

## Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen.

Von

GEORG CANTOR in Halle a. d. Saale.

Zur näheren Erläuterung dessen, was ich auf pag. 113 dieses Bandes gesagt habe, erlaube ich mir noch Folgendes hinzuzufügen.

Dass der, von Herrn Appell, im Archiv d. Math. u. Physik, 64 Th. pag. 96, *implicite* angewandte Satz:

„Wenn für jeden speciellen Werth von  $x \geq \alpha$  und  $\leq \beta$ :

$$\lim f(n, x) = 0 \quad \text{für } n = \infty,$$

wo  $f(n, x)$  für jedes specielle  $n$  eine stetige Function von  $x$  bedeutet, deren absolutes Maximum  $B_n$  sei, so ist:

$$\lim B_n = 0 \quad \text{für } n = \infty.$$

im Allgemeinen *falsch* ist, geht unter anderm aus dem folgenden einfachen Beispiele hervor:

$$f(n, x) = \frac{nx(1-x)}{n^2x^2 + (1-x)^2}$$

für

$$0 \leq x \leq 1.$$

Hier ist für jedes specielle  $x \geq 0$  und  $\leq 1$ :

$$\lim f(n, x) = 0 \quad \text{für } n = \infty;$$

es ist ferner  $f(n, x)$  eine stetige Function von  $x$ ; *nichtsdestoweniger* ist  $B_n = f\left(n, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$  und es wird also in diesem Falle  $B_n$  *nicht* unendlich klein.

Dass für den Fall

$$f(n, x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

(wenn die Bedingung

$$\lim f(n, x) = 0 \quad \text{für } n = \infty,$$

für jeden speciellen Werth von  $x \geq \alpha$  und  $\leq \beta$  erfüllt ist) *in der That* auch

$$\lim B_n = 0 \quad \text{für } n = \infty,$$

*ergibt sich erst als eine unmittelbare Folge meines Beweises* (Math. Annalen Bd. IV, pag. 139); es darf aber diese Thatsache nicht ohne

Beweis *vorausgesetzt* werden, da sonst hiermit, wie bei Herrn Appell, *gewissermassen* ein *circulus vitiosus* begangen wird.

Einen andern Beweis für den in Rede stehenden Satz über trigonometrische Reihen hat Herr P. du Bois-Reymond in einer Abhandlung „Beweis, dass die Coefficienten etc. § 15., Note 12, Abh. d. königl. bayr. Ak. der W. II. Cl. XII. Bd. I. Abth.“ versucht; derselbe beruht jedoch auf ähnlichen Voraussetzungen, wie die des Herrn Appell und ist daher ebenso unzulässig.

Durch das oben gegebene Beispiel wird übrigens noch eine andere Frage berührt.

Bekanntlich haben Abel und später Seidel auf das Vorkommen der ungleichmässigen Convergenz unendlicher Reihen aufmerksam gemacht, Abel, indem er auf einen Irrthum Cauchy's in dessen analyse algébrique hinwies, in welcher Cauchy aus dem Umstande der Convergenz einer Reihe für alle Werthe von  $x \geq \alpha$  und  $\leq \beta$  auf die Stetigkeit der Reihensumme einen Schluss zog und dabei unbewusst die *Voraussetzung* der *gleichmässigen* Convergenz eintreten liess, welche in der That, wenn die einzelnen Glieder der Reihe stetige Functionen von  $x$  sind, die Stetigkeit der Reihensumme zur Folge hat. Seidel hat das Vorkommen der ungleichmässigen Convergenz in der „Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen, Denkschriften der Münchener Akademie, Jahrgang 1848“ ausführlich discutirt und gezeigt, wie Reihen, welche für jeden Werth von  $x \geq \alpha$  und  $\leq \beta$  convergiren und unstetige Functionen darstellen, *ungleichmässig* convergiren müssen. *Ungewiss* blieb darnach, ob die Unstetigkeit der dargestellten Function eine wesentliche Bedingung für das Vorkommen der ungleichmässigen Convergenz sei. Herr Heine bezeichnet ausdrücklich in seiner Arbeit „Ueber trigonometrische Reihen, § 1.“ (Borch. Journal Bd. 71. pag. 353) diesen Gegenstand als *noch nicht aufgeklärt*.

Es ist sogar von Herrn O. Stolz der Versuch gemacht worden (Bericht des naturw. medicinischen Vereins in Innsbruck, v. December 1874), den Satz zu beweisen, dass\*), wenn in einer für jeden Werth von  $x \geq \alpha$  und  $\leq \beta$  gültigen Gleichung:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \varphi_n(x),$$

sowohl  $f(x)$ , wie auch die  $\varphi_n(x)$  stetige Functionen von  $x$  sind, alsdann die Reihe rechts in *gleichem Grade* convergirt. Dass dieser Satz

\*) Herr Stolz hat selbst bereits im Jahrb. d. Fortschr. d. Math. VII. Bd. p. 157 auf die Ungültigkeit seines Beweises aufmerksam gemacht, nachdem ich in einem Briefwechsel mit ihm (April 1875) meine Bedenken gegen seinen Beweis zur Geltung gebracht hatte.

nicht zugestanden werden kann, wird *nun* durch folgendes Beispiel gezeigt; setzt man:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\nu x(1-x)}{\nu^2 x^2 + (1-x)^2} - \frac{(\nu+1)x(1-x)}{(\nu+1)^2 x^2 + (1-x)^2},$$

so ist für  $0 \leq x \leq 1$ :

$$\frac{x(1-x)}{x^2 + (1-x)^2} = \sum_1^\infty \varphi(x),$$

trennt man die ersten  $n - 1$  Glieder der Reihe ab, so ist der Rest:

$$R_n(x) = \frac{nx(1-x)}{n^2 x^2 + (1-x)^2},$$

er wird zwar für jedes einzelne  $x$  mit unendlich wachsendem  $n$  unendlich klein, aber wie oben gezeigt wurde *nicht* in gleichem Grade, weil es kein noch so grosses  $n$  giebt, so dass für *alle* Werthe von  $x > 0$  und  $\leq 1$  die Ungleichung bestünde:

$$R_n(x) < \frac{1}{2}.$$

In der That hat man für jedes  $n$ :

$$R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Wie ich nachträglich von befreundeter Seite aufmerksam gemacht werde, hat sowohl Herr du Bois-Reymond in der oben citirten Abhandlung, Note 1, ein ähnliches, wenn auch complicirteres Beispiel gegeben, wie auch Herr Darboux in seiner mir bisher unbekannt gebliebenen Abhandlung „Mémoire sur les fonctions discontinues“ die nämliche Frage discutirt, so dass ich den genannten Herren in diesem Punkte mit Vergnügen die Priorität zugestehen kann. Das folgende von Herrn Darboux herrührende Beispiel bietet noch ein besonderes Interesse dar, indem es nicht nur eine Reihe liefert, die ungleichmässig convergirt und dennoch eine stetige Function darstellt, sondern auch die *bestimmte gliedweise* Integration in einem Intervalle, dessen einer Endwerth 0 ist, *nicht* zulässt.

Man hat für jedes reelle  $x$ :

$$2xe^{-x^2} = \sum_1^\infty (2\nu x e^{-\nu x^2} - 2(\nu+1)x e^{-(\nu+1)x^2});$$

der Rest nach Abtrennung der  $n - 1$  ersten Glieder ist hier:

$$R_n(x) = 2nx e^{-n x^2} \text{ und man hat: } \int_0^{\xi} R_n(x) dx = (1 - e^{-n \xi^2}),$$

welches Integral mit wachsendem  $n$  *nicht* unendlich klein wird.

Halle a. d. Saale, im December 1879.