

Ueber die Anwendung der *Hansen'schen* Formeln zur Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten. Von Herrn *C. Powalky*.

Einleitung.

Die meisten Berechner der kleinen Planeten bedienen sich der Methode der Berechnung der Störungen rechtwinkliger Coordinaten, in der Weise, wie sie von Herrn Prof. *Encke* im Anhang des Jahrbuchs für 1858 auseinandergesetzt ist, und mit Benutzung der in den *Astron. Nachr.* abgedruckten Hilfstafeln, welche die Planeten-Coordinaten von 1845 bis zur Jetztzeit fortgesetzt enthalten; es ist in Anregung gebracht worden, diese Tafeln auch für frühere Zeiten zur Benutzung für Störungsrechnungen bei Cometen fortzusetzen. — Gewiss ist anzuerkennen, dass durch diese Methode ausserordentlich viel erreicht worden ist, und dass wir dies ihrer Anschaulichkeit und Einfachheit, sowie der ausführlichen und klaren Darlegung derselben verdanken. Der Vorzug der unmittelbaren Anschaulichkeit, dass sie durch die geringste Summe von einfachen Schlüssen zur Erkenntniss des Hauptgesetzes der Astronomie führt, wird auch in Zukunft die Anwendung dieser Methode — wenn es sich darum handelt, die Wirkung der anziehenden Körper auf einen andern successive von einer Erscheinung zur nächsten und dritten durch Rechnung zu verfolgen und dann durch Vergleichung mit den Beobachtungen zur eigenen Erkenntniss zu gelangen — als recht wünschenswerth erscheinen lassen.

Allein wenn die Aufgabe vorliegt, für eine längere Zeit oder für eine grössere Zahl von Körpern die Störungen zu ermitteln, so wird man auch den Verfolg einer weiteren analytischen Entwicklung, wenn man dadurch zu kürzeren und ebenso sicheren Rechnungen gelangen kann, nicht scheuen dürfen. In solchen Fällen ziehen auch einige Rechner noch

die ältere Methode der „Variation der Constanten“ vor, die durch vielfache praktische Anwendung bereits erprobt ist, während die von *Hansen* in den № 799 u. ff. der *Astronom. Nachr.* gegebene Methode, nach welcher nur die erste Potenz der störenden Kräfte berücksichtigt und neue Elemente aus den Störungen abgeleitet werden sollen, sobald man befürchten muss, dass das Quadrat der störenden Kräfte eine merkliche Wirkung äussern könnte, wenigstens dem mit solchen Rechnungen noch nicht sehr Vertrauten bedenklich erscheinen mag. In der späteren Abhandlung:

„Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten“

findet man eine klarere und weiter eingehende Entwicklung der strengen Formeln, doch ohne weitere Anleitung zu deren Gebrauch; auch ist mir nicht bekannt, dass dieselben zur Rechnung schon angewandt worden seien. Dadurch dass hier statt der Störungen des Log. Rad. Vect. die des Radius Vectors selbst berechnet werden sollen, fällt zwar ein Glied von der Ordnung des Quadrates aus der Formel für das zweite Differential weg; aber die Berechnung des ersten Differentiales der Störung der mittleren Anomalie oder der Zeit verliert an Einfachheit, und wenn man bei Fortsetzung der Rechnung die Störungswerte anbringen will, wie es die strenge Rechnung erfordert, so ist das weniger umständlich, wenn man die Störung des Log. Rad. V. berechnet hat. —

I.

Durch einige Entwicklungen in der von *Hansen* in № 799 der *Astron. Nachr.* gegebenen strengen Gleichung:

$$(11.) \frac{d^2 w}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3} (1 - 2c^w + c^{3w}) - \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{r^2} c^{3w} \left(\frac{d\delta C}{n_0 dt}\right)^2 + \frac{2k^2}{r^3} c^w h \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt - \frac{h^2 e \sin f c^{-w}}{r} \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) + \frac{k^2}{r} \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

nach Einsetzung des Werthes von $\frac{d\delta C}{dt}$ aus Gleichung

$$(10.) \frac{d\delta C}{dt} = c^{-2w} n h \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt + n_0 (c^{-2w} - 1)$$

erhält man leicht:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3} (1 - c^{-w}) + \frac{2k^2}{r^3} c^{-w} h \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt + \frac{k^2}{r^3} c^{-w} h^2 \left(\int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt\right)^2 - \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{h^2 e \sin f}{r} c^{-w} \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) + \frac{k^2}{r} \left(\frac{d\Omega}{dr}\right).$$

Setzt man in diese Gleich. die Werthe von $\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right)$ und von $\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ ein, bezeichnet hier zur Abkürzung $m' \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3}\right) r' \cos B'$ mit p und $\Pi - L'$ mit w' , so wird, da

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) &= p \cos(\bar{f} + w') - m' \frac{r}{\Delta^3} \\ \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) &= -p r \sin(\bar{f} + w') \end{aligned} \right\}$$

$$\text{und, wegen } \bar{r} = \frac{a \cos^2 \Phi}{1 + e \cos f} \text{ und } r = \bar{r} c^w, h = \frac{k}{\sqrt{a \cos \Phi}}$$

$$\frac{k^2}{r} = c^{-w} h^2 (1 + e \cos f) \text{ ist,}$$

$$-\frac{h e^2 \sin \bar{f} c^{-w}}{r} \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) + \frac{k^2}{r} \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = h^2 e p \sin \bar{f} \sin(\bar{f} + w') c^{-w} + h^2 e p \cos \bar{f} \cos(\bar{f} + w') - \frac{k^2 m'}{\Delta^3}$$

$$= c^{-w} (h^2 p \cos(\bar{f} + w') + h^2 e p \cos w') - \frac{k^2 m'}{\Delta^3}$$

Entwickelt man dann noch $c^{-2w} - 1$ und $1 - c^{-w}$ in Reihen, so erhält man die Ausdrücke:

$$c^{-2w} - 1 = -2w c^{-w} + \frac{1}{3} w^3 + \frac{1}{5} w^5 - \dots$$

$$1 - c^{-w} = w e^{-\frac{1}{2}w} + \frac{1}{24} w^3 - \frac{1}{48} w^5 + \dots,$$

in denen man unbedenklich die Glieder dritter und höherer Ordnung ganz übergehen und statt der theoretisch-strengen Formeln (10) und (11) mit Sicherheit anwenden kann:

$$(10)^* \frac{d\delta C}{dt} = c^{-2w} n h \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt - 2 n w c^{-w}$$

$$(11)^* \frac{d^2 w}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3} w c^{-\frac{1}{2}w} + 2 \frac{k^2}{r^3} h \left\{ h \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt + \frac{1}{2} \left(h \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt \right)^2 \right\} c^{-w} - \frac{k^2 m'}{\Delta^3}$$

$$+ h^2 m' \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3} \right) \left(r' \cos B' \cos(\bar{f} + w') + e r' \cos B' \cos w' \right) - \left(\frac{dw}{dt} \right)^2.$$

2.

In der logarithmischen Rechnung ist die Berücksichtigung der Corrections-Factoren c^{-2w} , c^{-w} und $c^{-\frac{1}{2}w}$ äusserst einfach und erfordert nur einige Aufmerksamkeit mehr; auch die noch kleineren Correctionen für $\left(h \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt \right)^2$ und $\left(\frac{dw}{dt} \right)^2$ sind sehr leicht zu berücksichtigen. Das Anbringen der Störungswerthe δC und w im Verlauf der Rechnung hat auch nicht die geringste Schwierigkeit, und es ist eine nicht kleine Erleichterung, dass man durch Fortsetzung der Differenzbildung von $\frac{d^2 w}{dt^2}$ und $\frac{d\delta C}{dt}$ diese Werthe meist für eine grössere Zahl von Intervallen mit hinreichender Genauigkeit im Voraus ermitteln kann. Die fortgesetzte Berücksichtigung der Störungen z_0 ist etwas umständlicher; in den meisten Fällen sind die Breitenstörungen aber so gering, dass sie auf die Störungsrechnung keinen Einfluss haben, und es ist leicht zu erkennen, wenn sie berücksichtigt werden müssen. Im Allgemeinen wird dies der Fall sein, wenn der Ort des Planeten in der Jupitersnähe von der Ebene der Bahn desselben stark abweicht; dann* erhalten zugleich die anderen Störungen stärkeren Zuwachs, und es ist zur Erleichterung der Rechnung gerathen, die Störungen in Störungen der Elemente zu verwandeln. Diese Aufgabe ist nach den in *Nr* 800 der Astron. Nachr. gegebenen Formeln durch die Rechnung leicht und in aller Strenge zu lösen; obgleich, wenn dies zu häufig erforderlich wäre, die Vortheile dieser Methode sehr beeinträchtigt sein würden. Diejenigen Planeten aber, die dem Jupiter so nahe kommen, haben auch längere Umlaufs-

zeiten, so dass sie erst nach 7—8 Jahren wieder zu diesem Punkt gelangen. Eine Umwandlung der Elemente nach solchen Zeiträumen ist aber auch aus anderen Gründen bei jeder Art der Berechnung specieller Störungen wünschenswerth, weil erstens die Rechnung dadurch einen Abschluss erhält, nach welchem sie leicht von Anderen übernommen und fortgesetzt werden kann, zweitens weil die kleinen Ungenauigkeiten in der letzten Stelle der berechneten Differentiale mit der Zeit so anwachsen, dass die Störungswerthe ungenau werden müssen. Einmal wird dieser letztere Fall eintreten, wenn man genöthigt ist, mit ungenauen Elementen die Rechnung zu beginnen; wie das in der Regel vorauszusehen ist, wenn die Elemente aus Beobachtungen von nur einer oder zwei Erscheinungen abgeleitet sind. Nimmt man dann nach Verbesserung der Elemente die Umwandlung derselben vor, so erlangt man dadurch den Vortheil, dass man zum Mindesten nur einen geringeren Theil der Störungsrechnung zu wiederholen braucht. Setzt man aber auch die Elemente als genau voraus, so ist doch eine Einschränkung in Bezug auf die Anzahl der zu berechnenden Decimalstellen geboten.

3.

Um dies Verhältniss von vornherein wenigstens zu übersehen, kann man hier, wo nur ein indirectes Glied zu berücksichtigen ist, da die Excentricitäten klein sind, für

$$D^2 z = -\frac{\lambda^2 k^2}{r^3} z + v \quad (\text{wo } \lambda \text{ das Intervall bezeichnet})$$

setzen:

$$H = (5) \zeta K$$

$$D^2 w_1 = G + \frac{(8)}{r^3} w_1 10^{-\frac{1}{2} w_1} + (D w_1)^2$$

$$D \delta M = SF 10^{-2w} + (7) w_1 10^{-w}$$

$$D^2 u = H + \frac{(8)}{r^3} u^* \left[+ \frac{G}{\mathfrak{M} i} u 10^{w_1} + F(Du - u D w_1) \right]$$

$$\left[D\Gamma = \frac{1}{\sin 1^u} \cdot \frac{h}{2 \lambda k^2 \cos^3 i} H u \right]$$

$$w_i^{(i)} = \Sigma \Sigma D^2 w_i^{(i)} + \frac{1}{12} D^2 w_i^{(i)} - \frac{1}{240} \Delta^2 D^2 w_i^{(i)} + \dots$$

$$u^{(i)} = \Sigma \Sigma D^2 u^{(i)} + \frac{1}{12} D^2 u^{(i)} - \dots$$

C. Zur Umwandlung der Störungen in Störungen der Elemente.

(Die neuen Elemente sind durch unten gestrichene Buchstaben bezeichnet.)

Für die Zeit f (gerechnet in Tagen von der Epoche aus) ist:

$$\bar{M} = M + \delta C + t \mu$$

$$\bar{E} - e \sin \bar{E} = \bar{M}$$

$$a(1 - e \cos \bar{E}) = \bar{r}$$

$$tg \frac{1}{2} \bar{E} tg (45^\circ + \frac{1}{2} \Phi) = tg \frac{1}{2} \bar{v}$$

$$\frac{d\delta C}{\mu dt} = \frac{d\delta z}{dt} = \frac{D\delta C}{\mu \lambda}$$

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{Dw_1}{\lambda}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{Du}{\lambda}$$

$$\alpha = \left(1 + \frac{d\delta z}{dt} \right)^2 10^{3w_1} - 1$$

$$\beta = \frac{\bar{r}}{h_0} \left(1 + \frac{d\delta z}{dt} \right) 10^{3w_1} \frac{dw_1}{dt}$$

$$\eta = \alpha \sin \bar{v} - \beta \cos \bar{v}$$

$$\xi = \alpha \cdot \frac{a \cos^2 \Phi}{r} \cos \bar{E} + \beta \sin \bar{v}$$

$$e_1 \sin(\chi_1 - \pi) = \eta, \quad v_1 = \bar{v} - (\chi_1 - \pi)$$

$$e_1 \cos(\chi_1 - \pi) = e + \xi, \quad tg \frac{1}{2} v_1 \cotg (45^\circ + \frac{1}{2} \Phi_1) = tg \frac{1}{2} E_1$$

$$\frac{2e\xi + \eta^2 + \xi^2}{\cos^2 \Phi} = \mathfrak{D}, \quad E_1 - e_1 \sin E_1 = M_1$$

$$\mu_1 = \mu \frac{(1 - \mathfrak{D})^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{d\delta z}{dt} \right)^3 10^{6w_1}} = \mu (1 + \varepsilon)$$

*) Die hier in eckigen Klammern stehenden Glieder werden nur in sehr seltenen Ausnahmefällen Bedeutung erlangen. Sie sind nach Hansen's Formeln in „Auseinandersetzung etc.“ hier nur in die zur Berechnung geeignete Form gebracht.

Zur genauesten Berechnung von $\left(1 + \frac{d\delta z}{dt} \right)$, $(1 - \mathfrak{D})$ und von α und ε kann man sich der bekannten Reihen bedienen:

$$\log(1+x) = \mathfrak{M} \left(x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots \right)$$

$$1+y = 1 + \frac{\log(1+y)}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\log(1+y)}{\mathfrak{M}} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\log(1+y)}{\mathfrak{M}} \right)^3 + \dots$$

$$\gamma = \frac{u}{a \cos^2 \Phi 10^{w_1}} \cdot \frac{1}{\sin 1^u}$$

$$\delta = \frac{\frac{r}{\lambda} \left\{ \frac{du}{dt} - \frac{u}{\mathfrak{M}} \frac{dw_1}{dt} \right\}}{\left(1 + \frac{d\delta z}{dt} \right) 10^{w_1}} \cdot \frac{1}{\sin 1^u}$$

$$p = -\gamma \{ \cos(\bar{v} + \pi - \Omega) + e \cos(\pi - \Omega) \} + \delta \sin(\bar{v} + \pi - \Omega)$$

$$q = \gamma \{ \sin(\bar{v} + \pi - \Omega) + e \sin(\pi - \Omega) \} + \delta \cos(\bar{v} + \pi - \Omega)$$

$$i_1 = i + \frac{q}{\cos i} + \frac{p^2}{2 \sin i \cos i} + \frac{\sin i}{2 \cos^3 i} q^2$$

$$\Omega_1 = \Omega + \frac{p}{\sin i \cos i} - \frac{1 - \frac{3}{2} \sin^2 i}{\sin^2 i \cos^3 i} p q + F$$

$$\pi_1 = \chi_1 + \frac{tg \frac{1}{2} i}{\cos i} p + F.$$

Eine theilweise Prüfung der Rechnung gewährt die Uebereinstimmung, wenn man nach der Verwandlung die heliocentrische Länge, Breite und den Radius Vector für die neue Epoche, sowohl aus den früheren Elementen und den Störungen, wie aus den neuen Elementen ableitet.

In den letzten drei Ausdrücken werden die letzten Glieder von der Ordnung des Quadrates nur in seltenen Fällen wirklich zu berechnen sein. M_1 wird nach den vorhergehenden Formeln am leichtesten und stets mit genügender Sicherheit direct berechnet.

5.

Um noch die Bedeutung der Correctionsfactoren und Correctionen in den Gleichungen (10*) und (11*) zu zeigen, führe ich einige Zahlen aus meinen Störungsrechnungen für Aglaja an.

Die osculirenden Elemente galten für 1858 Febr. 6 und die Störungen wurden in Intervallen von 45 Tagen berechnet; sie wuchsen sehr schnell, da der Planet Mitte Juli sich in der Jupitersnähe befand. 1859 Juni 17 waren dieselben:

$$\delta C = -7'17''12; \quad \frac{d\delta C}{dt} = -2''7162;$$

$$w_1 = +0,0006735,6 \quad \log \frac{dw_1}{dt} = 4,11823$$

$$u = -0,0010445 \quad \log \frac{du}{dt} = 4,51158$$

Es betragen also die Correctionen nach den Gleichungen (10*) und (11*)

$$\log c^{-w} = -67; \log c^{-\frac{1}{2}w} = -34$$

und $\log c^{-2w} = -135$ Einheiten der 5^{ten} Decimale.

Ausser anderen Gründen machte der Betrag des Störungswerthes u die Verwandlung der Elemente rathsam. Mit den neuen Elementen wurde die Störungsrechnung mit demselben Intervall fortgesetzt bis 1864. In dieser ganzen Zeit blieb u stets so klein, dass es in der Störungsrechnung unberücksichtigt bleiben konnte, denn es erreichte nicht den Werth einer Minute und ist am Schlusse der Rechnung im Abnehmen. n_1 erreichte sein erstes Maximum im Anfang 1862 = -0,0011100,00, die Correction für $\frac{k^2}{r^3} h^2 \left(\int \left(\frac{d\Omega}{dv} \right) dt \right)^2$ betrug im Maximum im $\log SF$ -16 Einheiten der 5^{ten} Stelle. $\left(\frac{dw}{dt} \right)^2$ hatte ich anfangs vernachlässigt, um es am Schlusse der Rechnung gesondert (durch eine leichtausführbare Rechnung) in Betracht zu ziehen. Der Einfluss dieses Gliedes betrug am Schlusse 0⁹ in δM . Das Maximum des Werthes von δM betrug 33'2; doch ist zu bemerken, dass die Grösse dieses Werthes zur Vermehrung der Schwierigkeit der Rechnung gar Nichts beiträgt. Das indirecte Glied konnte bei der ganzen Rechnung stets im Voraus so genau erkannt werden, dass nur hie und da die Hundertstel der 7^{ten} Decimale und die letzte Stelle von $\log n_1$ corrigirt ist. Durch Fortsetzung der Differenzenbildung konnte ich die Störungswerthe immer so genau im Voraus ermitteln, dass die Berechnung von F , G und H für 6—7 Intervalle zugleich ausgeführt werden konnte. —

6.

Die Anwendbarkeit der Formeln (10*) und (11*) auch auf die strenge Berechnung der Störungen eines Cometen scheint mir ausser Frage zu stehen. Bei grösseren Neigungen der Bahn desselben und in grösserer Nähe des Jupiter wird natürlich die Rechnung weit mühsamer; man wird kleinere Intervalle nehmen und die Elemente, zur Erleichterung

der Rechnung, öfter umwandeln müssen. Man wird ferner bei der Fortsetzung der Rechnung in (4. B.) für L' , $\sin B'$ und II Correctionen anbringen müssen. Endlich müsste auch T und u mit Zuziehung der dort in [-] eingeschlossenen Glieder berechnet werden. Demnach zweifle ich nach den bisherigen Erfahrungen nicht, dass auch hier, und ganz besonders in den schwierigeren Fällen, als Vorzüge dieser Methode vor anderen bisher angewandten, weit leichtere Ausführbarkeit, verbunden mit der strengsten Genauigkeit, sich herausstellen werde. Nach Herstellung zweckmässiger Planeten-Tafeln für Jupiter und Saturn, mittelst deren man, mit der Zeit als Argument eingehend, von 20 zu 20 Tagen, die wahren Längen in der Bahn und Radienvectoren ausnehmen könnte, und nach Berechnung der Störungen von 100 zu 100 Tagen für das verflossene Jahrhundert dürften dann auch weitläufigere Vorbereitungsrechnungen fast überflüssig erscheinen. Ob man jene Tafeln und die Störungen von Jupiter und Saturn in jetziger Zeit nach den vorhandenen *Bouvard*-schen Elementen und Störungstafeln berechnen soll, oder ob es nicht gerathener sei, zuvor die genauere Berechnung der Störungsglieder und die Berichtigung der Elemente durch Vergleichung mit Beobachtungen bis zur Gegenwart vorzunehmen, ist eine andere Frage, deren Beantwortung zunächst davon abhängt, ob Einer von den wenigen Astronomen, die einer solchen Aufgabe bereits gewachsen sind, Zeit und Neigung hat, sie vorzunehmen und durchzuführen. Dass eine solche Arbeit ausgeführt, für Fortbildung der Wissenschaft weit grösseren Werth haben würde, als die Berechnung der absoluten Störungen eines der kleinen Planeten, wird Niemand bestreiten, indem leicht einzusehen ist, dass die Bearbeitung der periodischen Cometen nach diesem weit genauere Resultate verspricht; denn wenngleich auch ohnedies schon sehr werthvolle Resultate durch die Bearbeitung von einigen jener Körper erreicht und noch zu erreichen sind, so wird doch die anderer den minder durchgreifenden Bemühungen keinen Triumph gewähren.

Berlin, 1863 Sept. 5.

C. Pöwally.

Elemente des Cometen II. 1863.

Aus folgenden drei Berliner Beobachtungen dieses Cometen:

1863	Mittl. Berl. Zt.	Scheinb. α	Scheinb. δ
April 13	15 ^h 34 ^m 20 ^s 7	20 ^h 34 ^m 22 ^s 87	+ 1° 12' 18'' 8
Mai 16	9 51 57,5	17 9 47,83	+ 78 19 7,8
Juli 5	13 1 54,7	10 58 10,10	+ 62 31 24,6

leitete Herr Capitain *v. Raschkoff* nebenstehende Elemente ab:

$$T = \text{April } 4,94800 \text{ mittl. Berl. Zt.}$$

$$\pi = 247^\circ 15' 36'' 2$$

$$\Omega = 251 \ 16 \ 21,7 \left. \vphantom{\Omega} \right\} \text{mittl. Aeq. 1863,0.}$$

$$i = 67 \ 22 \ 10,0$$

$$\log q = 0,028648. \text{ Rückläufig.}$$

$$\text{Darstellung der mittl. Beob. (B—R): } \Delta\lambda = -2' 15'' 7$$

$$\Delta\beta = +23,0.$$