

links und b von vorn nach rückwärts; der Winkel C liegt hinten oben. Die Krystalle verdanke ich der Güte des Hrn. Prof. Dr. J. Gottlieb.

IV. Die mechanische Wärme-Theorie und das Spannungsgesetz der Gase; von Dr. Th. Reye.

(Von Hrn. Verfasser gemachter Auszug aus der gleichnamigen Inaugural-Dissertation, Göttingen 1861.)

Der Verfasser hat aus den Versuchen Regnault's ¹⁾ statt der Mariotte- und Gay-Lussac'schen Formel

$$p \cdot v = R(a + t)$$

folgende genauere Gleichung für das Spannungsgesetz der Gase abgeleitet:

$$I. \frac{p}{1 + \pi p} \cdot (v + R \cdot S) = R(a + t).$$

Hierin ist t die Temperatur des Gases (nach Celsius), p die Spannung in Kilogrammen per Quadratmeter, und v das Volumen der Gewichtseinheit (1 kg) in Cubikmetern. π , R , S , a sind constante Größen; und zwar wurde a für alle Körper, resp. Gase, bestimmt zu $273^{\circ},84$. Ferner ist:

für	π	S	R
atmosphärische Luft	$\frac{0,213128}{10^6}$	$\frac{0,572357}{10^4}$	29,1972
kohlensaures Gas	$\frac{0,811091}{10^6}$	$\frac{0,429900}{1000}$	19,2382
Wasserstoff-Gas	$\frac{0,295681}{10^6}$	$\frac{0,689747}{10^4}$	421,044

Die Gleichung I. genügt dem Erfahrungs-Satze, daß eine Gasmenge desto genauer dem Mariotte'schen Ge-

1) *Mém. de l'Acad. Roy. des Sc.*, T. 21, 1847.

setze folgt, je größer ihr Volumen ist. Denn wenn v sehr groß, also p sehr klein ist, so kann $R.S$ gegen v , und πp gegen 1 vernachlässigt werden. Rücksichtlich der großen Uebereinstimmung von 1 mit den zahlreichen Regnault'schen Versuchen verweisen wir auf die Dissertation. Die Versuche erstreckten sich bis auf Spannungen von 28 Atmosphären, dagegen nur auf Temperaturen von 0° bis 100° .

Die *Form* der Gl. I wurde durch eine interessante, aus den Grundsätzen der mechanischen Wärme-Theorie abgeleitete *Differential-Gleichung für das Spannungsgesetz sämtlicher Körper* wesentlich bedingt, durch die Gleichung nämlich:

$$\text{II. } \frac{dp}{z+p} = \frac{dt}{a+t} - \frac{A}{a+t} \cdot \frac{z+p}{c_p - c_v} \cdot dv.$$

Hierin bezeichnet $A = \frac{1}{\gamma - 1}$ das Wärme-Aequivalent für die Einheit der Arbeit (1^{mkg}); $c_p - c_v$ ist die Differenz der specifischen Wärmen des Körpers unter constantem Druck (c_p) und constantem Volumen (c_v). Endlich ist z dadurch definiert, daß $z \cdot dv$ die *innere Arbeit* bezeichnet, welche der Körper per Gewichtseinheit verrichtet, während einer Ausdehnung um dv bei constanter Temperatur. Also ist

$\int_0^z z \cdot dv$ das Potential dieses Systemes von Gas-Moleculen auf sich selbst. Aus einem genauen Ausdruck für z ließe sich somit das Gesetz der Molecular-Kräfte berechnen, mit welchem die kleinsten Theile des Gases auf einander wirken.

Die Formel II enthält den bemerkenswerthen Satz, daß das Spannungsgesetz jedes Körpers nur abhängt von den beiden Functionen z und $(c_p - c_v)$. Beide sind der Beobachtung recht wohl zugänglich, besonders bei dampfförmigen Körpern.

Im Folgenden wollen wir die wichtigeren Ergebnisse der Gleichungen I und II nennen, welche in der Dissertation ausführlich entwickelt sind.

Aus Gl. I ergibt sich für gewöhnliche Temperaturen eine beträchtliche Abweichung der Gase vom Mariotte's-

schen Gesetz. Dieselbe nimmt zu mit der Dichtigkeit des Gases und mit dem Grade der Compression, was schon aus Regnault's Versuchen bekannt ist. Nur bei *einer* gewissen Temperatur wird jenes Gesetz strenge befolgt; nämlich von der atmosphärischen Luft bei etwa 79° , vom kohlen-sauren Gase bei 156° , vom Wasserstoffgas bei -41° . Für Temperaturen, welche auf entgegengesetzten Seiten dieses ausgezeichneten Punktes liegen, sind die Abweichungen entgegengesetzter Art. Regnault's Versuche (a. a. O. p. 148 und 149) bestätigen, daß das kohlen-saure Gas bei 100° weit besser dem Mariotte'schen Gesetz gehorcht, als bei 0° .

Ferner zeigt I, daß der Ausdehnungs-Coëfficient eines Gases zwischen 0° und 100° ein anderer ist bei constantem Druck, als bei constantem Volumen.

In beiden Fällen nimmt er bedeutend zu mit der Dichtigkeit des Gases, ganz wie Regnault's Versuche aus-sagen.

Wegen der geringen Spannungs- und Temperatur-Unterschiede der Luft erfordern bei barometrischen Höhen-messungen die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetz *keine* Berücksichtigung. Der aus ihnen entspringende Fehler beträgt z. B. bei der Saussure'schen Montblanc-Mes-sung nur $-1,7$ Meter. Von desto größerem Einfluß möch-ten diese Abweichungen seyn bei dem Luft-Thermometer, bei pneumatischen Maschinen und bei der Fortpflanzung des Schalles.

Logarithmiren und differentiiren wir Gl. I, so entsteht:

$$1) \quad \frac{dp}{\pi p^2 + p} = \frac{dt}{a+t} - \frac{dv}{v+R.S}.$$

Der Vergleich mit II ergibt:

$$2) \quad z = \pi p^2$$

und

$$\frac{A}{a+t} \cdot \frac{z+p}{c_p - c_r} = \frac{1}{v+R.S},$$

oder vermöge Gl. I:

$$3) \quad c_p - c_r = A.R.(1 + \pi p)^2.$$

Die Gleichung 2) läßt sich auch ableiten aus den einzigen, bisher über z angestellten Versuchen, denen von Joule und Thomson (*London. Phil. Trans., Vol. 144, p. 341*). Nach ihr hat die unter constanter Temperatur (t) verrichtete innere Arbeit für eine Ausdehnung von v bis v_1 den Werth:

$$\int_v^{v_1} z \cdot dv = \pi \cdot R(a+t) \cdot (p - p_1).$$

Für $v_1 = \infty$ ist die zugehörige Spannung $p_1 = 0$.

Das Potential der Gewichtseinheit eines Gases auf sich selbst hat sonach die Gröfse:

$$\int_v^\infty z \cdot dv = \pi R(a+t)p.$$

Wir begnügen uns hieraus den Schlufs zu ziehen, dafs die Molecularkräfte der Gase *anziehend* wirken. Schon Clausius (*Pogg. Ann. Bd. 105 S. 256*) folgerte dieses direct aus Joule und Thomson's Versuchen.

Nehmen wir den mehr als 100 Versuchen Regnault's gemäß (*Pogg. Ann. Bd. 89 S. 346*) die specifische Wärme bei constantem Druck (c_p) als unveränderlich an, so zeigt Gleichung 3), dafs die specifische Wärme bei constanten Volumen (c_v) sich langsam mit der Spannung p ändert. Für atmosphärische Luft ist $c_p = 0,2377$; wir erhalten daher die Tabelle ¹⁾:

p kg	$c_p - c_v$	c_v	$k = \frac{c_p}{c_v}$
0	0,0689	0,1688	1,408
30336	0,0698	0,1679	1,412
60672	0,0706	0,1671	1,423
303360	0,0780	0,1597	1,505

Wenn Gay-Lussac und Welter zwischen $\frac{1}{3}$ und 2 Atmosphären das Verhältnifs $k = \frac{c_p}{c_v}$ nach akustischen Versu-

1) Diese und die folgende Tabelle sind in der Dissertation falsch berechnet.

chen für constant hielten, so erklärt sich dieses aus der geringen Verschiedenheit der Werthe in der letzten Spalte. Denn erst für $p = 10$ Atmosphären nimmt k einen erheblich größeren Werthen an, als 1,412. Für die anderen Gase erhalten wir bei einer Spannung von $p = 30336^{\text{kg}} = 1$ Atmosphäre die Tabelle:

Name des Gases	c_p (Regnault)	c_v berechnet	$k = \frac{c_p}{c_v}$ (Dulong)	$k = \frac{c_p}{c_v}$ berechnet
Kohlensaures Gas	0,2164	0,1688	1,338	1,282
Wasserstoff-Gas	3,4046	2,3937	1,407	1,422

Die Dulong'schen Angaben finden sich Pogg. Ann. Bd. 16, S. 471. Die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werthen von $k = \frac{c_p}{c_v}$ wird gewiß Jeden befriedigen, der sich erinnert, wie sehr die für atmosphärische Luft beobachteten Werthe (1,348 bis 1,421) von einander abweichen, wie unsicher also bis jetzt die experimentelle Bestimmung des k ist.

Sey k_0 der Gränzwert $\frac{c_p}{c_p - AR}$, welchen das Verhältniß $\frac{c_p}{c_v}$ oder $\frac{c_p}{c_p - AR(1 + \pi p)}$ für $p = 0$ annimmt. Die Spannungsgleichung eines Gasquantums, das sich *ohne äußerliche Zuführung oder Entziehung von Wärme* ausdehnt, ist sodann:

$$4) \quad \left(\frac{a+t}{a+t_1} \right)^{\frac{k_0}{k_0-1}} = \frac{p}{p_1} \cdot e^{\pi(p-p_1)},$$

wenn t_1 und p_1 zusammengehörige Werthe sind von t und p . Diese Gleichung unterscheidet sich nur durch den Factor $e^{\pi(p-p_1)}$ von der bekannten, welche Poisson unter der Voraussetzung aufgestellt hat, daß $k = \frac{c_p}{c_v}$ constant sey. Sie und alle mittelst I aus ihr abgeleiteten Gleichungen sind für die Schalllehre wichtig. Denn sie zeigen, in

welcher Weise Temperatur und Elasticität eines Gases sich ändern bei plötzlichen Verdichtungen und Verdünnungen. Wenn statt Poisson's Formel unsere genauere Gleichung den Berechnungen der Schallgeschwindigkeit zu Grunde gelegt würde, so dürften sich die nicht unbedeutenden Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen erheblich verkleinern.

Durch die nach ihren Resultaten hier mitgetheilten Untersuchungen erhält die mechanische Wärme-Theorie von Neuem eine schöne Bestätigung. Denn nirgends widerstreitet, wie wir sahen, die Theorie der Erfahrung, sondern vielfach steht sie mit ihr in überraschendem Einklang. Wir dürfen hoffen, daß die allgemeine Differentialgleichung II noch auf viele Körper, zunächst etwa auf die Dämpfe, Anwendung finde, und daß wir mit ihrer Hülfe auch dem Moleculargesetz der Körper bald auf die Spur kommen.

Hannover den 1. Mai 1862.

V. *Ueber die Abweichungen der wirklichen Gase
vom Mariotte'schen Gesetze;
von Dr. H. W. Schroeder van der Kolk
aus Maestricht.*

Die Formel des ideellen Gases ist bekanntlich:

$$p v = k(1 + \alpha \tau) = k t,$$

wo $\frac{1}{\alpha} + \tau = t$ und $k\alpha = k$ gleich einer von Druck und Temperatur abhängigen Constaute ist. Diese Formel zeigt dann, daß das Mariotte'sche Gesetz für alle Temperaturen völlige Gültigkeit hat. Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen können wir nun die Menge des Gases immer gleich einem Kilogramm stellen; v ist dann das Volum in Cubikmetern, p der Druck in Kilogrammen per Quadratmeter