

INTORNO AD ALCUNI NUOVI TEOREMI DEL SIG. C. NEUMANN SULLE  
FUNZIONI POTENZIALI; NOTA DEL PROF. EUGENIO BEL-  
TRAMI.

Nel fascicolo 3° (testè uscito alla luce) del t. 16 dei *Mathematische Annalen*, il sig. C. Neumann, promotore indefesso della teoria matematica del potenziale, ha pubblicati (in gran parte senza dimostrazione) molti nuovi teoremi relativi a questa teoria, teoremi i quali sono da giudicarsi come molto importanti, sia per le lacune ch'essi colmano, sia per quelle ch'essi contribuiranno a colmare in seguito. Essi sono raggruppati in due distinti Articoli, il primo dei quali (pag. 409-431) riguarda il potenziale logaritmico di distribuzioni lineari semplici e doppie, ed il secondo (p. 432-438) riguarda il potenziale newtoniano di distribuzioni superficiali semplici e doppie.

L'interesse in me destato dai nuovi risultamenti cui il sig. Neumann è pervenuto mi ha indotto a cercarne subito la dimostrazione e, trovatala, a comunicarla agli studiosi. Ciò faccio colla presente Nota, nella quale tuttavia mi restringo alla considerazione dei potenziali newtoniani, sia per il più immediato vantaggio che ogni nuova agevolezza nel loro maneggio può recare alla fisica matematica, sia per la visibile analogia dei procedimenti (ancor più semplici) coi quali si potrebbero stabilire i teoremi corrispondenti circa i potenziali logaritmici. D'altronde il sig. Neumann è in parte già entrato, rispetto a questi ultimi, in particolari più minuti, e tutti devono desiderare ch'egli stesso svolga, da par suo, le delicate proposizioni che si contengono nella seconda parte del suo primo Articolo; desiderio tanto più legittimo in quanto che egli afferma d'aver già in pronto, da tempo non breve, siffatti svolgimenti.

Il sig. Neumann considera espressamente ed esclusivamente il caso delle superficie *chiuse*, e, supponendole riferite

a coordinate curvilinee, sceglie per tali coordinate quelle che definiscono le linee di curvatura della superficie. Avendo io creduto più conveniente (e non già per sola vaghezza di generalità) di prescindere da queste due particolarizzazioni, dirò le ragioni che mi hanno indotto a ciò fare.

Quanto alla scelta delle coordinate, chiaro essendo (per la natura stessa della questione) che le espressioni in cui esse debbono figurare definitivamente non possono essere altro che *invarianti differenziali*; è naturale che l'uso di coordinate generiche debba condurre più direttamente, come infatti conduce, a quella forma delle suddette espressioni nella quale si rende manifesto il loro carattere invariante.

Quanto poi alla considerazione d'una superficie aperta anzichè chiusa, parmi ch'essa si raccomandi di preferenza, non solo per l'opportunità che dà di conoscere come si atteggiino le formole in quel caso più generale (che pur risponde, come il secondo, a questioni fisiche possibili), ma eziandio per un'altra ragione più concreta. È noto infatti che per applicare alle superficie curve certe relazioni fondamentali fra integrali di superficie ed integrali di contorno, analoghe a quelle notissime di Gauss e di Green e costituenti l'essenziale meccanismo di quasi tutte le operazioni sulle funzioni potenziali, bisogna che il reticolo curvilineo tracciato sulla superficie dalle linee coordinate presenti dovunque lo stesso aspetto generale del reticolo cartesiano nel piano, bisogna, cioè, che sia possibile concepire la trasformazione continua dell'uno nell'altro. Ora per una superficie chiusa questa trasformazione è impossibile. Diventa dunque necessario dividere una tale superficie in due o più pezzi, per ciascun dei quali si possa concepire l'esistenza d'un reticolo curvilineo dotato del carattere suddetto. È certo che, ad operazione compiuta, gli integrali lineari, relativi ai due margini di ciascun taglio fatto nella superficie primitiva, si debbono elidere a vicenda; ma ciò non pertanto questi integrali si presentano spontaneamente nell'applicazione delle mentevate formole, e non pare quindi inopportuno, anche per questo solo riguardo, di conservarne la traccia.

Supporrò dunque, in ciò che segue, che si tratti sempre d'un pezzo di superficie,  $\sigma$ , nel quale il reticolo delle coordinate curvilinee possieda dovunque il suaccennato carattere <sup>(1)</sup>; le formole ottenute saranno valide, naturalmente, per un altro pezzo qualunque, o per una superficie chiusa, divisibile in parti dotate separatamente della stessa proprietà.

Sieno  $\xi, \eta, \zeta$  le coordinate rettangolari d'un punto qualunque dello spazio,  $u, v$  le coordinate curvilinee d'un punto qualunque della superficie  $\sigma$ . Pei punti di questa superficie le  $\xi, \eta, \zeta$  sono funzioni determinate delle variabili  $u, v$ , e ponendo

$$E = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

$$F = \xi'\xi_1 + \eta'\eta_1 + \zeta'\zeta_1,$$

$$G = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

(dove l'apice superiore od inferiore designa una derivazione parziale rispetto ad  $u$  od a  $v$ ) si ha

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

come espressione del quadrato d'un elemento lineare qualunque della superficie  $\sigma$ .

In virtù dei valori di  $E, F, G$  la quantità  $EG - F^2$  non può mai diventare negativa; la supposizione fatta sulla natura del reticolo curvilineo esclude ch'essa possa annullarsi entro i limiti di  $\sigma$  e sul contorno  $s$ . Designeremo con  $H$  il valore positivo del radicale

$$H = \sqrt{EG - F^2} > 0.$$

Per un punto qualunque  $(u, v)$  della superficie  $\sigma$  passano due linee di questa superficie, l'una lungo la quale varia soltanto  $u$ , l'altra lungo la quale varia soltanto  $v$ . Le tangenti in quel punto a queste due linee, dirette nel senso

(1) Per maggiori schiarimenti si consulti la mia Memoria: *Sulle variabili complesse in una superficie qualunque*, nel t. 1 della nuova Serie degli *Annali di Matematica pura ed applicata* (Art. 1).

in cui crescono le rispettive variabili  $u, v$ , fanno tra loro un angolo il cui coseno è

$$\frac{F}{\sqrt{EG}}$$

e che, per le ipotesi fatte, è maggiore di  $0^\circ$  e minore di  $180^\circ$ . Chiameremo  $n$  la normale alla superficie nel punto  $(u, v)$ , diretta in modo che la prima delle dette due tangenti, percorrendo il detto angolo per raggiungere la seconda, giri intorno alla retta  $n$  nello stesso senso in cui l'asse positivo delle  $\xi$  deve girare (d'un angolo retto) intorno all'asse positivo delle  $\zeta$ , per raggiungere l'asse positivo delle  $\eta$ . Per tale convenzione, designando con  $\alpha, \mathfrak{E}, \gamma$  i coseni degli angoli che la retta  $n$  fa coi tre assi delle  $\xi, \eta, \zeta$ , cioè ponendo

$$\alpha = \frac{d\xi}{dn}, \quad \mathfrak{E} = \frac{d\eta}{dn}, \quad \gamma = \frac{d\zeta}{dn},$$

si hanno le formule

$$\begin{aligned} H\alpha &= \eta'\zeta, - \eta\zeta', \\ H\mathfrak{E} &= \zeta'\xi, - \zeta\xi', \\ H\gamma &= \xi'\eta, - \xi\eta'. \end{aligned}$$

Ciò posto osserviamo che, se la superficie ha dovunque una curvatura finita, si possono, in sufficiente prossimità di essa, considerare le  $\xi, \eta, \zeta$  come funzioni monodrome di  $u, v, n$  ( $u$  e  $v$  essendo le coordinate curvilinee del piede della normale  $n$ ), epperò si può scrivere

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi' du + \xi, dv + \alpha dn, \\ d\eta &= \eta' du + \eta, dv + \mathfrak{E} dn, \\ d\zeta &= \zeta' du + \zeta, dv + \gamma dn, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta &= E du + F dv, \\ \xi, d\xi + \eta, d\eta + \zeta, d\zeta &= F du + G dv, \end{aligned}$$

Introducendo dunque i simboli

$$\frac{G\phi' - F\phi_i}{H} = M_\phi, \quad \frac{E\phi_i - F\phi'}{H} = N_\phi$$

(dove  $\phi$  è una funzione qualunque di  $u$  e  $v$ ), si ha

$$du = \frac{1}{H} (M_\xi d\xi + M_\eta d\eta + M_\zeta d\zeta)$$

$$dv = \frac{1}{H} (N_\xi d\xi + N_\eta d\eta + N_\zeta d\zeta)$$

$$dn = \alpha d\xi + \varepsilon d\eta + \gamma d\zeta.$$

Sostituendo questi valori nell'identità

$$\frac{d\phi}{d\xi} d\xi + \frac{d\phi}{d\eta} d\eta + \frac{d\phi}{d\zeta} d\zeta = \phi' du + \phi_i dv + \frac{d\phi}{dn} dn,$$

(dove  $\phi$  è una funzione qualunque di  $\xi, \eta, \zeta$ ) ed osservando essere

$$M_\xi \phi' + N_\xi \phi_i = M_\phi \xi' + N_\phi \xi_i,$$

si ha

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{H} (M_\phi \xi' + N_\phi \xi_i) + \alpha \frac{d\phi}{dn}$$

$$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{1}{H} (M_\phi \eta' + N_\phi \eta_i) + \varepsilon \frac{d\phi}{dn}$$

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{1}{H} (M_\phi \zeta' + N_\phi \zeta_i) + \gamma \frac{d\phi}{dn}$$

Moltiplicando ordinatamente queste equazioni per

$$\frac{d\psi}{d\xi}, \quad \frac{d\psi}{d\eta}, \quad \frac{d\psi}{d\zeta}$$

(dove  $\psi$  è un'altra funzione qualunque di  $\xi, \eta, \zeta$ ) e sommando membro a membro, si ha

$$\frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d\psi}{d\eta} + \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{d\psi}{d\zeta} \\ = \frac{1}{H} (M_{\phi} \psi' + N_{\phi} \psi' + \frac{d\phi}{dn} \frac{d\psi}{dn},$$

o più brevemente

$$(1) \quad \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d\psi}{d\eta} + \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{d\psi}{d\zeta} = \Delta_1(\phi, \psi) + \frac{d\phi}{dn} \frac{d\psi}{dn},$$

dove l'espressione

$$\Delta_1(\phi, \psi) = \frac{1}{H^2} [G\phi'\psi' - F(\phi'\psi, + \phi, \psi') + E\phi, \psi]$$

è quella di cui ho già da lungo tempo fatto uso sotto il nome di parametro differenziale intermedio o misto delle due funzioni  $\phi$  e  $\psi$ , e che, più brevemente, può designarsi come il loro invariante bilineare (\*).

Facendo successivamente nell'equazione (1)  $\phi = \xi, = \eta, = \zeta$ , si ottengono le formole

$$(1)_a \quad \begin{cases} \frac{d\phi}{d\xi} = \Delta_1(\psi, \xi) + \alpha \frac{d\psi}{dn}, \\ \frac{d\psi}{d\eta} = \Delta_1(\psi, \eta) + \beta \frac{d\psi}{dn}, \\ \frac{d\psi}{d\zeta} = \Delta_1(\psi, \zeta) + \gamma \frac{d\psi}{dn}, \end{cases}$$

che non differiscono punto da quelle che abbiamo ottenute più sopra per  $\phi$  e che abbiamo adoperate per la deduzione della formola generale (1).

(1) Veggansi le mie *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, nei tomi 2 e 3 del Giornale di Battaglini (1864-65) la già citata memoria *Sulle variabili complesse* ecc., la memoria *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima* e quella intitolata *Teorica generale dei parametri differenziali*, nella serie II, t. 7 e 8 delle memorie dell'Accademia di Bologna. Ho dato un riassunto delle principali formole circa questo argomento in un articolo *Zur Theorie des Krümmungsmaasses*, nel t. I dei *Mathematische Annalen*. L'attuale equazione (1) non è che un caso particolare della seconda equazione (26) del § 3 della suddetta *Teorica*.

Consideriamo ora un integrale della forma

$$\int \mu \Delta_1(\phi, \psi) d\sigma,$$

esteso a tutto il pezzo di superficie  $\sigma$ . Le quantità  $\mu$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  sono tre funzioni delle  $u$ ,  $v$  di cui indicheremo fra breve le proprietà necessarie. Osservando che si può porre  $d\sigma = H du dv$ , il precedente integrale può scriversi così:

$$\iint \mu (M_\phi \psi' + N_\phi \psi_1) du dv.$$

Ma si ha identicamente

$$\mu M_\phi \psi' = (\mu M_\phi \psi)' - [\mu (M_\phi)' + \mu' M_\phi] \psi,$$

$$\mu N_\phi \psi_1 = (\mu N_\phi \psi)_1 - [\mu (N_\phi)_1 + \mu_1 N_\phi] \psi,$$

quindi il detto integrale si può di nuovo convertire nell'espressione seguente

$$\iint [(\mu M_\phi \psi)' + (\mu N_\phi \psi)_1] du dv - \int [\mu \Delta_2 \phi + \Delta_1(\phi; \mu)] \psi d\sigma,$$

dove il simbolo

$$\Delta_2 \phi = \frac{1}{H} [(M_\phi)' + (N_\phi)_1]$$

rappresenta il secondo parametro differenziale della funzione  $\phi$  (').

D'altronde, se  $\chi$  è una funzione di  $u$ ,  $v$  che in tutta la superficie  $\sigma$  sia monodroma, continua e finita e sia dotata di derivate prime, si ha (\*)

$$\begin{aligned} \iint \chi' du dv &= - \int \left( E \frac{du}{dv} + F \frac{dv}{dv} \right) \frac{\chi ds}{H}, \\ \iint \chi_1 du dv &= - \int \left( F \frac{du}{dv} + G \frac{dv}{dv} \right) \frac{\chi ds}{H}, \end{aligned}$$

(1) Memorie citate.

(2) Memoria *Sulle variabili complesse* ecc. (Art. 5).

dove gli integrali del primo membro sono estesi a tutta la superficie  $\sigma$  e quelli del secondo membro a tutto il contorno  $s$ , percorso nel senso positivo (rispetto alla normale  $n$  d'ogni punto di  $\sigma$  prossimo al contorno stesso), e dove  $v$  è la direzione dell'elemento lineare di  $\sigma$  condotto da un punto qualunque del contorno normalmente al contorno stesso, verso la regione di superficie che si considera. Quindi, supponendo che  $\mu$  e  $\psi$  siano funzioni monodrome, continue, finite e dotate di derivate prime, e che  $\phi$  sia una funzione monodroma, continua e finita insieme colle sue derivate prime e dotata di derivate seconde, si ha

$$\begin{aligned} & \iint [(\mu M_{\phi} \psi)' + (\mu N_{\phi} \psi)] d\mu dv \\ &= - \int \left\{ M_{\phi} \left( E \frac{d\mu}{dv} - F \frac{d\psi}{dv} \right) + N_{\phi} \left( F \frac{d\mu}{dv} - G \frac{d\psi}{dv} \right) \right\} \frac{\mu \psi ds}{H} \\ &= - \int \mu \frac{d\phi}{dv} \psi ds. \end{aligned}$$

Si ha dunque finalmente l'identità seguente:

$$(2) \quad \int \mu \Delta_1(\phi, \psi) d\sigma = - \int [\mu \Delta_2 \phi + \Delta_1(\phi, \mu)] \psi d\sigma - \int \mu \frac{d\phi}{dv} \psi ds,$$

che comprende come caso particolare (per  $\mu = 1$ ) la formula da me stabilita nella Memoria citata: *Sulle variabili complesse* ec. e coll'aiuto della quale ho potuto stabilire il teorema analogo a quello di Green per una superficie qualunque.

Premesso ciò, veniamo alla nostra questione, incominciando a considerare l'ordinaria funzione potenziale di superficie

$$(3) \quad V = \int \frac{h d\sigma}{r},$$

dove  $h$  è la densità ed  $r$  la distanza assoluta dell'elemento



$d\sigma$  dal punto *potenziato* (1), di cui diremo  $x, y, z$  le coordinate e che supporremo a distanza finita dalla superficie  $\sigma$ .

Ponendo per comodo

$$\psi = \frac{1}{r},$$

si ha

$$(3)_a \quad V = \int h \psi d\sigma,$$

$$\frac{dV}{dx} = \int h \frac{d\psi}{dx} d\sigma = - \int h \frac{d\psi}{d\xi} d\sigma,$$

ossia, in virtù delle formole (1)<sub>a</sub>,

$$\frac{dV}{dx} = - \int h \Delta_1(\psi, \xi) d\sigma - \int h \alpha \frac{d\psi}{dn} d\sigma$$

Applicando la relazione (2), con che si suppone che  $h$  sia funzione monodroma, continua e finita di  $u, v$ , dotata di derivate prime, si ottiene immediatamente

$$(4)_a \quad \frac{dV}{dx} = \int [h \Delta_2 \xi + \Delta_1(h, \xi)] \psi d\sigma - \int h \alpha \frac{d\psi}{dn} d\sigma + \int h \frac{d\xi}{dv} \psi d\sigma,$$

e riponendo per  $\psi$  il suo valore

$$(4) \quad \frac{dV}{dx} = \int \frac{h \Delta_2 \xi + \Delta_1(h, \xi)}{r} d\sigma - \int h \alpha \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \int h \frac{d\xi}{dv} \frac{d\sigma}{r}.$$

È questa la formola (13) B del sig. Neumann, completata da un termine (l'ultimo) che è la funzione potenziale d'una massa distribuita lungo il contorno  $s$ , termine il quale naturalmente svanisce quando la superficie  $\sigma$  è chiusa.

Dal processo di dimostrazione risulta che questa formola,

(1) Parmi che adottando le denominazioni di *punto potenziato* e di *punto potenziante*, di *masse potenziate* e di *masse potenzianti*, si eviterebbero, nella teoria delle funzioni potenziali, molte perifrasi e molti settintesi che rendono talora penoso e talora oscuro il linguaggio.

scritta sotto la forma (4)<sub>a</sub>, è indipendente dalla legge d'attrazione.

La massa totale cui sono dovute le funzioni potenziali del secondo membro è espressa da

$$\int [h \Delta_1 \xi + \Delta_1 (h, \xi)] d\sigma + \int h \frac{d\xi}{d\nu} ds$$

ed è = 0, come risulta dal porre nell'identità (2)  $\mu = h$ ,  $\phi = \xi$ ,  $\psi = 1$ .

Passiamo alla funzione potenziale di doppio strato

$$(5) \quad W = \int g \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

dove  $g$  è il momento. Introducendo di nuovo il simbolo  $\psi$ , si ha

$$(5)_a \quad W = \int g \frac{d\psi}{dn} d\sigma = \int g \left( \frac{d\psi}{d\xi} \alpha + \frac{d\psi}{d\eta} \epsilon + \frac{d\psi}{d\zeta} \gamma \right) d\sigma,$$

donde

$$\frac{dW}{dx} = - \int g \left( \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \alpha + \frac{d^2\psi}{d\xi d\eta} \epsilon + \frac{d^2\psi}{d\xi d\zeta} \gamma \right) d\sigma.$$

Per applicare le formole generali al secondo membro di questa equazione, conviene dargli prima un'altra forma. A tal fine consideriamo i valori di  $g$ , i quali, per il significato di questa quantità, dipendono soltanto dalle variabili  $u$  e  $v$ , come i valori che prende sulla superficie  $\sigma$  una funzione delle tre coordinate  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , funzione che dobbiamo supporre dotata di derivate prime, almeno in prossimità della superficie. In tale ipotesi, la quale esige evidentemente che anche la data funzione  $g(u, v)$  sia dotata di derivate prime, si può scrivere

$$\begin{aligned} g \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\xi} \right) - \frac{dg}{d\xi} \frac{d\psi}{d\xi}, \\ g \frac{d^2\psi}{d\xi d\eta} &= \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\eta} \right) - \frac{dg}{d\xi} \frac{d\psi}{d\eta}, \\ g \frac{d^2\psi}{d\xi d\zeta} &= \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\zeta} \right) - \frac{dg}{d\xi} \frac{d\psi}{d\zeta}, \end{aligned}$$

epperò

$$\frac{dW}{dx} = \int \frac{dg}{d\xi} \frac{d\psi}{dn} d\sigma$$

$$- \int \left\{ \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\xi} \right) \cdot \alpha + \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\eta} \right) \cdot \varepsilon + \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\zeta} \right) \cdot \gamma \right\} d\sigma.$$

Ora, dal noto teorema

$$\int_s (X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta)$$

$$= \int \left\{ \left( \frac{dZ}{d\eta} - \frac{dY}{d\zeta} \right) \alpha + \left( \frac{dX}{d\zeta} - \frac{dZ}{d\xi} \right) \varepsilon + \left( \frac{dY}{d\xi} - \frac{dX}{d\eta} \right) \gamma \right\} d\sigma,$$

dove il primo integrale è preso lungo il contorno  $s$  (percorso positivamente) della superficie  $\sigma$  alla quale si estende il secondo integrale, e dove le  $X, Y, Z$  sono tre funzioni di  $\xi, \eta, \zeta$  monodrome, continue, finite e dotate di derivate prime in prossimità della superficie  $\sigma$ , si desume, in particolare,

$$\int_s g \frac{d\psi}{d\zeta} d\eta = \int \left\{ \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\zeta} \right) \cdot \gamma - \frac{d}{d\zeta} \left( g \frac{d\psi}{d\xi} \right) \cdot \alpha \right\} d\sigma,$$

$$\int_s g \frac{d\psi}{d\eta} d\zeta = \int \left\{ \frac{d}{d\eta} \left( g \frac{d\psi}{d\eta} \right) \cdot \alpha - \frac{d}{d\xi} \left( g \frac{d\psi}{d\eta} \right) \cdot \varepsilon \right\} d\sigma.$$

Ponendo dunque

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} = \nabla\psi,$$

si ha

$$\frac{dW}{dx} = \int \frac{dg}{d\xi} \frac{d\psi}{dn} d\sigma - \int g \nabla\psi \cdot d\sigma$$

$$- \int \left( \frac{dg}{d\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{dg}{d\eta} \frac{d\psi}{d\eta} + \frac{dg}{d\zeta} \frac{d\psi}{d\zeta} \right) \alpha d\sigma + \int_s g \left( \frac{d\psi}{d\eta} d\zeta - \frac{d\psi}{d\zeta} d\eta \right).$$

Possiamo adesso, per la definitiva trasformazione di questa espressione, invocare le formole stabilite al principio.

Facendo nella formola (1)  $\phi = g$ , si ottiene

$$\frac{dg}{d\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{dg}{d\eta} \frac{d\psi}{d\eta} + \frac{dg}{d\zeta} \frac{d\psi}{d\zeta} = \Delta_1(g, \psi) + \frac{dg}{dn} \frac{d\psi}{dn},$$

e facendo nella prima delle formole (1)<sub>a</sub>  $\psi = g$  si ottiene pure

$$\frac{dg}{d\xi} - \alpha \frac{dg}{dn} = \Delta_1(g, \xi).$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} = & \int \Delta_1(g, \xi) \frac{d\psi}{dn} d\sigma + \int_s g \left( \frac{d\psi}{d\eta} d\zeta - \frac{d\psi}{d\zeta} \eta \right) \\ & - \int g \nabla \psi d\sigma - \int \alpha \Delta_1(g, \psi) d\sigma, \end{aligned}$$

espressione in cui di nuovo non intervengono che i valori superficiali di  $g$  e dove non resta che da trasformare l'ultimo integrale mediante la formola (2), facendo in questa  $\mu = \alpha$   $\phi = g$ ; il che esige che  $g(u, v)$  sia funzione monodroma, continua e finita, insieme colle sue derivate prime, e che sia dotata altresì di derivate seconde. Operando questa trasformazione e ponendo inoltre, per brevità,

$$\int_s g\psi d\xi = X, \quad \int_s g\psi d\eta = Y, \quad \int_s g\psi d\zeta = Z,$$

si ottiene finalmente

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} = & \int [\alpha \Delta_1 g + \Delta_1(g, \alpha)] \psi d\sigma + \int \Delta_1(g, \xi) \frac{d\psi}{dn} d\sigma \\ (6)_a \quad & - \int g \nabla \psi d\sigma + \int \alpha \frac{dg}{dv} \psi ds + \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \end{aligned}$$

e riponendo per  $\psi$  il suo valore

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} = & \int \frac{\alpha \Delta_1 g + \Delta_1(g, \alpha)}{r} d\sigma + \int \Delta_1(g, \xi) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma \\ (6) \quad & + \int \alpha \frac{dg}{dv} \frac{ds}{r} + \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}. \end{aligned}$$

È questa la formola (14) B del sig. Neumann, completata da tre nuovi termini (i tre ultimi), dei quali il primo è la funzione potenziale d'una massa distribuita lungo il contorno  $s$ , e gli altri due sono le derivate prime delle funzioni potenziali di due analoghe distribuzioni lineari <sup>(1)</sup>.

Per renderè questa formola indipendente dalla legge di attrazione bisogna aggiungere un altro integrale di superficie (il terzo nella formola (6)<sub>a</sub>).

Le due formole (4) (6), a ciascuna delle quali se ne possono associare due altre, relative alle coordinate  $y$  e  $z$ , fanno evidentemente riscontro a quelle, già note da lungo tempo, che forniscono le derivate d'una funzione potenziale di spazio per mezzo di funzioni potenziali di spazio e di superficie. Quando  $\sigma$  è una superficie chiusa, esse prendono le forme seguenti

$$\frac{dV}{dx} = V_1 + W_1, \quad \frac{dW}{dx} = V_2 + W_2,$$

dove  $V_1, V_2$  sono funzioni della specie di  $V$  e  $W_1, W_2$  sono funzioni della specie di  $W$ ; donde si conclude, col sig. Neumann, l'importante risultato che ogni derivata, qualunque ne sia l'ordine, di  $V$  o di  $W$ , rispetto alle coordinate  $x, y, z$ , è sempre esprimibile sotto forma di somma di due funzioni potenziali di superficie, l'una di semplice, l'altra di doppio strato.

Se si ammette, come fa il sig. Neumann, che sia già stata dimostrata la continuità della funzione

$$V = \int \frac{h d\sigma}{r},$$

nel passaggio del punto  $(x, y, z)$  attraverso alla superficie, e la discontinuità della funzione

$$W = \int g \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma,$$

(1) Quando  $g$  è costante questi due termini sono i soli che rimangono nel secondo membro, e l'equazione che si ottiene è la traduzione analitica del teorema fondamentale di Ampère.

nel passaggio medesimo, discontinuità definita dall'equazione

$$W_n - W_{n'} = 4 \pi g ,$$

dove  $W_n$  e  $W_{n'}$  sono i due valori di  $W$  nell'immediata prossimità del punto cui si riferisce il valore di  $g$ , l'uno dalla parte della normale  $n$  l'altro da quella della normale opposta  $n'$ , le formole (4) e (6) conducono molto facilmente alla determinazione della discontinuità delle derivate di  $V$  e di  $W$  nel passaggio attraverso alla superficie, passaggio che supporremo effettuarsi in un punto posto a distanza finita dal contorno  $s$  della superficie  $\sigma$ .

Limitiamoci a considerare le derivate normali, e supponiamo quindi (per applicare direttamente a questo caso le formole già scritte) che nel punto di passaggio si abbia  $\alpha = 1$ ,  $\epsilon = \gamma = 0$ , cioè

$$\eta' \zeta_i - \eta_i \zeta'_i = H > 0, \quad \zeta'_i \xi_i - \zeta_i \xi'_i = 0, \quad \xi'_i \eta_i - \xi_i \eta'_i = 0 ,$$

epperò

$$\xi'_i = \xi_i = 0 ,$$

come è d'altronde manifesto. Scrivendo le formole (4) e (6) così

$$\frac{dV}{dx} = - \int_{hx} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma + P , \quad \frac{dW}{dx} = \int \Delta_i(g, \xi) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma + Q ,$$

dove  $P$  e  $Q$  sono funzioni di  $x, y, z$  che restano continue nel passaggio del punto  $(x, y, z)$  attraverso alla superficie, in ogni punto a distanza finita dal contorno, si ha immediatamente, dalle proprietà ammesse,

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_n - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{n'} = -4\pi h , \quad \left(\frac{dW}{dx}\right)_n - \left(\frac{dW}{dx}\right)_{n'} = 0 ,$$

ossia

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -4\pi h , \quad \frac{dW}{dn} + \frac{dW}{dn'} = 0 ,$$

formole che esprimono le notissime proprietà delle prime derivate normali di  $V$  e di  $W$ , nell'immediata prossimità della superficie.

Per trovare le analoghe proprietà delle derivate seconde scriviamo le equazioni (4), (6) in quest'altro modo

$$\frac{dV}{dx} = \int \frac{h_1 d\sigma}{r} + \int g_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + p,$$

$$\frac{dW}{dx} = \int \frac{h_2 d\sigma}{r} + \int g_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + q,$$

dove

$$h_1 = h \Delta_1 \xi + \Delta_1(h, \xi), \quad g_1 = -h\alpha,$$

$$h_2 = \alpha \Delta_1 g + \Delta_1(g, \alpha), \quad g_2 = \Delta_1(g, \xi),$$

e dove  $p, q$  sono funzioni dipendenti dal solo contorno  $s$ . Di qui, in virtù delle stesse formole (4), (6), si trae

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \int [-h_1 \alpha + \Delta_1(g_1, \xi)] \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + P,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \int [-h_2 \alpha + \Delta_1(g_2, \xi)] \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + Q,$$

dove  $P, Q$  sono di nuovo funzioni che rimangono continue nel passaggio attraverso alla superficie. Ora nel punto di passaggio si ha, per ipotesi,  $\xi' = \xi_1 = 0$ , epperò

$$\Delta_1(g_1, \xi) = 0 \quad \Delta_1(g_2, \xi) = 0;$$

dunque

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_n - \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_n' = -4\pi h_1,$$

$$\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_n - \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_n' = -4\pi h_2,$$

dove

$$h_1 = h \Delta_1 \xi, \quad h_2 = \Delta_2 g + \Delta_1 (g, \alpha).$$

Ma da formole note (1) si ha, in generale

$$\Delta_1 \xi = 1 - \alpha^2, \quad \Delta_2 \xi = -\alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

dove  $R_1, R_2$  sono i due raggi principali di curvatura della superficie nel punto considerato, contati positivamente quando la loro direzione (dal centro di curvatura verso la superficie) coincide con quella della normale positiva  $n$ , negativamente nel caso contrario. Dalla prima di queste due formole si ha, per  $\alpha = 1$ ,

$$\alpha' = -\frac{1}{2} (\Delta_1 \xi)', \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} (\Delta_1 \xi)_2;$$

quindi, per essere  $\Delta_1 \xi$  funzione quadratica ed omogenea delle derivate  $\xi', \xi_2$ , che si annullano nel punto di passaggio, si ha, in questo stesso punto,  $\alpha' = \alpha_2 = 0$ , donde

$$\Delta_1 (g, \alpha) = 0,$$

epperò

$$h_1 = -h \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad h_2 = \Delta_2 g.$$

Le formole cercate sono dunque

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2 V}{dn^2} - \frac{d^2 V}{dn'^2} = 4\pi h \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ \frac{d^2 W}{dn^2} - \frac{d^2 W}{dn'^2} = -4\pi \Delta_2 g. \end{cases}$$

La prima di queste formole è una di quelle (17. E) che il sig. Neumann dà come applicazioni dei suoi teoremi, ed

(1) Cfr. le mie Memorie già citate. Del resto la prima equazione si deduce dalla prima delle (1)\* facendo  $\psi = \xi$ , e la seconda si ricava da una formola generale dimostrata più sotto (vedi in fine della presente Nota.)



era già stata dimostrata (con qualche restrizione) dal prof. Paci <sup>(1)</sup>. La seconda mi sembra nuova <sup>(2)</sup>. Ambedue però sono intimamente connesse fra loro in virtù d'una proposizione più generale, che ora procedo a stabilire, e dalla quale mi pare che venga meglio chiarita la loro vera origine analitica.

Riferiamo i punti dello spazio a tre coordinate curvilinee  $u, v, w$ , corrispondenti a tre famiglie di superficie, le prime due delle quali sieno ortogonali alla terza. La superficie  $\sigma$  sia una di quelle appartenenti alla terza famiglia, e, per semplicità, sia quella che corrisponde al valore  $w = 0$  del parametro di questa famiglia, il quale supporremo crescente dalla parte della normale positiva  $n$ . Il quadrato dell'elemento lineare generico dello spazio è, per le ammesse ipotesi, evidentemente rappresentato da un'espressione della forma

$$E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 + K^2 dw^2,$$

dove  $E, F, G, K$  sono quattro funzioni di  $u, v, w$ , circa le prime tre delle quali possiamo supporre che, per  $w = 0$ , si riducono a quelle stesse che vennero precedentemente designate coi medesimi simboli, e, circa la quarta, riterremo essere  $K > 0$ .

Continuiamo a denotare con  $\Delta_u$  e  $\Delta_v$  i parametri differenziali di primo e second ordine relativi all'ipotesi  $dw = 0$ , cioè relativi al caso in cui si considerino come variabili le sole  $u, v$ ; e denotiamo invece con  $\nabla_u, \nabla_v$  le analoghe espressioni rispetto allo spazio a tre dimensioni, rispetto, cioè, al caso in cui si consideri come variabile anche  $w$ . Per tale convenzione, rammentando le regole generali per la formazione

(1) *Giornale di Battaglini*, t. 15.

(2) Il confronto di essa con quella che il sig. Neumann ha trovato nei potenziali logaritmici (18. D) conferma ancora una volta l'esattezza d'una osservazione di Lamé (*Leçons sur les courbes curvilignes*, § 15) già da me rilevata nel § 16 delle citate *Ricerche d'analisi* ecc.

dei parametri differenziali (1), si ottiene dapprima, per una funzione qualunque  $\phi$ ,

$$\nabla_1 \phi = \Delta_1 \phi + \frac{1}{K^2} \left( \frac{d\phi}{dw} \right)^2;$$

indi

$$\nabla_2 \phi = \frac{1}{HK} \left\{ (KM_\phi)' + (KN_\phi)_1 + \frac{d}{dw} \left( \frac{H}{K} \frac{d\phi}{dw} \right) \right\}, \quad (H = \sqrt{EG - F^2})$$

ossia

$$\nabla_2 \phi = \Delta_2 \phi + \frac{\Delta_1(\phi, K)}{K} + \frac{1}{HK} \frac{d}{dw} \left( \frac{H}{K} \frac{d\phi}{dw} \right).$$

Di qui si trae, per  $\phi = w$ ,

$$\nabla_1 w = \frac{1}{K^2}, \quad \nabla_2 w = \frac{1}{HK} \frac{d}{dw} \frac{H}{K},$$

epperò

$$\frac{\nabla_2 w}{\sqrt{\nabla_1 w}} - \frac{d\sqrt{\nabla_1 w}}{dw} = \frac{1}{HK} \frac{dH}{dw},$$

ossia, per una nota formola di Lamè (2),

$$\frac{1}{HK} \frac{dH}{dw} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

dove  $R_1, R_2$  sono i raggi principali di curvatura della superficie  $w = \text{costante}$ , nel punto  $(u, v, w)$ .

Si può quindi scrivere

$$\nabla_2 \phi = \Delta_2 \phi + \frac{\Delta_1(\phi, K)}{K} + \frac{1}{K} \frac{d}{dw} \left( \frac{1}{K} \frac{d\phi}{dw} \right) + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{K} \frac{d\phi}{dw},$$

ossia finalmente

$$(8) \quad \nabla_2 \phi = \Delta_2 \phi + \frac{\Delta_1(\phi, K)}{K} + \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d\phi}{ds},$$

(1) Cfr. la citata *Teorica generale dei parametri differenziali*, § 8.

(2) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 42.

dove  $s$  è l'arco della linea secondo cui  $s'$  intersecano le superficie  $u = cost.$ ,  $v = cost.$ , arco contato positivamente nel senso di  $w$  crescente.

È questa una formola generale che comprende molti risultati conosciuti e che potrebbe porgere argomento ad altre applicazioni. Ma, per venire senz'altro alla questione che ci occupa, supponiamo che la variabile designata generalmente con  $w$  sia il segmento  $n$  della normale positiva condotta nel punto  $(u, v)$  alla superficie  $\sigma$ , cosicchè la famiglia  $w = cost.$  sia formata delle superficie parallele alla data, e le famiglie  $u = cost.$ ,  $v = cost.$  sieno formate di superficie rigate normali alle precedenti. È evidente che in tal caso, essendo  $ds = dn$  si ha  $K = 1$  e quindi

$$\Delta_1(\phi, K) = 0,$$

cosicchè l'equazione (8) diventa

$$(8)_2 \quad \nabla_2 \phi = \Delta_2 \phi + \frac{d^2 \phi}{dn^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d\phi}{dn}.$$

Se invece della normale positiva  $n$  si volesse considerare la normale negativa  $n'$ , opposta alla  $n$ , si avrebbe evidentemente

$$\nabla_2 \phi = \Delta_2 \phi + \frac{d^2 \phi}{dn'^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d\phi}{dn'}.$$

Ciò posto distinguiamo coi simboli  $\phi$  e  $\phi'$  i valori che la funzione  $\phi$  prende, in prossimità della superficie  $\sigma$ , dalle due opposte parti di questa. Avremo

$$\nabla_2 \phi = \Delta_2 \phi + \frac{d^2 \phi}{dn^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d\phi}{dn},$$

$$\nabla_2 \phi' = \Delta_2 \phi' + \frac{d^2 \phi'}{dn'^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d\phi'}{dn'},$$

equazioni in ciascuna delle quali i valori delle quantità

$$E, \quad F, \quad G, \quad R_1, \quad R_2,$$

debbono naturalmente riferirsi al punto cui corrisponde il valore  $\phi$ , ovvero  $\phi'$ , della funzione. Se supponiamo che i due

punti sieno sopra una stessa normale, le loro coordinate saranno rispettivamente  $u, v, n$  ed  $u, v, n'$ . Ma facendo decrescere indefinitamente i valori di  $n$  e di  $n'$ , è chiaro che quelle cinque quantità tenderanno a prendere gli stessi valori nell'una e nell'altra equazione, tenderanno, cioè, a prendere i valori che loro competono nel punto  $(u, v)$  della superficie  $\sigma$ . In tale stato limite potremo dunque scrivere

$$(9) \quad \frac{d^2 \phi}{dn^2} - \frac{d^2 \phi}{dn'^2} = -\Delta_1(\phi_n - \phi_{n'}) - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{d\phi}{dn} + \frac{d\phi}{dn'} \right) + (\nabla_1 \phi)_n - (\nabla_1 \phi)_{n'},$$

dove  $\phi_n$  e  $\phi_{n'}$  sono i valori che la funzione  $\phi$  prende sulla faccia positiva e sulla faccia negativa della superficie  $\sigma$ , come limiti di quelli che essa prende in prossimità di questa superficie dalle due opposte parti di essa.

È questa la formola che ci proponevamo di stabilire e che esprime la discontinuità della seconda derivata normale d'una funzione qualunque, attraverso ad una superficie, per mezzo dei valori che la funzione stessa, la sua prima derivata normale e il suo secondo parametro differenziale (completo) prendono da ambedue le parti della superficie, nell'immediata prossimità di essa.

Se  $\phi$  è una funzione potenziale procedente da sole masse distribuite sulla superficie stessa, si ha

$$(9) \quad \frac{d^2 \phi}{dn^2} - \frac{d^2 \phi}{dn'^2} = -\Delta_1(\phi_n - \phi_{n'}) - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{d\phi}{dn} + \frac{d\phi}{dn'} \right)$$

Se, più in particolare, si tratta di una funzione potenziale ordinaria

$$\phi = V = \int \frac{h d\sigma}{r},$$

si ha

$$V_n = V_{n'}, \quad \frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -4\pi h,$$

epperò

$$\frac{d^2 V}{dn^2} - \frac{d^2 V}{dn'^2} = 4 \pi h \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Se, invece, si tratta d'una funzione potenziale di doppio strato

$$\phi = W = \int g \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

si ha

$$W_n - W_{n'} = 4 \pi g, \quad \frac{dW}{dn} + \frac{dW}{dn'} = 0,$$

epperò

$$\frac{d^2 W}{dn^2} - \frac{d^2 W}{dn'^2} = -4 \pi \Delta_1 g.$$

Questi risultati s'accordano perfettamente, come si vede, con quelli che abbiamo più sopra ricavati dalle formole del sig. Neumann. Col procedimento attuale essi appariscono quali semplici corollarii dell'equazione di Laplace.

Per applicare la formola (9) alle funzioni potenziali di spazio bisogna supporre che la densità sia continua da ambedue le parti della superficie  $\sigma$ . In questo caso si ha

$$\phi_n - \phi_{n'} = 0, \quad \frac{d\phi}{dn} + \frac{d\phi}{dn'} = 0,$$

ed i valori di

$$(\nabla_1 \phi)_n, \quad (\nabla_1 \phi)_{n'}$$

sono determinati dall'equazione di Poisson. Il risultato che si ottiene in tal modo è d'accordo con quello che già si conosce <sup>(1)</sup>.

Scrivendo la formola (8), così

$$\Delta_1 \phi = \nabla_1 \phi - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d\phi}{dn} - \frac{d^2 \phi}{dn^2},$$

(1) Cfr. Kirchhoff, *Mechanik*, Lezione XVI, § 2.

essa serve alla deduzione di risultati d'altro genere. Facendo per esempio,  $\phi = \xi$ , si ha

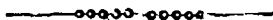
$$\nabla_1 \xi = 0, \quad \frac{d\xi}{dn} = \alpha, \quad \frac{d^2 \xi}{dn^2} = 0,$$

epperò

$$\Delta_1 \xi = -\alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

formola di cui si è già fatto uso precedentemente.

Se invece delle coordinate curvilinee *speciali*  $u, v, w$  si fossero considerate delle coordinate curvilinee generali, in modo che la linea  $s$  d'intersezione delle superficie  $(u), (v)$  riuscisse *obliqua* e non già normale alle superficie  $(w)$ , si sarebbe ottenuta una formola analoga alla (9), per la determinazione della discontinuità d'una derivata seconda presa in direzione qualunque. Non credo necessario di sviluppare questo calcolo, e mi limito solamente ad osservare che anche per questa via si può pervenire alla determinazione della discontinuità delle derivate d'ordine superiore, e che forse riesce in tal modo più agevole riconoscere le condizioni strettamente necessarie per la validità delle formole che s'incontrano.



SULLA POLARIZZAZIONE ELETTRICA PRODOTTA DA DEPOSITI METALLICI;  
RICERCHE DEL PROF. D. MACALUSO (1).

*Conclusioni.*

I fatti principali trovati nelle precedenti esperienze possono ridursi ai seguenti:

1. La polarizzazione del Cu, impiegato come elettrodo negativo in una soluzione di  $\text{ZnSO}_4$ , non è nulla, come cre-

(1) *Continuazione e fine*, vedi pag. 35.