

Zur Perspective des Kreises.

Von J. Sobotka in Wien.

In der Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und Physik wurden in den letzten Jahren einige Aufgaben und elementare Constructionen, die sich auf die Centralprojection von Kreisen beziehen, von den Herren Schlömilch, Beyel, Schur und Schüssler besprochen,*) zu denen ich mir im Folgenden einige Bemerkungen und Erweiterungen zu geben erlaube. Die betreffenden Mittheilungen von Geheimrath Schlömilch bilden seine letzten Beiträge für die erwähnte Zeitschrift, und es ist interessant, dass Schlömilch vor mehr als vierzig Jahren seine Zeitschrift mit einer von ihm selbst verfassten Abhandlung in die Öffentlichkeit eingeführt hat, die mit vorliegendem Thema innig zusammenhängt, und auf die ich gleichfalls noch im Folgenden zurückkommen werde.

1. Was zunächst die Ermittlung derjenigen Centralprojectionen, durch welche Kreise des Raumes in einen gegebenen Kreis der Bildebene projiciert werden und deren Ebenen eine gegebene Gerade der Bildebene als Fluchttrasse besitzen, anbelangt, muss ich hier noch auf den im Jahre 1893 erschienenen I. Band des ausgezeichneten Lehrbuches der Darstellenden Geometrie von Rohn und Papperitz aufmerksam machen, worin sich in Art. 264 u. f. die auf kürzestem Wege erzielte Lösung dieser Aufgabe vorfindet; die dann weiter in Art 385 zu einer schönen Lösung der Aufgabe benützt wird: „Eine als Centralprojection eines Kreises entstandene Ellipse ist als affine Curve eines Kreises darzustellen.“

2. In Verbindung mit der vorangehenden Aufgabe werden in den herangezogenen Abhandlungen diejenigen Centralprojectionen gesucht, durch welche zwei gegebene

*) 1. Schlömilch: Ueber die Construction von Kegelschnitten aus 5 Punkten oder 5 Tangenten.

2. Schlömilch: Ueber die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck.

3. Schur: Ueber die Projection von 5 Punkten einer Ebene in 5 Punkte eines Kreises. Alle drei Abhandlungen im 39. Jahrgang (1894).

4. Schlömilch: Zur Perspective des Kreises.

5. Beyel: Zwei Aufgaben aus der Perspective. Diese zwei Abhandlungen im 40. Jahrgang (1895).

6. Schüssler: Zur Perspective des Kreises. Im 42. Jahrgang (1897).

Kreise aus demselben Centrum auf eine Ebene wieder als Kreise projiciert werden.

Bei dieser Aufgabe wird jedoch vorausgesetzt, dass die gegebenen Kreise in einer Ebene liegen. Hier soll nun eine Lösung der Aufgabe entwickelt werden, für den Fall, dass beide Kreise beliebige Lagen im Raume einnehmen.

Ist ein Kreis k gegeben und wird ein Punkt C als Projectionscentrum beliebig gewählt, so gibt die Berührungsebene in C an die durch diesen Punkt und durch k gelegte Kugel die Stellung für alle möglichen zur Ebene von k nicht parallelen Ebenen an, in die sich der gegebene Kreis wieder als Kreis projiciert. Dies ist ja eine bekannte Haupteigenschaft der sogenannten stereographischen Projection.

Ist demnach C ein Punkt von dem zwei gegebene Kreise k_1, k_2 auf eine Ebene Π wieder als Kreise projiciert werden, so ist umgekehrt nothwendig, dass sich die Kugelflächen $(Ck_1), (Ck_2)$ in C berühren, und dass ihre gemeinschaftliche Berührungsebene Π_0 parallel zu Π ist.

Wir haben darnach durch k_1 und k_2 sich berührende Kugelflächen zu legen; die Berührungspunkte C geben alsdann die Projectionsmittelpunkte und die ihnen zugehörigen gemeinschaftlichen Berührungsebenen Π_0 die Stellungen für die Projectionsebenen an, in welche sich k_1 und k_2 als Kreise projicieren.

Wir wollen noch den geometrischen Ort c der Punkte C , sowie die Umhüllungsfläche der Ebenen Π_0 näher betrachten.

Es sei g die Schnittgerade der Ebene G_1 von k_1 mit der Ebene G_2 von k_2 und es traffe Π_0 diese Gerade im Punkte P ; A_1, B_1 resp. A_2, B_2 seien ferner die reellen oder conjugiert imaginären Schnittpunkte von k_1 und k_2 mit g . Da beide Kugeln $(Ck_1), (Ck_2)$ in P dieselbe Potenz, die gleich \overline{PC}^2 ist, besitzen, so ist

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = \overline{PC}^2.$$

Dieser Bedingung genügt ein einziger Punkt auf g , nämlich der Mittelpunkt der Involution, welche durch die Punktepaare A_1B_1, A_2B_2 festgelegt ist. \overline{PC}^2 ist der Potenz dieser Involution gleich, woraus sofort folgt, dass die Curve c auf einer um P als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche K liegt, welche die Kreise k_1, k_2 und die Gerade g orthogonal schneidet, letztere in den Doppelpunkten der erwähnten Involution. Die Umhüllungsfläche der Ebenen Π_0 ist eine Kegelfläche P , deren Spitze der Punkt P ist, den wir auch als den Potenzpunkt der Kreise k_1, k_2 bezeichnen können.

Aus dem Angeführten ergibt sich, dass P immer reell ist und K nur dann imaginär wird, wenn beide Kreise k_1, k_2 die Gerade g reell so schneiden, dass die Schnittpunkte des einen Kreises die Schnittpunkte des andern von einander trennen. Die Construction von K selbst begegnet nach dem Gesagten keine Schwierigkeiten

Da Π_0 durch den Mittelpunkt P der Kugelfläche K geht, so berührt die Senkrechte in C auf Π_0 diese Kugelfläche und schneidet als Centrallinie der Kugeln (Ck_1) , (Ck_2) auch die Geraden a_1 , a_2 , von denen die erste durch den Mittelpunkt M_1 von k_1 geht und zu G_1 senkrecht ist, während die zweite durch den Mittelpunkt M_2 von k_2 geht und zu G_2 senkrecht ist.

„Bewegt sich also eine Gerade so, dass sie beständig a_1 , a_2 schneidet und die Kugel K berührt, so beschreibt ihr Berührungspunkt C mit K die Curve c .“

Die bewegliche Gerade beschreibt somit eine Kegelfläche vierten Grades R , für welche a_1 , a_2 Doppelgeraden sind; die Curve c auf der Leitfläche ist vierter Ordnung erster Art und die erzeugenden Geraden von R legen auf den Geraden a_1 , a_2 eine $(2, 2)$ deutige Beziehung ihrer Punkte fest. Der Schnitt von R mit der unendlich fernen Ebene ist eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, nämlich den unendlich fernen Punkten von a_1 und a_2 .

Nachdem die Ebenen Π_0 zu den erzeugenden Geraden von R senkrecht stehen, so folgt daraus:

„Die Ebenen Π_0 hüllen eine Kegelfläche vierter Classe mit den Ebenen G_1 , G_2 als Doppelberührungsebenen ein.“

Die Curve c lässt sich leicht als Curve vierter Ordnung erster Art nachweisen. K ist bereits eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch c geht. Die Kugelflächen durch k_1 bilden einen Kugelbüschel $[k_1]$ und ebenso bilden die Kugelflächen durch k_2 einen Kugelbüschel $[k_2]$. Jede Kugelfläche K_1 aus $[k_1]$ wird von zwei Kugelflächen aus $[k_2]$ berührt. Die Verbindungsgerade l_1 dieser Berührungspunkte wollen wir die Berührungssehne von K_1 nennen.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Berührungssehne l_1 die Regelschaar $[l_1]$ eines Hyperboloids beschreibt, wenn K_1 den Büschel $[k_1]$ durchläuft, woraus dann folgt, dass auch die analog ermittelten Berührungssehn l_2 der Kugeln in $[k_2]$ eine zweite Regelschaar $[l_2]$ bilden.

Zu dem Behufe beachten wir, dass jede Kugel K_1 in $[k_1]$ die Kugel K nach einem Kreise orthogonal schneidet. Sämmtliche Durchmesser von K_1 , die sich auf diesen Kreis stützen, berühren somit K , und diejenigen unter ihnen, welche gleichzeitig a_2 schneiden, gehören der Regelfläche R an und berühren K in zwei Punkten von K_1 . Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte C_1 , C_1^* ist somit eine Sehne l_1 .¹⁾

Die Sehne l_1 schneidet also a_2 , sie schneidet auch die Polare a_1 von a_1 in bezug auf K , weil sie in der Polarebene eines Punktes von a_1 bezüglich K liegt. So haben wir bereits zwei Leitgeraden a_2 , a_1 für $[l_1]$ gefunden. Zu bemerken ist noch, dass a_1

¹⁾ Eine die gegebenen Entwicklungen zur Darstellung bringende Figur, welche die Vorstellung der bezüglichen Gebilde wesentlich fördert, lässt sich nach den gegebenen Ausführungen leicht entwerfen.

die Schnittpunkte von k_1 mit K verbindet und in Folge dessen ohneweiters bestimmt ist.

Die Polarebenen von P in Bezug auf die Kugeln K_1 des Büschels $[k_1]$ gehen ebenfalls durch a_1 . Da jede Sehne l_1 in einer solchen Ebene liegt, so geht die Polare l_1^x von l_1 in Bezug auf K_1 durch P und ist senkrecht zu der Ebene welche l_1 mit dem Mittelpunkt von K_1 verbindet; da diese Ebene durch a_2 geht, also zu G_2 senkrecht steht, so liegt l_1^x in G_2 und ist normal zu der Centralinie des Kreises k_2 und des Schnittkreises k_1 von K_1 mit G_2 .

Die Gerade l_1^x ist dabei gleichzeitig der Schnitt für die den Punkten C_1 , C_1^x zugehörigen Ebenen Π_0 , Π_0^x . Der Strahlenbüschel der Geraden l_1^x um P ist demgemäß projectiv dem Kugelbüschel $[k_1]$, also auch projectiv mit der Schaar der den Strahlen l_1^x in Bezug auf die Kugeln K_1 zukommenden Polargeraden l_1 .

Da sämtliche l_1^x in G_2 liegen, so gehen die entsprechenden l_1 durch die Pole von G_2 in Bezug auf die Kugeln K_1 . Diese Pole liegen in der durch a_1 geführten Normalebene von g und beschreiben eine Hyperbel h_1 , welche durch den auf a_1 liegenden Pol der Geraden g in Bezug auf k_1 geht und deren eine Asymptote r durch den Durchschnittpunkt A_1 von a_1 mit G_2 geht und zu a_2 parallel ist; der Spurpunkt B_1 in G_2 für die zweite Asymptote s ist zu A_1 in Bezug auf g symmetrisch. Die Asymptote s selbst ist zu a_1 normal. Hiedurch ist h_1 auch schon hinreichend bestimmt.

Die Geraden von $[l_1]$ schneiden sonach h_1 , a_1 , a_2 ; sie bilden also thatsächlich eine Regelschaar.

Ebenso einfach wie h_1 lässt sich auch der Spurkegelschnitt n_1 von $[l_1]$ in der Ebene G_2 ermitteln.

Der Kugelbüschel $[k_1]$ schneidet nämlich G_2 in einem Kreisbüschel, der gleichfalls auf den Büschel der Strahlen l_1^x projectiv bezogen werden kann; m_1 wird alsdann von den Polen der Geraden l_1^x inbezug auf die zugeordneten Elemente des erwähnten Kreisbüschels beschrieben; er geht insbesondere durch den Punkt (ga_1) , durch den Schnitt M_2 der Geraden a_2 mit G_2 , durch den Fußpunkt F der Senkrechten von M_2 auf g , durch die Berührungspunkte der Tangenten von P an k_2 und durch die Nullkreise des besagten Kreisbüschels.

Beziehen wir die Strahlenbüschel um M_2 und P auf die Punkte der Centralgeraden dieses Kreisbüschels perspectiv, so wird m_1 auch erzeugt als Schnitt des Strahlenbüschels um M_2 mit demjenigen Strahlenbüschel um (ga_1) , dessen Strahlen zu den Strahlen des Büschels um P normal sind, da ja jedem l_1^x derjenige Kreis in $[k_1]$ entspricht, dessen Mittelpunkt auf der zu l_1^x durch M_2 gefällten Senkrechten liegt, wie leicht einzusehen ist.

Die Orthogonalprojection von a_1 in die Ebene G_2 ist offenbar senkrecht zu (PA_1) , weil sie sich als Projection der Polarebene von A_1 in Bezug auf K darstellt, und wird von (A_1M_2) gleichfalls in einem Punkte auf m_1 geschnitten, welcher die orthogonale Projection der zu a_2 parallelen Erzeugenden a_2^x von $[l_1]$ ist, weil ja $(a_2A_1) \equiv (a_2r)$ eine asymptotische Ebene der Trägerfläche L_1 von $[l_1]$ ist. Die Ebene (a_2F) berührt diese Trägerfläche und da sie parallel ist zur Ebene (rs) , so liegt in ihr eine Gerade u , die durch F parallel zu s geht. Die Ebene (us) ist somit eine asymptotische Ebene von L_1 und enthält deshalb eine zu s parallele Leitgerade v für die Regelschaar $[l_1]$, die also auch a_2^x schneidet.

Dadurch kommen wir zur möglichst einfachen Bestimmung von $[l_1]$, indem wir in der Lage sind, sofort drei Leitgeraden dieser Regelschaar anzugeben.

Zwei von diesen Leitgeraden sind nämlich die früher angeführten Geraden a_2, a_1 , die dritte ist die jetzt gefundene Gerade v deren Construction wir, wie folgt, zusammenfassen können.

Man legt durch den Schnittpunkt der Geraden a_1 mit der Ebene (a_2A_1) die Normalebene zu g und bringt diese mit der Geraden (FB_1) zum Schnitte; alsdann ist die Gerade v dadurch bestimmt, dass sie durch den zuletzt erhaltenen Schnittpunkt geht, in der erwähnten Normalebene liegt und zu G_1 parallel ist.

Die Bestimmung der Regelschaar $[l_2]$ ist vollständig analog.

Die Curve c ist also thatsächlich eine Curve vierter Ordnung erster Art, und da zu dem von ihr getragenen Flächenbüschel zweiter Ordnung auch die Kugel K als Element gehört, so folgt daraus nebenbei, dass alle Flächen dieses Büschels gemeinschaftliche Kreisschnittebenen besitzen.

Ist P unendlich fern, so wird c eine ebene Curve; haben k_1, k_2 einen Punkt gemeinschaftlich, so reducirt sich K auf diesen Punkt, haben sie zwei Punkte gemein, so liegen sie auf einer Kugel und werden von jedem Punkte derselben auf jede zu ihrer Berührungsebene in diesem Punkte parallele Ebene als Kreise projectirt. Fallen schließlich die Ebenen G_1, G_2 in eine zusammen, so erhalten wir das von den Eingangs genannten Autoren erzielte Resultat.

3. Einfacher noch ist die Fläche L_1 durch drei Geraden der Regelschaar $[l_1]$ selbst bestimmt, die man sofort construieren kann. Zwei von ihnen n_1, p_1 sind die Transversalen zu a_1, a_2 , welche durch die Schnittpunkte des Kreises k_2 mit K gehen; die dritte q_2 ist die zu g senkrechte in G_1 liegende Transversale von a_1 und a_2 . Diese Gerade q_1 ist also mit der früher mit u bezeichneten Geraden identisch.

Dass diese drei Geraden der Regelschaar $[l_1]$ angehören, folgt aus der Bestimmung derselben Regelschaar durch die Leitgebilde a_1, a_2 und h_1 resp. m_1 ohneweiters. Denn die Schnittpunkte von

k_2 mit K liegen auf h_1 und die zuletzt erwähnte Transversale geht durch den Punkt F auf m_1 .

Diese drei Geraden n_1, p_1, q_1 lassen sich mithin äußerst einfach construieren.

Um dann c zu construieren, legt man etwa durch q_1 Hilfsebenen; schneidet irgend eine solche Hilfsebene n_1 in R, p_1 in S und die Kugel K in einem Kreise i , so liefern die Schnittpunkte von (RS) mit i zwei Punkte von c .

Die Curve c kann man sich auch, wie folgt, erzeugt denken.

Auf der Kugelfläche K ordne man zwei Kreisbüschel $[a_1]$ mit der Achse a_1 und $[a_2]$ mit der Achse a_2 einander zu, so dass sich in ihnen solche Kreise entsprechen, die einander berühren; alsdann ist c der geometrische Ort dieser Berührungspunkte.

Benützen wir nun eine inverse Abbildung derart, dass wir als Centrum der Inversion einen gemeinschaftlichen Punkt der gegebenen Kreise k_1, k_2 mit K wählen. Gehört dieser Punkt beispielsweise dem Kreise k_2 an, so geht durch die Inversion $[a_1]$ in einem ebenen Kreisbüschel $[a_1]^x$, und $[a_2]$ in einen Büschel $[a_2]^x$ von Strahlen über, und die Strahlen von $[a_2]^x$ berühren alsdann die entsprechenden Kreise von $[a_1]^x$; der Ort der Berührungspunkte ist die Curve c^x , welche unserer Curve c invers entspricht.

Der Mittelpunkt von $[a_2]^x$ heiße G , alsdann ist c^x auch das Erzeugnis des Büschels $[a_1]^x$ mit dem zu ihm projectiven Büschel erster Ordnung $[g]^x$ der Polargeraden von G in Bezug auf die Kreise von $[a_1]^x$. Transformieren wir wieder zurück auf die Kugel K , so erkennen wir daraus, dass c das Erzeugnis zweier projectiver Kreisbüschel $[a_1], [g]$ auf K ist, von denen der zweite durch einen Schnittpunkt von k_2 mit K geht.

Die Verbindungsgeraden der Schnittpunktpaare entsprechen der Kreise in diesen Büscheln sind die Geraden l_1 , woraus folgt, dass diese Geraden das Erzeugnis zweier projectiver Ebenenbüschel bilden, dass also $[l_1]$ eine Regelschaar ist, wie wir schon früher gezeigt haben.

4. Schlömilch behandelt im ersten Jahrgang seiner Zeitschrift auf Seite 19 in eigenartiger Weise folgende Aufgabe.

„Fünf in einer Ebene gegebene Punkte A, B, C, D, E sind in eine andere gegebene Ebene so zu projectieren, dass die Projectionen A', B', C', D', E' in die Peripherie eines und desselben Kreises fallen.“

Diese Aufgabe ist mit der folgenden, die uns jetzt beschäftigen soll, identisch.

Die Bildebene Π , in ihr fünf in allgemeiner Lage befindliche Punkte A', B', C', D', E' und eine zweite Ebene E sind gegeben; man soll ein Projectionscentrum derart bestimmen, dass diese Punkte Pro-

jectionen von fünf Punkten A, B, C, D, E eines in der Ebene E liegenden Kreises darstellen.

Man wird zunächst solche Centralprojectionen suchen, für die vier von den gegebenen Punkten, etwa A', B', C', D' die Projectionen der Ecken A, B, C, D eines in E liegenden Kreisvierecks sind.

Schlömilch gelangt auf elementar-planimetrischem Wege zu einer einfachen Lösung dieser Aufgabe. Die von ihm entwickelte Construction ist richtig; die Herleitung derselben besitzt jedoch nicht die gewünschte Allgemeinheit. Sind nämlich A, B, C, D vier aufeinander folgende Punkte eines Kreises, so bilden die Verbindungsgeraden derselben in ihrer Reihenfolge ein gewöhnliches Kreiseck; Schlömilch stützt nun die Lösung der Aufgabe darauf, dass die Summe der spitzen Winkel, welche die Seiten dieses Viereckes mit irgend einer Transversale desselben bilden gleich 180° ist, was jedoch nicht für alle Lagen der Transversale zutrifft, so dass in dieser Hinsicht die Erläuterung seiner Construction vervollständigt werden müsste.

Wir geben hier zuerst eine andere Ableitung der Schlömilch'schen Construction.

Wegen der Unbestimmtheit unserer Aufgabe können wir noch die Fluchttrasse ϵ von E unter den Parallelen zur Geraden (ΠE) wählen und dann nach dem geometrischen Ort des umgelegten Projectionscentrums S_0 fragen.

Die Kegelschnitte durch A', B', C', D' bilden einen Büschel (1) und schneiden auf ϵ eine Involution ein. Die Doppelpunkte G', H' dieser Involution sind in Bezug auf alle Kegelschnitte dieses Büschels conjugiert. Ihnen entsprechen im Kegelschnittbüschel (2) durch A, B, C, D die allen Kegelschnitten desselben gemeinsamen Richtungen zweier conjugierten Durchmesser, wofür der erste Kegelschnittbüschel als Projection des zweiten aufgefasst wird. Soll $ABCD$ ein Kreisviereck sein, so muss der ihm umschriebene Kreis dem Büschel (2) auch angehören und es müssen die erwähnten gemeinsamen Durchmesserrichtungen infolge dessen auf einander normal stehen, also muss S_0 auf dem über $\overline{G'H'}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise k liegen, welcher also der geometrische Ort von S_0 ist. Will man, dass ein bestimmter Kegelschnitt von (1) die Projection eines Kreises vorstelle, so hat man einen zweiten Kreis so zu legen, dass für ihn irgend zwei conjugierte Punkte auf ϵ bezüglich dieses Kegelschnittes die Endpunkte eines Durchmessers sind; der Schnitt dieses Kreises mit k liefert alsdann die zugehörigen Punkte S_0 .

5. Um zu dem Kreise k zu gelangen, kann man sich auch auf folgenden Satz berufen.

Zieht man in einem Kegelschnitt zwei Sehnen, welche zu den Achsen desselben antiparallel sind, so liegen die vier Endpunkte derselben auf einem Kreis und die weiteren zwei Sehnen-

paare, welche diese Endpunkte verbinden, sind gleichfalls zu den Achsen des Kegelschnittes antiparallel.

Die Schnittpunktpaare der Gegenseiten des Vierecks $A'B'C'D'$ mit e legen eine Involution mit G', H' als Doppelpunkten fest; sie werden deshalb von irgend einem Punkte S_0 auf k durch Strahlenpaare projiziert, deren Winkel durch $(G' S_0), (H' S_0)$ halbiert werden. Diese Strahlenpaare sind nichts anderes als die umgelegten Fluchtgeraden für die Gegenseitenpaare im Viereck $ABCD$, so dass diese zu den Geraden $(G' S_0), (H' S_0)$ antiparallel sind.

Da nun nach Vorangehendem die Richtungen von $(G' S_0)$ und $(H' S_0)$ conjugiert sind in Bezug auf alle Kegelschnitte von (2), so sind die Achsen aller dieser Kegelschnitte zu diesen Geraden parallel. Es ist dem herangezogenen Satz zufolge im Büschel (2) thatsächlich ein Kreis enthalten, der durch die Punkte $ABCD$ geht.

Die jetzige Ableitung wurde hier aus dem Grunde ausgeführt, weil sie den natürlichen Ursprung der Schlömilch'schen mehr elementaren Ableitung bildet, mit der sie übrigens innig verknüpft ist.

Im Folgenden soll eine andere, was die Durchführung anbelangt einfachere Construction des behandelten Problems auf elementarem Wege erzielt werden.

6. Es seien also wieder A', B', C', D' vier beliebige Punkte in Π und es sollen die aus ihnen in früherer Weise abgeleiteten Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen.

Wir denken uns wieder die Punkte A, B, C, D der Reihe nach mit einander zu einem Kreisviereck verbunden. Die Winkel dieses Vierecks mögen der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden.

Schneiden sich keine zwei nicht zusammenhängende Seiten dieses Vierecks, so ist

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ,$$

schneiden sich aber zwei nicht zusammenhängende Seiten, dann ist

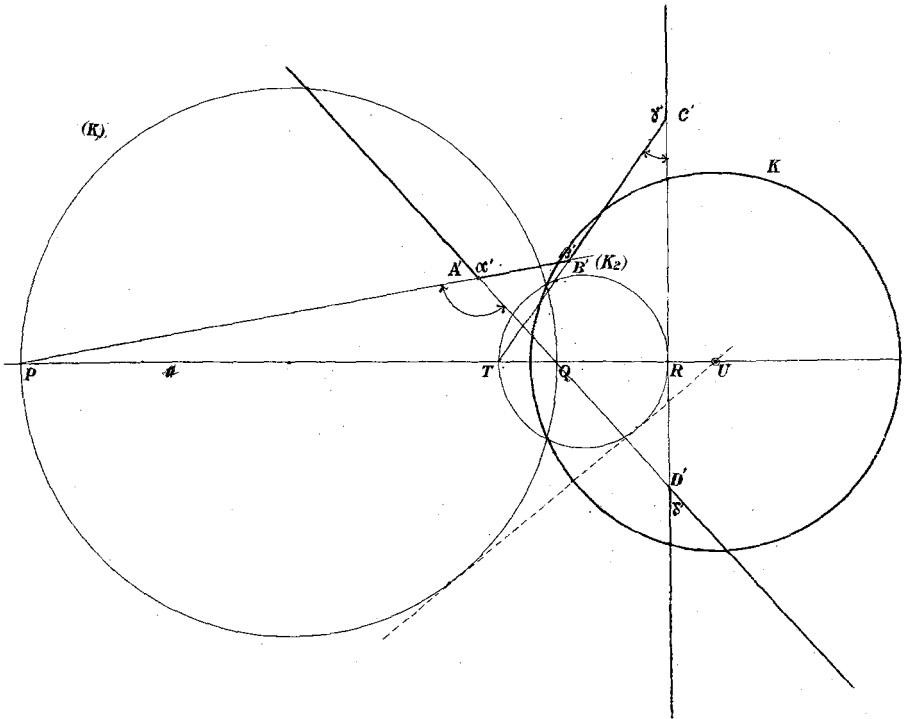
$$\alpha = \gamma, \beta = \delta.$$

Es sei e wieder die gewählte Fluchttrasse von E . Soll unsere Aufgabe reell gelöst werden, so dürfen die Seiten des entsprechenden Vierecks $A'B'C'D'$ diese Gerade nicht schneiden, weil ja ein gewöhnliches Kreisviereck ganz im Endlichen liegt; damit ist aber noch nicht gesagt, dass diese Bedingung zureichend zur Erzielung der Realität ist.

Um dieser Bedingung zu entsprechen, verbinde man die Punkte A', B', C', D' der Reihe nach mit einander durch einen Linienzug, welcher wohl die unendlich ferne Gerade überschreiten, aber nicht die Gerade e schneiden darf.

Erzielt man in dem so gezogenen Viereck keinen Schnitt von nicht zusammenhängenden Seiten, so sind die Winkel α', γ'

an A' resp. C' und ebenso β', δ' an B' resp. D' in demselben Projectionen von supplementären, andernfalls von gleichen Winkeln.



Wir bezeichnen Fig. 1 noch beziehentlich mit P, T, R, Q die Schnittpunkte der Geraden $(A'B'), (B'C'), (C'D'), (D'A')$ mit ϵ , dann werden die Winkel $(PB'T), (RD'Q)$ und ebenso die Winkel $(QA'P), (TC'R)$ gleichfalls Projectionen von supplementären oder gleichen Winkeln sein, was einerseits von den Winkeln α', γ' resp. β', δ' andererseits von der Lage der Geraden ϵ gegen das Viereck $A'B'C'D'$ abhängig ist, worüber uns die Figur aber in jedem Falle sofort Aufschluss gibt.

Ist S_0 wieder das umgelegte Projectionscentrum, so muss die soeben erläuterte Beziehung dann auch zwischen den von den umgelegten Fluchtstrahlen eingeschlossenen Winkeln $(PS_0T), (RS_0Q)$ und $(QS_0P); (TS_0R)$ bestehen.

Bei der Construction wird es bloß darauf ankommen, festzustellen, ob der eine oder der andere Zusammenhang bei einem der zwei Winkelpaare platzgreift, da dadurch schon $ABCD$ als ein Kreisviereck gesichert ist und die Beziehung für das zweite Paar sich dann mit ergibt.

Es kommt somit darauf an, solche Punkte S_0 in Π zu suchen, für welche entweder

$$\sphericalangle PS_0T + \sphericalangle RS_0Q = 180^\circ \text{ oder } \sphericalangle PS_0T = \sphericalangle RS_0Q$$

ist je nach der getroffenen Entscheidung.

Um dies zu erzielen, legen wir durch P und Q einen (in der Figur nicht verzeichneten) Kreis k_1 , dessen Mittelpunkt M_1 heißen möge, errichten über RT als Basis ein mit PQM_1 ähnlich liegendes Dreieck RTM_2 , so dass seine dritte Ecke M_2 mit M_1 im ersten Falle zu verschiedenen Seiten, im zweiten Falle auf derselben Seite von e liegt, und führen den durch R und T bestimmten Kreis k_2 mit dem Mittelpunkte in M_2 ; alsdann ist der geometrische Ort der verlangten, umgelegten Projectionsmittelpunkte S_0 derjenige Kreis k , der durch die Schnittpunkte S_1, S_2 von k_1 mit k_2 geht und dessen Mittelpunkt U der Schnitt der Geraden $(M_1 M_2)$ mit e ist.

Zuerst sieht man, dass die Punkte S_1, S_2 dem gesuchten Orte angehören, weil die Winkel, unter denen die Strecken PQ, RT von S_1 oder S_2 aus gesehen werden, im ersten Falle supplementär, im zweiten Falle gleich sind. Die Gerade $(S_1 S_2)$ trifft e in dem Punkte K , welcher in Bezug auf die Kreise k_1, k_2 gleiche Potenz hat; es ist infolge dessen K der Mittelpunkt der auf e durch die beiden Punktepaare PQ, RT festgelegten Involution.

Einem anderen Kreis k'_1 durch P und Q entspricht ein Kreis k'_2 durch R und T ; im Schnitte beider Kreise erhalten wir zwei neue Punkte S_1^x, S_2^x für die Lage des umgelegten Centrums S_0 ; aber die Verbindungsgerade dieser Punkte muss ebenfalls durch den Punkt K gehen, dessen Lage ja nur von den Punktepaaren PQ, RT abhängig ist. Ebenso schneidet die Verbindungsgerade der Mittelpunkte M_1', M_2' der Kreise k'_1, k'_2 die Fluchttrasse e in dem früher erhaltenen Punkte U ; denn dieser ist das Centrum einer ähnlichen Lage zweier ebenen Systeme in Π , für die sich die Strecken PQ, RT entweder direct oder invers entsprechen.

Da

$$KS_1.KS_2 = KS_1^x.KS_2^x$$

und

$$S_1U = S_2U, S_1^xU = S_2^xU,$$

so liegen je zwei in vorbeschriebener Art entstandene Schnittpunktepaare auf einem Kreis k , der U zum Mittelpunkte hat.

Demgemäß ist dieser Kreis k der geometrische Ort sämtlicher Punkte S_0 .

Darin liegt auch die Begründung für folgende Construction von k . Fig. 1.

Wir errichten über PQ und RT als Durchmesser Kreise so ist der geometrische Ort k von S_0 derjenige Kreis des durch

sie bestimmten Kreisbüschels, welcher seinen Mittelpunkt in ihrem inneren oder äußeren Ähnlichkeitspunkte hat, jenachdem $\angle PS_0Q$ mit $\angle RS_0T$ supplementär oder gleich werden soll. In unserer Figur tritt der letztere Fall ein.

Die vier Punkte $PQR T$ lassen sich zweimal zu zwei Paaren ordnen, nämlich PQ, RT und QR, TP . Dabei kann man, reelle Lösungen vorausgesetzt, die Bezeichnung so wählen, dass die Punkte des einen Paares durch die des anderen getrennt werden, wodurch sich die Durchführung unserer Construction besonders einfach gestaltet. Diese Bedingung stimmt mit der überein, dass die Involution PQ, RT reelle Doppelpunkte besitze.

7. Der Zusammenhang dieser Lösung mit der in den vorhergehenden Artikeln abgeleiteten ist sehr einfach. PQ, RT sind zwei Paare einer Involution. Der gesuchte Kreis k ist den dort gegebenen Erläuterungen zufolge derjenige Orthogonalkreis zu den über PR, QT als Durchmessern beschriebenen Kreisen l_1, l_2 , welcher seinen Mittelpunkt auf e hat. In der Inversion für k als Grundkreis entsprechen die Kreise l_1, l_2 sich selbst; also entsprechen sich in ihr auch die Punkte der Punktepaare PQ, RT . Es entspricht mithin auch dem Kreise m_1 über PR als Durchmesser der Kreis m_2 über QT als Durchmesser sowie sich die Kreise n_1, n_2 , für welche $PT, resp. QR$ Durchmesser sind, invers entsprechen. Aus diesem Grunde schneiden sich sowohl m_1, m_2 als auch n_1, n_2 auf k , und der Mittelpunkt U von k ist ein Ähnlichkeitspunkt sowohl für das erste wie für das zweite Kreispaar.

In unserer Figur wurden die auftretenden Beziehungen für einen bestimmten, aus derselben leicht übersehbaren Fall, zur Darstellung gebracht.

8. Sollen schließlich fünf in Π gegebene Punkte A', B', C', D', E' Bildpunkte von fünf zu suchenden Punkten A, B, C, D, E in einer gegebenen Ebene E sein, welche so liegen, dass man durch sie einen Kreis führen kann, so wird man aus A', B', C', D', E' zwei Vierecke, beispielsweise $A'B'C'D'$ und $A'B'C'E'$ bilden und erhält dann nach getroffener Wahl von e einen Kreis k als geometrischen Ort von S_0 für das erste Viereck und analog einen Kreis k_x , welcher dem zweiten Viereck in der früher erläuterten Weise zukommt. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind die Umlegungen S_1^0, S_2^0 der Punkte S_1, S_2 , von denen die Punkte A', B', C', D', E' in Π sich in die Ebene E als fünf Punkte eines Kreises projicieren.

Man erkennt sofort, wie diese Constructionen zu specialisieren sind, um die von Schlömilch angegebene elementare Construction eines durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnittes mit Hilfe eines Kreises zu erhalten. Es braucht nicht erst bemerkt zu werden, dass die hier soeben erledigte Construction in ihrer allgemeinen Form dasselbe leisten würde. Der Wert derartiger Constructionen

von Kegelschnitten ist aber weder in wissenschaftlicher noch in pädagogischer Hinsicht bedeutend.

9. Schlömilch hat eine einfache Überführung eines durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnittes in einen Kreis durch Centralprojection gleichfalls dazu benützt, um einen Kegelschnitt aus fünf Tangenten zu construieren. Bezüglich des Wertes dieser Kegelschnittconstruction gilt dasselbe wie zuvor. Die Auffassung dieser Überführung vom Standpunkte der Darstellenden Geometrie beansprucht aber immerhin ein gewisses Interesse.

Wir beschäftigen uns deshalb zunächst mit der Aufgabe:

Vier in einer Ebene Π beliebig gelegene Geraden a', b', c', d' sollen in eine zweite Ebene E als Tangenten a, b, c, d eines Kreises projiciert werden.

Wir können behufs Lösung dieser Aufgabe auch umgekehrt a', b', c', d' als die Projectionen von vier in E gelegenen, erst zu suchenden Tangenten a, b, c, d eines Kreises u betrachten; Π ist alsdann unsere Projectionsebene. Die Schnittgerade (ΠE) heiße e . Wegen der Unbestimmtheit unserer Aufgabe kann man als Fluchttrasse e von E irgend eine in Π zu e gezogene Paralle annehmen.

Es seien p, q, r die ein Dreiseit bildenden Diagonalen des durch a', b', c', d' bestimmten Vierseits, und P, Q, R seien die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiseits.

PQR ist offenbar das gemeinsame Polardreieck für alle Kegelschnitte u', \dots , welche a', b', c', d' berühren, und somit eine Kegelschnittschaar (u') bilden. Die zu den Schnittpunkten der Diagonalen p, q, r mit e harmonisch conjugierten Punkte in Bezug auf die Punktepaare QR, RP , resp. PQ liegen bekanntlich auf einer Geraden g , der Polare von e in Bezug auf (u'). Auf g liegen die Pole von e bezüglich sämtlicher Kegelschnitte in (u'). Irgend ein Kegelschnitt u' von (u') ist alsdann festgelegt, wenn wir für denselben irgend einen Punkt E' auf g als Pol von e annehmen. Wir betrachten nun einen solchen Kegelschnitt und bezeichnen weiter die Schnittpunkte der Geraden $p, q, r, g, (PE')$, (QE') mit e beziehungsweise durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{G}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$. Es ist in Bezug auf u' zunächst (PE') die Polare von \mathfrak{P} , (QE') die Polare von \mathfrak{Q} ; somit sind $\mathfrak{P} \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q} \mathfrak{Q}_1$ conjugierte Punktepaare und $(\mathfrak{P} E') (\mathfrak{P}_1 E'), (\mathfrak{Q} E') (\mathfrak{Q}_1 E')$ conjugierte Strahlenpaare.

Soll also u' die Projection eines Kreises u und e die Projection der unendlich weiten Geraden seiner Ebene sein, so stellt E' die Projection des Kreismittelpunktes E vor und die soeben erwähnten zwei Strahlenpaare sind die Projectionen zweier Paare zueinander normaler Durchmesser von u . Infolge dessen erhält man die möglichen umgelegten Projectionsmittelpunkte als Schnitte der Kreise k_1, k_2 , welche über $(\mathfrak{P} \mathfrak{P}_1)$ resp. $(\mathfrak{Q} \mathfrak{Q}_1)$ als Durchmesser beschrieben werden.

Verändert man die Lage von E' auf g , so verändert hiedurch auch der Punkt \mathfrak{P}_1 auf e seine Lage perspectiv zu E' und ebenso der Punkt \mathfrak{Q}_1 . Bei dieser Veränderung durchläuft der Kreis k_1

einen Büschel (k_1) sich in \mathfrak{P} berührender Kreise, und der Kreis k_2 durchläuft einen zu (k_1) projectiven Büschel (k_2) von Kreisen, die sich in \mathfrak{Q} berühren.

Das Erzeugnis von (k_1) und (k_2) ist demnach eine Curve vierter Ordnung c^0 , welche durch die absoluten Punkte von Π zweimal hindurchgeht. Dieselbe schneidet e orthogonal in den Punkten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$.

Drehen wir die Curve c^0 um e , bis ihre Ebene parallel zu E wird, so liefert sie in dieser Lage den geometrischen Ort solcher Punkte, von denen a', b', c', d' in die Ebene E nach vier Tangenten eines Kreises projiciert werden.

Geht e insbesondere durch einen der Eckpunkte P, Q, R des gemeinsamen Polardreiecks, dann artet die Projectivität der Kreisbüschel $(k_1), (k_2)$ aus, und wir erhalten als geometrischen Ort der umgelegten Mittelpunkte einen Kreis mit dem Mittelpunkte auf e ; dieser Kreis geht durch den erwähnten Eckpunkt und durch den Schnittpunkt von e mit der Verbindungsgeraden der beiden andern Eckpunkte. Fällt ferner e mit einer Seite des Dreiecks PQR zusammen, so gibt die Strecke, welche durch die auf e liegenden Eckpunkte desselben begrenzt wird, einen Durchmesser desjenigen Kreises, auf dem die umgelegten Projectionsmittelpunkte liegen. Der letzte Fall ist eben der von Schlämilch in Betracht gezogene.

10. Schließlich legen wir uns folgende Aufgabe vor.

Fünfeiner Ebene Π gegebene Geraden a', b', c', d', e' in allgemeiner Lage sollen in eine zweite gegebene Ebene E als Tangenten a, b, c, d, e eines Kreises projiciert werden.

Aus dem soeben Besprochenen ergibt sich, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung, nachstehende Lösung.

Wir greifen aus den gegebenen Geraden viere heraus, beispielsweise a', b', c', d' , bilden das Dreieck PQR und ermitteln die Gerade g wie zuvor. Ebenso bilden wir aus e' und drei von den soeben benützten Geraden ein Vierseit und ermitteln analog die Gerade h derart, dass sie mit e jedes Gegeneckenpaar dieses Vierseits harmonisch trennt.

Der Schnittpunkt E' von g mit h ist alsdann der Pol von e in Bezug auf den durch die Tangenten a', b', c', d', e' bestimmten Kegelschnitt. Die Geraden p und (PE') schneiden aus e eine Strecke aus, über der als Durchmesser wir einen Kreis k_1 beschreiben; ebenso fassen wir die Strecke, welche auf e durch die Geraden $g, (QE')$ festgelegt wird, als Durchmesser eines Kreises k_2 auf. Die Schnittpunkte beider Kreise stellen die Umlegung der gesuchten Projectionsmittelpunkte dar, die also nur noch um e nach C_1, C_2 so zu drehen sind, dass ihre Verbindungsgerade parallel zu E wird.

Die Geraden a', b', c', d', e' werden alsdann von den Punkten C_1, C_2 in die Ebene E als fünf Tangenten eines Kreises projiciert.

11. Die Construction gibt zu folgenden Specialfällen Anlass.

1. e wird durch einen der Eckpunkte des Dreieckes PQR etwa durch P geführt.

Hier ist $g = (QR)$. Sind p', q', r' die Diagonalen eines zweiten aus den gegebenen Geraden gebildeten Vierseits und $P' Q' R'$ die Ecken des durch diese Diagonalen gebildeten Dreiseits, so schneide man p' und $(P'E')$, weiter q' und $(Q'E')$ mit e , wodurch man zwei Strecken erhält, die als Durchmesser zweier Kreise betrachtet werden. Der Schnitt dieser Kreise gibt die fraglichen umgelegten Projectionsmittelpunkte.

2. e verbindet zwei Gegenecken eines aus den gegebenen Geraden gebildeten Vierseits $a'b'c'd'$.

Ist also etwa $e = (PQ)$, so ist $E' = R$.

Wir gelangen so zu dem von Schlömilch behandelten Falle.

Nach unserer Construction hätte man, um die umgelegten Projectionsmittelpunkte zu erhalten, über PQ als Durchmesser einen Kreis zu legen und mit einem Kreise zum Schnitt zu bringen, dessen auf e liegender Durchmesser, wie folgt, erhalten wird.

Man bildet aus den gegebenen Geraden ein zweites Vierseit und zieht in demselben die zwei Diagonalen, welche den auf e liegenden Eckpunkt desselben nicht enthalten; ist R' der Schnittpunkt dieser Diagonalen, so liefert (RR') einen Endpunkt des gesuchten Durchmessers; der zweite Endpunkt desselben ist eben der auf e liegende Eckpunkt des Vierseits.

Diese, aus unserer allgemeinen Betrachtung hervorgegangene Construction erfordert das Ziehen einer Geraden mehr als die in Schlömilchs Mittheilung von C. Pelz angegebene Construction.

3. Bildet man aus den Geraden a', b', c', d', e' zwei Vierseite mit den zugehörigen Diagonaldreiseiten $pqr, p'q'r'$, deren Ecken mit P, Q, R resp. P', Q', R' bezeichnet werden mögen, so kann schließlich e eine Ecke des ersten Dreiseits mit einer des zweiten verbinden.

Ist also beispielsweise $e = (PP')$, so ergeben sich die umgelegten Projectionsmittelpunkte im Schnitt der Kreise, welche $P'Q'$ und $P'P'$ zu Durchmessern haben, wofern wieder $\mathfrak{P} = (pe) = (p'e)$.

Diese Construction erfordert das Ziehen von zwei Linien mehr als die soeben citierte.