b, c, d \cdots$ laterum describantur.

Jan. 19. Gottingae.

56) Theoremata de res[iduis] $-1, \mp 2$ simili methodo demonstrata ut cetera.

Febr. 4. Gottingae.

Dasselbe Datum in I, p. 476 (Anmerkung zu Art. 145 der Disq. a.).

57) Forma:

$$a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab$$

quod ad divisores attinet, convenit cum hac:

$$a^3+3b^2.$$

Febr. 6.

58) Amplificatio prop[ositionis] penult[imae] p[aginae] 1 scilicet

$$1-a+a^3-a^6+a^{10}-\cdots=\cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a^2-a}{1+\cfrac{a^3}{1+\cfrac{a^4-a^2}{1+\cfrac{a^5}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

Unde facile omnes series ubi exp[onentes] ser[iem] sec[undi] ordinis constituunt transformantur.

Febr. 16.

Vergl. oben, No. 7.

59) Formularum integralium formae:

$$\int e^{-t^\alpha}\,dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$$

inter se comparationem institui.

Mart. 2.

60) Cur ad aequationem perveniatur gradus nn^{ti} dividendo curvam lemniscatam in n partes.

Mart. 19.

61) A potestatibus integr[alis]

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

pendet

$$\sum \left(\frac{m^2+6mn+n^2}{(m^2+n^2)^4}\right)^k.$$

Es muß jedenfalls heißen:

$$\sum \frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4},$$

(was soviel ist, wie

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{(m+ni)^4}+\frac{1}{(m-ni)^4}\right)).$$

In dieser Form steht die Summe bei Leiste neben Druckseite 88 und 89.

Im übrigen mögen hier folgende Formeln aus Leiste aufgenommen werden, welche zeigen, wie weit Gauß zu der in Betracht kommenden Zeit in die Theorie der lemniskatischen Funktionen eingedrungen war.

Neben Druckseite 62 steht:

$$\text{Sehne von } x = \left\{\frac{\begin{array}{c} x\left(1+\frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{16\pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{81\pi^4}\right)\cdots\left(1-\frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\pi^4}\right)\cdots \\ \cdot\,\text{Prod. ex}\left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{x}{\pi}\right)^4+\frac{1}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{x}{\pi}\right)^8\right) \\ \text{sumtis pro } m, n \text{ omnibus numeris integris inaequalibus} \end{array}}{\begin{array}{c} \left(1+\frac{4x^4}{\pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{81\pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{625\pi^4}\right)\cdots\cdots\cdots \\ \cdot\,\text{Prod. ex}\left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^4+\frac{1}{(m^2+n^2)^4}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^8\right) \\ \text{sumtis pro } m, n \text{ omnibus numeris imparibus inaequalibus} \end{array}}\right\}$$

und gleich dahinter neben der Druckseite 63:

$$\sin x = x\cdot\frac{1-\frac{1}{60}x^4-\frac{1}{10080}x^4+\frac{1}{10080\cdot 11700}x^{12}+\cdots}{1+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{10080}x^8+\frac{1}{1296000}x^{12}-\cdots}$$

(wo die Koeffizienten von x^{12} unrichtig sind).

Dann wieder neben Druckseite 89:

$$\cos x = \frac{\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots}{\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots}$$

$$\cdot\,\text{Prod. ex}\left(\frac{1-\frac{2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^4}{\pi^4}}{1+\frac{2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\frac{x^4}{\pi^4}}\right)$$

$$\text{positis pro }\binom{m}{n}\text{ omnibus numeris }\binom{\text{imparibus}}{\text{paribus}},$$

und unmittelbar dahinter:

$$\frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{240}x^6 - \cdots}{1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{240}x^6 - \cdots}.$$

In diesen Formeln ist π dieselbe Größe, wie in No. 63 π^l, nämlich die später mit ϖ bezeichnete lemniskatische Periode

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Man wolle übrigens die ältesten Stücke, betreffend lemniskatische Funktionen, vergleichen, welche Schering in III, p. 404—406, in den Nummern 1—4 des Artikels: „Elegantiores Integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ Proprietates" von losen Blättern, die sich im Nachlaß finden, abgedruckt hat. Die Potenzentwickelungen für den Zähler und Nenner der sin x und cos x sind dort weiter ausgeführt, dagegen fehlen die doppelt unendlichen Produkte*). (Diese Potenzentwickelungen decken sich für den Fall der lemniskatischen Funktionen sowohl mit den *Al*- wie mit den σ-Reihen von Weierstraß.)

62) Lemniscata geometrice in quinque partes dividitur.

Mart. 21.

In Leiste finden sich bezügliche Notizen neben den Druckseiten 102 und 100. Zunächst wird die Gleichung der Fünfteilung, deren Wurzeln coslemn. 36° ist, in der Form mitgeteilt:

$$\frac{9 - 36x^4 + 30x^8 + 12x^{12} + x^{16}}{1 + 12x^4 + 30x^8 - 36x^{12} + 9x^{16}} = \frac{4(1-x^4)}{1 + 2x^4 + x^8},$$

die dann zu

$$5 - 62x^4 - 105x^8 + 300x^{12} - 125x^{16} + 50x^{20} + x^{24} = 0$$

zusammengezogen wird. Es folgen Näherungsrechnungen zur Auffindung der Wurzeln; zwischendurch treten auch Quadratwurzelausdrücke auf; schließlich kommt cos $36^0 = 0{,}52047024$.

63) Inter multa alia curvam lemniscatam spectantia observavi:
Numeratorem sinus decompositi arcus duplicis esse
$= 2 \cdot$ num. denom. sinus $\times$ num. den[om]. cos arcus simpl[icis].
Denominator[em] vero $=$ (num. sin)^4 + (denom. sin)^4.
Iam si hic denominator pro arcu π^l ponatur Θ erit denom[inator] sin arcus $k\pi^l = \Theta^{k^2}$. Iam

*) In Leiste findet sich neben p. 39 im Anschlusse an allerlei Rechnungen, die sich auf das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ beziehen, auch noch folgender Ansatz zu einer Produktentwickelung:

$$\frac{x\left(1 - \frac{x^6}{729 \cdot u^6}\right)\left(1 - \frac{x^6}{729 \cdot 2^6 \cdot u^6}\right)\left(1 - \frac{x^6}{729 \cdot 3^6 \cdot u^6}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{x^3}{2^3 \cdot u^3}\right)\left(1 - \frac{x^3}{5^3 \cdot u^3}\right)\left(1 - \frac{x^3}{8^3 \cdot u^3}\right)\cdots\left(1 + \frac{x^3}{u^3}\right)\left(1 + \frac{x^3}{4^3 \cdot u^3}\right)\cdots}.$$

$$\Theta = 4{,}810\,480$$

cuius numeri logarithmus hyperbolicus est =

$$1{,}570\,796 \text{ i. e. } = \frac{\pi}{2},$$

quod maxime est memorabile, cuiusque proprietatis demonstratio gravissima analyseos incrementa pollicetur.

Mart. 29.

Die Einzelheiten der hier angedeuteten Rechnung finden sich in Leiste neben Druckseite 71. Zunächst wird vermöge der bei No. 61 mitgeteilten Reihenentwickelungen der Zähler M und Nenner N für $x = 45^0$ berechnet und hieraus dann $N\pi$ nach der allgemeinen Formel $N4 = (M^4 + N^4)^4$. Die Rechnung schließt mit der charakteristischen Wendung:

$$4{,}81048 = N\pi,$$

$$\text{log. hyp. dieser Zahl} = 1{,}5708 = \frac{1}{2}\pi \text{ Circuli?}$$

Offenbar kommt diese Berechnung von Θ darauf hinaus, daß für den besonderen Wert $x = 0$ der Exponentialfaktor bestimmt wird, der dem Nenner (oder Zähler) von sinlemn. x zutritt, wenn x um eine Periode vermehrt wird.

Übrigens finden sich in Leiste neben Druckseite 26 Multiplikationsformeln allgemeinerer Art, z. B.

$$Pnx = nQ^{n^2-1}P - \frac{n(n^2-1)(n^2+6)}{60}Q^{n^2-5}P^5 - \frac{n^6 - 13n^4 + 36n^2 + 420n(n^2-1)}{10\,080}Q^{n^2-9}P^9 - \cdots$$

64) Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - a$, $+1$ cum -1, ± 2 inveni.

Jun. 17. Gottingae.

Das $+1$ ist nicht recht verständlich, steht aber im Original.

65) Deductionem secundam theoriae polygonorum excolui.

Jul. 17. Gottingae.

66) Per utranque methodum monstrari potest puras tantum aequationes solvi oportere.

67) Quod Oct. 1. per ind[uctionem] invenimus demonstratione munivimus.

Jul. 20.

Siehe oben, No. 39.

68) Casum singularem solutionis congruentiae

$$x^n - 1 \equiv 0$$

(scilicet quanto cong[ruentia] auxi[liaria] radices aequales habet), qui tam diu nos vexavit felicissimo successu vicimus ex congruentiarum solutione si modulus est numeri primi potestas.

Jul. 21.

Vergl. eine Bemerkung von Dedekind in II, p. 241 (Erläuterung zu § 251 der Analysis residuorum)*).

69) Si

$$x^{m+n} + ax^{m+n-1} + bx^{m+n-2} + \cdots + n \quad \text{(A)}$$

per

$$x^{m} \quad + \alpha x^{m-1} \quad + \beta x^{m-2} \quad + \cdots + m \quad \text{(B)}$$

dividatur atque omnes coefficientes in (A) a, b, c etc. sint numeri integri coefficientes vero omnes in (B) rationales etiam hi omnes erunt integri ultimumque n ultimus m metietur.

Jul. 23.

Vergl. I, p. 475, Anmerkung zu Art. 42 (wo das Datum als *1797 Juli 22* angegeben ist).

70) Forsan omnia producta ex

$$(a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3 + \cdots)$$

designante ϱ omnes radices prim[itivas] aeq[uationis] $x^n = 1$ ad formam

$$(x - \varrho y)(x - \varrho^2 y) \cdots$$

reduci potest. Est enim:

$$(a + b\varrho + c\varrho^2)(a + b\varrho^2 + c\varrho) = (a-b)^2 + (a-b)(c-a) + (c-a)^2$$

$$(a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3)(a + b\varrho^3 + c\varrho^2 + d\varrho) = (a-c)^2 + (b-d)^2$$

$$(a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3 + e\varrho^4 + f\varrho^5)(\qquad) = (a+b-d-e)^2$$
$$-(a+b-d-e)(a-c-d+f) + (a-c-d+f)^2$$
$$= (a+b-d-e)^2$$
$$-(a+b-d-e)(b+c-e-f) + (b+c-e-f)^2.$$

Vid. Febr. 4.

Falsum est. Hinc enim sequeretur e binis numeris in forma pr[oductum] e $(x - \varrho y)$ contentis productum in eadem forma esse quod facile refutatur.

In den Formeln sind beim Abdruck einige Einzelheiten verbessert.

71) Radicum aeq[uationis] $x^n = 1$ periodi plures eandem summam habere non possunt demonstratur.

Jul. 27. Gottingae.

Vergl. No. 73.

---

*) Diese „Analysis residuorum" wird von Dedekind, II, p. 240, als ein „umfangreiches Manuskript" bezeichnet, „welches vermutlich aus dem Jahre 1797 oder 1798 stammt; durch eine gänzliche Umarbeitung sind aus demselben später die Disquisitiones arithmeticae entstanden". In II sind davon nur diejenigen beiden Abschnitte (auf p. 199—240) abgedruckt, welche in den Disquisitiones arithmeticae, sowie dieselben schließlich publiziert wurden, fehlen; diese Abschnitte tragen die Überschriften: *Solutio congruentiae* $x^m - 1 \equiv 0$ und: *Disquisitiones generales de congruentiis.* Es wird interessant sein, einen genauen Vergleich des Gesamtmanuskripts mit den Angaben des Tagebuchs vorzunehmen.

72) Plani possibilitatem demonstravi.

Jul. 28. Gottingae.

Vergl. die Angaben in VIII, p. 162, 194, 199, 200. (Abschnitt: Grundlagen der Geometrie.)

73) Quod Jul. 27. inscrips[imus] errorem involvit: sed eo felicius nunc rem exhausimus, quoniam probare possumus nullam periodum esse posse numerum rationalem.

Aug. 1.

Vergl. oben, No. 71.

74) Quomodo periodorum numerum duplicando signa adornare oporteat.

75) Functionum primarum multitudinem per analysin simplicissimam erui.

Aug. 26.

In Leiste findet sich neben der Druckseite 5 der Anfang einer bez. Tabelle: man vergl. auch II, p. 218 (Analysis residuorum, Art. 343, 344). (D.)

76) Theorema: Si

$$1 + ax + bx^2 + \text{etc.} \cdots + mx^{\mu}$$

est functio secundum modulum p prima, erit:

$$d + x + x^p + x^{p^2} + \cdots + x^{p^{\mu-1}}$$

per hanc f[un]ct[io]nem s[e]c[un]d[u]m hunc modulum divisibilis etc. etc.

Aug. 30.

77) Demonstratum, viaque ad multa maiora per introd[uctionem] modulorum multiplicium strata.

Aug. 31.

Zu No. 76 gehörig.

78) Aug. 1. generalius ad quosvis modulos adaptatur.

Sept. 4.

Vergl. oben, No. 73.

79) Principia detexi, ad quae congruentiarum secundum modulos multiplices resolutio ad congruentias secundum modulum linearem reducitur.

Sept. 9.

80) Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum.

Oct. Brunsvigae.

Prom[ulgatum] in dissert[atione] pecul[iari] mense Aug. 1799.

Vergl. den Abdruck der Dissertation in III, p. 1—30, wo zum Schluß aus einem der drei im Nachlasse erhaltenen Exemplare von Gauß' Dissertation die handschriftliche Bemerkung aufgenommen ist: *Principia quibus haecce demonstratio innititur deteximus initio Octobr. 1797.*

81) Nova theorematis Pythagoraei dem[onstratio].

Oct. 16. Brunsvigae.

Im Nachlaß vorhanden. Ein ganz elementarer Beweis mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken, der nichts Charakteristisches hat.

82) Seriei

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{144} + \cdots$$

summam consideravimus invenimusque eam $= 0$, si

$$2\sqrt{x} + \frac{3}{16}\,\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024}\,\frac{1}{\sqrt{3x}} + \cdots = \left(\varkappa + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

Oct. 16. Brunsvigae.

In Leiste finden sich neben der Druckseite 58 u. a. folgende Formeln:

$$1 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \cdots = \varphi, \qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \cdots = \psi,$$

$$\varphi' = -\frac{\psi}{x}, \qquad \psi' = \varphi.$$

1798.

83) Positis:

$$l(1+x) = \varphi'(x); \quad l(1+\varphi' x) = \varphi''(x); \quad l(1+\varphi'' x) = \varphi'''(x) \text{ etc.}$$

erit

$$\varphi^{(i)}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2}i}} + \cdots$$

Apr. Brunsvigae.

84) Classes dari in quovis ordine; hincque numerorum in terna quadrata discerpibilitas ad theoriam solidam reducta.

Apr. Brunsvigae.

Vergl. die Angabe in I, p. 476, zu Art. 287, III der Disq. a. *(Demonstratione primum munita sunt Mense Aprili 1798.)*

85) Demonstrationem genuinam compositionis virium eruimus.

Mai. Gottingae.

Dieser Beweis wird in einem Brief von Wachter an Gauß vom 16. Dez. 1814 erwähnt.

86) Theorema Lagrange de transformatione functionum ad functiones quotcunque variabilium extendi.

Mai. Gottingae.

87) Series

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \text{etc.} = \frac{4}{\pi}$$

simul cum theoria generali serierum involventium sinus et cosinus angulorum arithmetice crescentium.

Jun.

88) Calculus probabilitatis contra Laplace defensus.

Jun. 17. Gottingae.

Vergl. einen Brief von Gauß an Olbers vom 24. Januar 1812 (Gesamtausgabe des Briefwechsels No. 255, p. 493; die hier in Betracht kommende Stelle ist in VIII, p. 140, abgedruckt). Es wird dort ausdrücklich auf die vorliegende Nummer des „Notizenjournals" Bezug genommen.

89) Problema eliminationis ita solutum ut nihil amplius desiderari possit.

Jun. Gottingae.

90) Varia elegantiuscula circa attractionem sphaerae.

91a) $$1+\frac{1}{9}\cdot\frac{1\cdot 3}{4\cdot 4}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8}+\frac{1}{729}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 12\cdot 12}+\cdots=1{,}02220\cdots$$
$$=\frac{1{,}3110\cdots}{3{,}1415\cdots}\cdot\sqrt{6}.$$

Jul.

Das Datum „Juli" gehört möglicherweise zu No. 90; No. 91a würde dann (was Tinte und Schreibweise anzudeuten scheinen) eine spätere Eintragung sein. In der Tat findet sich die betreffende Formel (siehe III, p. 423, Art. 15) in dem weiter unten zu nennenden Notizheft Ac von 1799, dazu mit dem Fehler, daß statt $\sqrt{6}$ geschrieben ist $\sqrt{\frac{3}{2}}$, was ursprünglich auch im Tagebuche stand, dort aber von Gauß selbst später verbessert ist.

Umgekehrt ist die folgende Nummer 91b, so viel zu erkennen, wahrscheinlich älteren Ursprungs, was auch dadurch bestätigt wird, daß die betreffenden Rechnungen in Leiste weiter ausgeführt sind. (Die Aufzeichnungen in Leiste gehen im allgemeinen nicht über das Jahr 1797 hinaus.) Jedenfalls liegt der charakteristische Unterschied gegen No. 92 vor, daß dort Zähler und Nenner von sinlemn. getrennt in trigonometrische Reihen entwickelt werden, hier aber nur erst der sinlemn. selbst.

91b) $$\text{arcsinlemn.}\ \sin\varphi-\text{arcsinlemn.}\ \cos.\ \varphi=\varpi-\frac{2\varphi\varpi}{\pi}.$$

$$\begin{aligned}\text{sinlemn.}\ \varphi = {} & \ 0{,}955\,005\,99\ \sin\ 1\varphi\\ & -0{,}043\,049\,50\ \sin\ 3\varphi\\ & +0{,}001\,860\,48\ \sin\ 5\varphi\\ & -0{,}000\,080\,40\ \sin\ 7\varphi\\ & +0{,}000\,003\,47\ \sin\ 9\varphi\\ & -0{,}000\,000\,15\ \sin 11\varphi\\ & +0{,}000\,000\,01\ \sin 13\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\text{lemn.} = {} & \ 0{,}456\,947\,2\quad \left(=\frac{\pi}{\varpi^2}\right)\\ & -\cdots\cdots\cdots\cos 2\varphi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{arcsinlemn.}\ \sin\varphi = {} & \frac{\varpi}{\pi}\varphi\\ & +\left(\frac{\varpi}{\pi}-\frac{2}{\varpi}\right)\sin 2\varphi\\ & +\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{\varpi}{\pi}-\frac{12}{\varpi}\right)\sin 4\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^5\varphi = {} & \ 0{,}477\,503\,1\cdots\sin\varphi\\ & +0{,}03\cdots\cdots\cdots\sin 3\varphi\cdots\end{aligned}$$

Die vorstehende Formel für sinlemn. φ ist nach den Angaben, die sich in Leiste neben Druckseite 92 finden, vervollständigt worden. Ebenda, neben Druckseite 93, steht:

$$\begin{aligned}\text{arcus cuius sinus lemn.} &= \sin\varphi\\ &= \varphi + 4^0{,}933\,559 \sin 2\varphi\\ &\quad + 0^0{,}317\,820 \sin 4\varphi\\ &\quad + 0^0{,}030\,313 \sin 6\varphi\\ &\quad + 0^0{,}003\,414 \sin 8\varphi\\ &\quad + 0^0{,}000\,422 \sin 10\varphi\\ &\quad + 0^0{,}000\,055 \sin 12\varphi\\ &\quad + 0^0{,}000\,007 \sin 14\varphi\\ &\quad + 0^0{,}000\,001 \sin 16\varphi.\end{aligned}$$

92) De lemniscata elegantissima omnes exspectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos quae campum prorsus novum nobis aperiunt*).

Jul. Gottingae.

Unter dem gleichen Datum (Juli 1798) beginnt Gauß die im Nachlaß noch vorhandenen von ihm als Schedae bezeichneten Notizheftchen, von denen das hier in Betracht kommende erste zur Zeit mit Aa bezeichnet ist. Aus diesem Heftchen hat Schering einen Teil der lemniskatischen Entwickelungen entnommen, die er in III, p. 413—432, unter dem Titel: „De curva lemniscata" zusammengestellt hat; siehe seine Einzelangaben in III, p. 494. Der wesentliche Fortschritt ist, daß Gauß jetzt sinlemn. φ und coslemn. φ als Quotienten einfach unendlicher trigonometrischer Produkte darstellt und diese Produkte dann in Reihen umsetzt, welche nach den trigonometrischen Funktionen der Multipla von φ fortschreiten, Es handelt sich also (immer nur erst für den speziellen Fall der Lemniskate) um die Einführung der Thetafunktionen. Gauß scheint auch diesen entscheidenden Schritt zunächst induktiv, auf Grund numerischer Rechnungen, vollzogen zu haben. So findet sich auf p. 25 des Heftchens Aa für den Zähler von sinlemn. φ zuerst folgende Formel:

$$\begin{aligned}P\varphi = 0{,}839\,329\,0109\,2669\,1403 &\sin\varphi\\ - \quad 1\,567\,3988\,6096\,6741 &\sin 3\varphi\\ + \quad 54\,6605\,6449 &\sin 5\varphi\\ - \quad 37 &\sin 7\varphi,\end{aligned}$$

und dann erst kommt inmitten von allerlei Zahlenrechnungen, die sich auf e^{π}, $e^{-\pi}$, $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ und $\frac{\pi}{\varpi}$ beziehen und die zum Teil in III, p. 431—432 abgedruckt sind, auf p. 27 die Formel:

$$\text{sinlemn.}\,\varphi = \sqrt{\frac{4}{e^{\frac{\pi}{2}}}}\cdot\frac{\sin\varphi - \frac{1}{e^{2\pi}}\sin 3\varphi + \frac{1}{e^{6\pi}}\sin 5\varphi\cdots}{1 + \frac{2}{e^{\pi}}\cos 2\varphi + \frac{2}{e^{4\pi}}\cos 4\varphi\cdots},$$

*) Zu den hier abgedruckten Nummern 92—100 wolle man das als Tafel beigegebene Faksimile vergleichen.

endlich auf p. 28 das Schlußresultat:

$$P\varphi = 2^{3/4}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\left(\frac{\sin\varphi}{e^{1/4\pi}} - \frac{\sin 3\varphi}{e^{9/4\pi}} + \frac{\sin 5\varphi}{e^{25/4\pi}} - \cdots\right),$$

$$Q\varphi = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{1/4}}\left(1 + \frac{2\cos 2\varphi}{e^{\pi}} + \frac{2\cos 4\varphi}{e^{4\pi}} + \cdots\right),$$

(Diese neuen $P\varphi$, $Q\varphi$ unterscheiden sich von den früher so bezeichneten Größen, also den *Al* der Lemniskate, um einen Exponentialfaktor; vergl. III, p. 416, letzte Zeile. Wegen der Zahlenrechnungen betr. e^{π} u. s. w. siehe No. 112.)

93) Solutio problematis ballistici.

Jul. Gottingae.

94) Cometarum theoriam perfectiorem reddidi.

Jul. Gottingae.

In dem bei No. 92 genannten Heftchen Aa findet sich auf p. 16 als Überschrift einer bald abbrechenden Entwickelung:

Scheda secunda, De motu cometarum.

95) Novus in analysi campus se nobis aperuit scilicet investigatio functionum etc.

Oct.?

In die Zwischenzeit zwischen No. 95 und No. 96 fallen zwei Briefe von Gauß an W. Bolyai (vom 29. Nov. 1798, bez. 9. Jan. 1799), in denen er über seine Arbeit an den Disquisitiones arithmeticae berichtet, bez. über die Langsamkeit klagt, mit welcher der kurz vorher begonnene Druck derselben fortschreitet (siehe Gesamtausgabe des Briefwechsels, p. 11, 12, 15). — Die Disq. a. sind erst im Sommer 1801 erschienen (Datum der Widmung an den Herzog Carl Wilhelm Ferdinand: Juli 1801). Übrigens ist das Datum (Oct.) bei No. 95 im Original kaum erkennbar.

1799.

96) Formas superiores considerare coepimus.

Febr. 14. Brunsvigae.

Das Datum auch in I, p. 476 (Bemerkung zu Art. 266 der Disq. a.). Es handelt sich um die ternären quadratischen Formen. Man vergl. das im Nov. 1798 begonnene Heftchen Ab des Nachlasses, wo p. 9 eine Reihe auf diese Formen bezüglicher Notizen folgendermaßen beginnt:

„Hujusmodi functiones:

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

formas superiores vocamus."

97) Formulas novas exactas pro parallaxi eruimus.

Apr. 8. Brunsvigae.

98) Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $=\frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, quare demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur.

Mai. 30. Brunsvigae.

Vergl. die Berechnung in III, p. 364.

99) In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.

Sept. Brunsvigae.

Auf diese Notiz wird in VIII, p. 162, Bezug genommen. Ebenda, p. 159—160, findet sich die in Vergleich kommende Stelle aus dem berühmten Briefe von Gauß an W. Bolyai vom 16. Dez. 1799 abgedruckt (Gesamtausgabe des Briefwechsels, p. 34, 35).

100) Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus.

Nov. Brunsvigae.

101) Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transcendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus: nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus.

Dec. 14. Helmstadii.

102) Medium arithmetico-geometricum ipsum est quantitas integralis. Dem[onstratum].

Dec. 23.

Zu den Nummern 100—102 kommen als Belege insbesondere die ersten Seiten eines jetzt mit Ac bezeichneten Notizbuches in Betracht, das im November 1799 begonnen wurde und dessen Titelblatt die Aufschrift trägt: „Varia, imprimis de integrali $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu\mu\sin\varphi^2}}$;" in Bd. III sind diesem Notizbuch einerseits eine Reihe lemniskatischer Entwickelungen, andererseits die Grundformeln für die Inversion des allgemeinen elliptischen Integrals entnommen, wovon sogleich noch (bei No. 111) die Rede sein wird; siehe die Angaben in III, p 494. Was speziell No. 102 angeht, so wolle man p. 10 und 11 des genannten Notizbuches vergleichen. Es heißt dort p. 10:

„Medium arithmetico-geometricum inter 1 et x per hujusmodi formulam exhiberi potest, apprime utilem quoties x est numerus satis magnus:

$$Mx=\frac{C(x-\alpha x^{-1}-\beta x^{-3}-\gamma x^{-5}-\cdots)}{\log(4x-ax^{-1}-bx^{-3}-cx^{-5}-\cdots)}.$$

Hic factor constans

$$C=\frac{\pi}{2},\quad \alpha=\frac{1}{4},\quad \beta=\frac{5}{64},\quad \gamma=\frac{11}{256},\quad \delta=\frac{469}{36\,384},\quad \varepsilon=\frac{1\,379}{2^{16}},$$

$$a=1,\quad b=\frac{9}{32},\quad c=\frac{19}{128},\quad d=\frac{4\,769}{49\,152}\text{“}$$

und eine Seite später

„Posito numeratore $=\dfrac{C}{Q}$ erit

$$Q=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^{-5}+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 x^{-7}+\cdots$$

$=$ pars ipsius $(x^2-\cos\varphi^2)^{-1/2}$, quae a φ est libera,

$$=\frac{1}{4\pi}\cdot \text{valor integralis} \int\limits_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(x^2-r^2)}}.\text{“}$$

Dieselbe Methode der Vergleichung der Potenzentwickelungen führt Gauß dann auf p. 12 zu dem einfacheren in No. 102 bezeichneten Resultate:

„Posito termino constante expressionis $(1+\mu\cos\varphi^2)^{-1/2}=A$ erit $M\sqrt{1+\mu}=\dfrac{1}{A}$.“

In Band III ist statt dieser vorläufigen Notizen die zusammenhängende Darstellung aufgenommen, welche Gauß (wie es scheint, bald hernach; siehe III, p. 492—493) in einem 1800 begonnenen Handbuche (welches zur Zeit mit Ba bezeichnet ist) unter dem Titel:

De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmetico-geometricorum

niedergeschrieben hat; siehe III, p. 361—371; der Zusammenhang zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und dem bestimmten elliptischen Integral wird dort ebenfalls aus der Identität der Potenzentwickelungen erschlossen (p. 370—371).

1800.

103) In theoria formarum trinariarum formas reductas assignare contigit.

Febr. 13.

Dasselbe Datum in I, p. 476 (Bemerkung zu Art. 272 der Disq. a.).

104) Series:

$$a\cos A+a'\cos(A+\varphi)+a''\cos(A+2\varphi)+\text{etc.}$$

ad limitem convergit, si a, a', a'' etc. constituunt progressionem sine mutatione signi ad 0 continuo convergentem. Demonstratum.

Apr. 27. Brunsvigae.

105) Theoriam quantitatum transcendentium:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha x^2)(1-\beta x^2)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.

Mai. 1. Brunsvigae.

106) Incrementum ingens huius theoriae invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur.

Mai. 22. Brunsvigae.

107) Iisdem diebus circa (Mai. 16) problema chronologicum de festo paschalis eleganter resolvimus. (Promulg[atum] in Zachii Comm. liter. Aug. 1800 p. 120, 299.)

Abgedruckt in VI, p. 73—79.

108) Numeratorem et denominatorem sinus lemniscatici (universalissime accepti) ad quantitates integrales reducere contigit; simul omnium functionum lemniscaticarum quae excogitari possunt evolutiones in series infinitas ex principiis genuinis haustae; inventum pulcherrimum sane nullique praecedentium inferius.

Praeterea iisdem diebus principia deteximus secundum quae series arithmetico-geometricae interpolari debent ita ut terminos in progressione data ad indicem quemcunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas exhibere iam in potestate sit.

Mai. ultim. Jun. 2. 3.

Der „Sinus lemniscaticus universalissime acceptus" ist jedenfalls die Umkehr des allgemeinen, in No. 105 genannten Integrals. Demgegenüber werden die in No. 110 genannten „transcendentes ellipticae" (dem heutigen Sprachgebrauch entgegen) als diejenigen Transcendenten aufzufassen sein, welche bei der Ellipse als solcher auftreten.

109) Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico-geometrici tum harmonico-geometrici, quorum nexum mutuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta.

Jun. 3. Brunsvigae.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Größen a und b ist nach der Ausdrucksweise der älteren Mathematiker diejenige Größe x, welche durch die Gleichung $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ gegeben ist.

110) Theoriam nostram iam ad transcendentes ellipticas immediate applicavimus.

Jun. 5.

111) Rectificatio Ellipseos tribus modis diversis absoluta.

Jun. 10.

Auch für die Nummern 105—111 bietet das soeben genannte Heftchen Ac die interessantesten Belege. Schering hat davon in III, p. 433—435, abgedruckt, was sich auf die Inversion des allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung bezieht (indem er dabei den Gesamttitel des Heftchens „Varia, imprimis de integrali $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \mu\mu \sin^2 \varphi}}$" als Spezialüberschrift wählte): man kann die von ihm mitgeteilten Formeln kurz dahin zusammenfassen, daß Gauß nunmehr für die allgemeinen elliptischen Integrale erster Gattung dieselben Entwickelungen findet, die er früher nur erst für den lemniskatischen Fall besessen hatte, wobei er die a l l g e m e i n e n e l l i p t i s c h e n T h e t a f u n k t i o n e n sowohl in Produktform wie in Reihenform benutzt

Das Heftchen enthält aber insbesondere auch Formeln für die Nullwerte der Theta (welche Schering in seine zusammenfassende Darstellung des arithmetisch-geometrischen Mittels III, p. 375—403, eingearbeitet hat). So findet sich auf p. 34 folgende Aussage:

$$„\text{Sit } \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\frac{M\cos\varphi}{M\sin\varphi}}} = z,$$

$$1 + 2z^4 + 2z^{16} + 2z^{36} + \cdots = p,$$

$$2z + 2z^9 + 2z^{25} + \cdots = q,$$

eritque

$$\frac{\cos {}^1\!/_2\,\varphi}{\sqrt{M\cos\varphi}} = p, \quad \frac{\sin {}^1\!/_2\,\varphi}{\sqrt{M\cos\varphi}} = q, \quad \varpi = \frac{\pi\cos\varphi}{M\cos\varphi}, \quad \varpi' = \frac{\pi\cos\varphi}{M\sin\varphi}\text{“.*)}$$

Übrigens sind außer dem Heftchen Ac im Nachlasse noch einige andere auf elliptische Funktionen bezügliche Stücke vorhanden, deren Entstehung auf Frühjahr und Sommer 1800 zu setzen sein dürfte, nämlich erstens ein Heftchen Ad, wesentlich Zahlenrechnungen enthaltend, und dann eine Reihe loser Blätter. Es muß einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben, aus der Menge dieser zusammenhangslosen und sich dabei häufig wiederholenden Notizen vielleicht doch noch einiges Interessante herauszufinden, was nicht schon in III oder VIII Aufnahme gefunden hat. Hier beschränke ich mich auf folgendes Detail. In VIII, p. 97, hat Fricke unter ausdrücklicher Bezugnahme auf die Tagebuchnotiz No. 105 eine Entwickelung, betreffend die

---

*) Über den Zusammenhang des arithmetisch-geometrischen Mittels mit den „Potenzreihen, in denen die Exponenten mit den Quadratzahlen fortschreiten“, gibt Schering in III, p. 493 oben, an, daß Gauß ihn „nach Mitteilungen über eine mündliche Äußerung desselben schon im Jahre 1794 gekannt zu haben scheine“. Es ist mir nicht gelungen, über diese mündliche Äußerung Genaueres zu erfahren; aber es kann kaum anders sein, als daß sich hier ein Mißverständnis eingeschlichen hat (wie denn ja auch Schering die ganze Angabe nur in sehr unsicherer Form macht). In der Tat scheint aus der Reihenfolge der Tagebuchnotizen mit Sicherheit hervorzugehen, daß Gauß die vorstehenden Formeln frühestens im Mai 1800 gefunden hat. Man überlege nur dieses: Gauß besaß die Thetafunktionen im lemniskatischen Falle seit Juli 1798 (siehe oben No. 92); hätte er nun andererseits den Zusammenhang des arithmetisch-geometrischen Mittels mit den Thetanullwerten vorher gekannt, so wäre No. 98 nach Inhalt und Form gleich unbegreiflich. —

Ich bringe diese Einzelheit hier zur Sprache, weil dieselbe für die Beurteilung der historischen Entwickelung von Gauß' Theorie der elliptischen Funktionen von entscheidender Bedeutung sein dürfte. Bisher war die Meinung die, daß Gauß zuerst von seiten des arithmetisch-geometrischen Mittels in die Theorie eingedrungen sei (vergl. III, p. 492—494, VIII, p. 102—105, sowie insbesondere den Aufsatz von P. Günther in den Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. 1894). Demgegenüber scheint sich aus den aufeinanderfolgenden Tagebuchnotizen folgende Auffassung zu ergeben: Den Anfang machen in jedem Betracht die lemniskatischen Funktionen. Dann wird Gauß (Ende 1799) sozusagen zufällig auf die Beziehung zum arithmetisch-geometrischen Mittel aufmerksam, die ebensowohl im lemniskatischen Falle, wie im allgemeinen Falle statt hat. Und hierin liegt für ihn die Veranlassung, die Theorie der allgemeinen elliptischen Funktionen aufzunehmen und genau nach dem Muster der lemniskatischen Funktionen durchzuführen, — andererseits aber den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels theoretisch zu vertiefen und nach allen für die Theorie der elliptischen Funktionen in Betracht kommenden Richtungen auszugestalten. —

Umkehrung des allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung, zum Abdruck gebracht, die in der Einführung der später von Weierstraß als Al_1 und Al_0 bezeichneten Potenzreihen gipfelt; diese Entwickelung wurde von Gauß auf die letzte Seite des Einbandes des in seiner Bibliothek befindlichen Buches: Maupertuisiana, Hamburg 1753, eingetragen, und es ist darum ihre Entstehungszeit nicht ohne weiteres anzugeben. Ich möchte hier ergänzend zufügen, daß sich die Reihenentwickelungen der Al in der Tat an einer Stelle der vorgenannten losen Blätter vorfinden, und zwar merkwürdigerweise gerade die beiden in VIII, p. 97, nicht genannten Reihen Al_2 und Al_3. Wegen der Al im Falle der Lemniskate vergl. die Bemerkung zu No. 61 oben.

Vielleicht kann man den bedeutsamen Inhalt der Nummern 105—111 in moderner Ausdrucksweise folgendermaßen resumieren: In No. 105 handelt es sich um die doppelte Periodizität des dort genannten allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung, aber nur erst in der Form, daß eine reelle und eine imaginäre Periode und damit eine Einteilung der komplexen Ebene in Periodenrechtecke gefunden werden. No. 106 bezieht sich auf die bei diesem Ausgangspunkte sich zunächst darbietenden Transformationen höherer Ordnung (bei denen ebenfalls nur erst rechteckige Figuren in Betracht gezogen werden). No. 108 bringt sodann die Reihenentwickelungen für Zähler und Nenner der Umkehrfunktion, insbesondere die allgemeinen Θ, ferner aber die Existenz der Teilungsgleichungen. In No. 109 hat Gauß die Prinzipien der allgemeinen linearen Periodentransformation gefunden (bei der die Rechtecke durch irgendwelche Parallelogramme ersetzt werden). Endlich folgt in No. 110, 111 die Anwendung auf Integrale der zweiten Gattung.

112) Calculum numerico-exponentialem omnino novum invenimus.

Jun. 12.

Es handelt sich vermutlich um die numerischen Berechnungen von Potenzen der Zahl e (mit Hilfe der Primzahllogarithmen, insbesondere der 48-stelligen Wolframschen), wie sie in III, p. 426—431, aus dem Nachlasse abgedruckt sind.

113) Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim frustra tentatum solvimus.

Oct. 25.

114) Felix fuit dies quo multitudinem classium formar[um] binar[iarum] per triplicem methodum assignare largitum est nobis; puta:

1. per prod[uctum] infin[itum]
2. per aggregatum infinitum
3. per aggregatum finitum cotangentium seu logarithm[orum] sinuum.

Nov. 30. Brunsvigae.

115) Methodum quartam ex omnibus simplicissimam deteximus pro deter[minantibus] negativis ex sola multit[udine] numeror[um] ϱ, ϱ', etc. petitam, si $Ax+\varrho$, $Ax+\varrho'$ etc. sunt formae lineares divisor[um] for[mae] $\square + D$.

Dec. 3. Brunsvigae.

Mit diesen Nummern 114, 115 wolle man in I, p. 476, die Anmerkung zu Art. 306, X der Disq. a. vergleichen.

Ex voto nobis ac sic successit ut nihil amplius desiderandum supersit. Nov. 30 — Dec. 3. 1800.

In einem Additamentum zu Art. 306, X der Disq. a. äußert sich Gauß (I, p. 466) über denselben Gegenstand folgendermaßen: *Quaestionem hic propositam plane solvere nuper successit.*

1801.

116) Impossibile esse ut sectio circuli ad aequationes inferiores quam theoria nostra suggerit reducatur demonstratum.

Apr. 6. Brunsvigae.

Vergl. Disq. a., Art. 365 (I, 462), die gesperrten Worte: Omnique rigore demonstrare possumus, has aequationes elevatas nullo modo nec evitari nec ad inferiores reduci posse.

117) Iisdem diebus Pascha Judaeorum per methodum novam determinare docuimus. *(Apr. 1.)*

Vergl. die Veröffentlichung in Zach's monatlicher Korrespondenz, Mai 1802 (abgedruckt in VI, p. 80—81).

118) Methodus quinta theorema fundamentale demonstrandi se obtulit adiumento theorematis elegantissimi theoriae sectionis circuli. Puta

$$\sum \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} \frac{n^2}{a} P = \begin{array}{r|r|c|c} +\sqrt{a} & 0 & 0 & +\sqrt{a} \\ +\sqrt{a} & +\sqrt{a} & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{prout:} \qquad a \equiv \quad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \quad (\text{mod. } 4)$$

substituendo pro n omnes numeros a 0 usque ad $(a-1)$.

Mai. medio. Brunsvigae.

Vergl. unten, No. 123.

119) Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi.

Sept. m[edio]. Brunsvigae.

Zu den von hier an immer zahlreicher werdenden astronomischen Notizen des Tagebuchs wolle man außer Bd. VI der Werke und der Theoria Motus vor allen Dingen den Briefwechsel von Gauß und Olbers vergleichen, der mit dem 18. Januar 1802 beginnt.

120) Theoriam motus Lunae aggressi sumus.

Aug.

Im Nachlasse vorhanden.

121) Formulas permultas novas in Astronomia theorica utilissimas eruimus.

Oct.

1802. 1803. 1804.

122) Annis insequentibus 1802, 1803, 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est, memoriae exciderunt.

In die vorgenannten Jahre fallen nicht nur Gauß' Bahnbestimmungen von Ceres, Pallas und Juno, sondern auch der Beginn seiner Störungsrechnungen. Genauere Angaben über Gauß' Arbeiten zur Störungstheorie findet man im „Vierten Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken" in den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, 1901, Geschäftliche Mitteilungen. (Abgedruckt in Bd. 55 der Math. Annalen, p. 139—142.)

1805.

123) Demonstratio theorematis venustissimi supra 1801 Mai. commemorati quam per 4 annos et ultra omni contentione quaesiveramus tandem perfecimus. Comment[ationes] rec[entiores], I.

Aug. 30.

Vergl. oben, No. 118. — Die zugehörige Abhandlung (Summatio serierum quarundam singularium) wurde der K. Ges. d. Wiss. am 24. August 1808 überreicht. Siehe II, p. 9ff. sowie p. 155—158. — Vergl. weiter einen Brief von Gauß an Olbers vom 3. September 1805 (Gesamtausgabe des Briefwechsels No. 133, p. 268, — die in Betracht kommende Stelle ist auch in Scherings Festrede von 1877 abgedruckt), wo Gauß seine fortgesetzten vergeblichen Bemühungen um den Beweis des Theorems und seinen endlichen Erfolg in lebhaftester Weise schildert.

124) Theoriam interpolationis ulterius excoluimus.

Nov.

Vergl. die in III, p. 265—327, abgedruckte Abhandlung aus dem Nachlaß: Theoria interpolationis methodo nova tractata, deren ersten Entwurf Schering, ebenda p. 328, auf Oktober 1805 setzt.

1806.

125) Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem elementa determinandi novam perfectissimam deteximus.

Jan.

126) Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum eveximus.

Mai.

127) Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi.

Apr.

128) Eodem circiter tempore resolutionem functionis $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ in factores quatuor absolvimus.

1807.

129) Methodus nova e quatuor planetae locis geocentricis, quorum duo extremi sunt incompleti, eius orbitam determinandi.

Jan. 21.

130) Theoria residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta.

Febr. 15.

Gauß setzt in seiner ersten Kommentation über die Theorie der biquadratischen Reste (1828, siehe II, p. 67, 165), wie auch in dem unten bei No. 144 abgedruckten Satze eines Briefes an Dirichlet, den Anfang seiner Beschäftigung mit den biquadratischen Resten auf 1805.

Vergl. übrigens zu den Nummern 130—133 des Tagebuchs die in VIII, p. 3—11 und p. 15—19 abgedruckten Stücke des Nachlasses, sowie die Erläuterungen von Fricke auf p. 11—14 und p. 19—20 daselbst.

131) Ulterius exculta et completa reddita. Demonstratione adhuc eget.

Febr. 17.

132) Demonstratio huius theoriae per methodum elegantissimam inventa ita ut penitus perfecta sit nihilque amplius desideretur. Hinc simul residua et non residua quadratica egregie illustrantur.

Febr. 22.

133) Theoremata, quae theoriae praecedenti incrementa maximi pretii adjungunt, demonstratione eleganti munita (scilicet pro quibusnam radicibus primitivis statuere oporteat ipsum b positivum pro quibusque negativum, $a^2 + 27b^2 = 4p$, $a^2 + 4b^2 = p$).

Febr. 24.

134) Demonstrationem omnino novam theorematis fundamentalis principiis omnino elementaribus innixam deteximus.

Mai. 6.

Vergl. den Brief von Gauß an Olbers vom 12. Mai 1807 (No. 173 der Gesamtausgabe, p. 360). — Nach der durch das Tagebuch gegebenen Zählung handelt es sich bei der vorliegenden Nummer um den sechsten Gaußischen Beweis des Reziprozitätsgesetzes quadratischer Reste. Da aber die zugehörige Abhandlung (siehe II, p. 1ff, sowie p. 151—154) der K. Gesellschaft d. W. am 15. Januar 1808 vorgelegt wurde, also früher als die „Summatio serierum quarundam singularium" (No. 123), so wird dieser Beweis häufig als fünfter zitiert. Vergl. Gauß' eigene Angaben in II, p. 153.

1808.

135) Theoria divisionis in periodos tres (art. 358) ad principia longe simpliciora reducta.

Mai. 10.

Die Artikelnummer bezieht sich auf die Disquisitiones arithmeticae.

136) Aequationem

$$X - 1 = 0,$$

quae continet omnes radices primitivas aequationis

$$x^n - 1 = 0,$$

in factores cum coefficientibus rationalibus discerpi non posse demonstr[atum] pro valoribus compositis ipsius n.

Jun. 12.

Die Gleichung sollte wohl $X = 0$ heißen. (D.)

137) Theoriam formarum cubicarum, solutionem aequ[ationis]

$$x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz = 1$$

aggressus sum.

Dec. 23.

Vergl. die Ausführungen bei Fricke in VIII, p. 24—26, sowie eine Bemerkung von Schering in II, p. 398. (Die dort zitierte, in II, p. 243—265, abgedruckte Abhandlung: „Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio", soll nach der Bemerkung von Dedekind auf p. 265 in der Tat aus dem Jahre 1808 stammen.)

1809.

138) Theorema de residuo cubico 3 per methodum specialem elegantem demonstratum per considerat[iones] valorum $\frac{x+1}{x}$ ubi terni semper habent a, $a\varepsilon$, $a\varepsilon^2$ exceptis duobus qui dant ε, ε^2, hi vero sunt

$$\frac{1}{\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{3}; \quad \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\varepsilon - 1}{3}$$

adeoque productum $\equiv \frac{1}{3}$.

Jan. 6.

Hier ist ε nicht als dritte Wurzel aus 1, sondern als rationale Wurzel der Kongruenz $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 \equiv 0$ (mod. p) aufzufassen (wo p eine natürliche Primzahl von der Form $3n + 1$ bedeutet). (D.)

139) Series ad media arithmetico-geometrica pertinentes fusius evolutae.

Jun. 20.

140) Quinquesectionem pro mediis arithm[etico]-geom[etricis] absol[vimus].

Jun. 29.

Man vergl. hierzu die Abhandlung „Zur Theorie der neuen Transcendenten", die in III, p. 446—460, abgedruckt ist. Das betr. Manuskript findet sich (wie auch Schering in III, p. 494, hervorhebt) in einem Handbuche unmittelbar nach einer astronomischen Rechnung, der die Bemerkung beigefügt ist; „geendigt den 28. April 1809" (dieses Handbuch trägt z. Z. die Bezeichnung Bd). Dem Datum nach kann also die Abhandlung mit den vorstehenden beiden Tagebuchnotizen in Zusammenhang gebracht werden; und in der Tat scheint auch inhaltlich eine Beziehung vorzuliegen. Übrigens ist nach den Darlegungen von Schering in III, pag. 494 anzunehmen, daß Gauß bereits 1808 zu den elliptischen Funktionen zurückgekehrt ist und diejenigen Entwickelungen begonnen hat, die sich auf Identitäten zwischen Θ-Funktionen stützen.

1812.

141) Catalogum praecedentem per fata iniqua iterum interruptum initio anni 1812 resumimus. In mense Nov. 1811 contigerat demonstrationem theorematis fundamentalis in doctrina aequationum pure analyticam completam reddere; sed quum nihil chartis servatum fuerit, pars quaedam essentialis memoriae penitus exciderat. Hanc per satis longum temporis intervallum frustra quaesitam tandem feliciter redinvenimus.

Febr. 29.

Es handelt sich um den sogenannten „zweiten" Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, den Gauß der K. Gesellschaft d. W. am 7. Dezember 1815 vorlegte. Vergl. III, p. 31 ff, sowie p. 105—106.

142) Theoriam attractionis sphaeroidis elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus.

Sept. 26. Seebergae.

Gemeint ist Sternwarte Seeberg bei Gotha.

143) Etiam partes reliquas eiusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus.

Oct. 15. Gottingae.

Die Abhandlung über die Attraktion der elliptischen Sphäroide wurde der K. Gesellschaft d. W. am 18. März 1813 überreicht. Vergl. V, p. 1 ff und p. 279—286.

1813.

144) Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum generalis, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die quo filius nobis natus est.

Oct. 23. Gottingae.

Hiermit wolle man eine Stelle in dem Briefe von Gauß an Dirichlet vom 30. Mai 1828 vergleichen, der in II, p. 516—518 abgedruckt ist. Es heißt dort p. 516 im Anschluß an die 1825 publizierte erste Commentatio über die biquadratischen Reste:

„Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Kommentation noch *nicht* zu rechnen ist) seit etwa 14 Jahren — (obwohl ich wünsche und hoffe, an letzteren, den Beweisen, noch einiges vereinfachen zu können) — etc. etc."

Siehe übrigens die Bemerkung zu No. 130.

145) Subtilissimum hoc est omnium eorum quae umquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarumdam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

1814.

146) Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus, $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae

$$1 \equiv x^2 + y^2 + x^2y^2 \pmod{a+bi}$$

inclusis $x=\infty$, $y=\pm i$; $x=\pm i$, $y=\infty$ fit $=(a-1)^2+b^2$.

Jul. 9.

Schlußbemerkung: Hinter der Nummer 146, mit der die Aufzeichnungen des Tagebuchs als solche schließen, sowie auch zwischendurch eingeheftet, finden sich im Original noch einige Blätter, die mit verschiedenartigen, vielfach nicht mathematischen Notizen bedeckt sind; eine besondere Bedeutung scheinen dieselben nicht zu besitzen. Auf der Rückseite des Umschlags endlich stehen (in eine Falte hineingeschrieben) die folgenden Sentenzen:

„Nil Desperare"
„Habeant sibi"
„QUA EXEAS HABES".

Sachregister.

(In dieses Register nicht mit aufgenommen sind die Nummern: 13, 25, 42, 43, 83, 95, deren Bedeutung unklar blieb.)