

Über die Bestimmung des Apex.

Von Paul Harzer.

In Nr. 3173 des Bandes 133 dieser Zeitschrift habe ich »an Bekanntes erinnernd« zu der von Herrn Kobold getroffenen Formulierung des Apexproblems eine kurze Notiz¹⁾ gegeben, die den Mangel hat, nichts über die Ermittlung der Fehler der unbekannten Größen zu enthalten. Da die dort vorgeschlagene Methode inzwischen benutzt und auch von anderen Astronomen²⁾ behandelt worden ist, soll hier die Lücke ausgefüllt werden. Der Untersuchung der Fehler sende ich zur Vervollständigung eine kurze Darlegung der einzelnen Fälle des Problems voraus und sehe dabei von der Benutzung des in meiner Notiz angegebenen Richelot'schen Kriteriums für das Maximum oder Minimum³⁾ ab, weil es für den Fall nicht einfacher Wurzeln der Gleichung $D = 0$ versagt, und verweise wegen der Begründung der hier mitzuteilenden Verhältnisse auf die vorhandene Literatur⁴⁾.

I. Wir wollen unter α, β, γ irgend welche der drei Zahlen 1, 2, 3 verstehen und die Summen nach α, β über alle Werte 1, 2, 3 erstrecken. Soll dann die quadratische Form

$$V = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}$$

mit den reellen Koeffizienten $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ für einen auf der Oberfläche der Kugel vom Radius 1 liegenden Punkt x , dessen rechtwinklige Koordinaten x_{α} folglich der Gleichung

$$\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 = 1$$

genügen, ein Extremum werden, so sind die Gleichungen

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} x_{\alpha} = \kappa x_{\beta}$$

zu erfüllen und κ muß folglich eine Wurzel der Gleichung $D = 0$ sein, wobei D die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \kappa & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \kappa & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \kappa \end{vmatrix}$$

bedeutet. Hält man eine der stets reellen Wurzeln dieser Gleichung fest und setzt man für sie

$$\frac{\partial D}{\partial a_{\alpha\beta}} = \alpha_{\alpha\beta}$$

wobei die Ableitungen ohne Rücksicht auf die Gleichung $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ gebildet werden müssen, so besteht, falls die Wurzel einfach ist, die Beziehung

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_{1\alpha} : \alpha_{2\alpha} : \alpha_{3\alpha}.$$

Da ferner

$$\alpha_{\alpha\beta} = \alpha_{\beta\alpha}$$

ist, so wird auch

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33}$$

und mit diesen Werten ergibt sich

$$V = \kappa.$$

Sind $\kappa = \kappa_{\alpha}$ die drei Wurzeln und sind sie voneinander verschieden, so sei für $\kappa = \kappa_{\alpha}$: $V = V_{\alpha} = \kappa_{\alpha}$, $x_{\beta} = g_{\alpha\beta}$. Dann sind die drei Größen $g_{\alpha\beta}$ für einen festen Wert von α die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes g_{α} auf der Kugeloberfläche, und die drei Punkte g_{α} liegen in den Ecken eines Kugeloktanten⁵⁾, und die Größen $g_{\alpha\beta}$ bilden deshalb die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution

$$x_{\beta} = \sum_{\alpha} g_{\alpha\beta} y_{\alpha}$$

die durch ihre Umkehrung

$$y_{\beta} = \sum_{\alpha} g_{\beta\alpha} x_{\alpha}$$

zeigt, daß y_{α} den Cosinus des sphärischen Abstandes des Punktes x vom Punkte g_{α} vorstellt.

Durch diese Substitution nimmt die quadratische Form die Gestalt

$$V = \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} y_{\alpha}^2$$

an. Da nun

$$\sum_{\alpha} y_{\alpha}^2 = 1$$

ist, so wird

$$V_{\beta} - V = \sum_{\alpha} (\kappa_{\beta} - \kappa_{\alpha}) y_{\alpha}^2.$$

Ist

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$$

so erkennt man, daß V für keinen Punkt der Kugeloberfläche

¹⁾ In dieser Notiz fehlt leider durch ein Versehen in den drei ersten Diagonalgliedern von V vor $-\mu$ das Glied $-\lambda$.

²⁾ H. Kobold, Untersuchung der Eigenbewegungen von 523 südlichen Sternen, Astr. Nachr. Nr. 3435-36, Bd. 144, 1897. — E. Anding, Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum. München 1901. — W. T. Carrigan, A method of determining the direction of the sun's motion in space, Astr. Journ. No. 565, Vol. 24, No. 13, 1904. Dieser Artikel enthält ein unrichtiges Kriterium für das Maximum oder Minimum und nimmt auf die vorhandene Literatur keine Rücksicht.

³⁾ F. J. Richelot, Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima, Astr. Nachr. Nr. 1146, Bd. 48, 1858.

⁴⁾ z. B. O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 19. Vorlesung, zweite Auflage, Leipzig 1869.

⁵⁾ A. Cauchy, Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes, Exercices de mathématiques, 4^e année, Paris 1829. — Herr Anding hat in seiner angeführten Schrift den Beweis für die Lage der drei Punkte g_1, g_2, g_3 wiederholt.

kleiner als V_1 oder größer als V_3 werden kann. Es tritt also ein Minimum $V_1 = x_1$ im Punkte g_1 , ein Maximum $V_3 = x_3$ im Punkte g_3 , im Punkte g_2 aber weder ein Maximum noch ein Minimum ein. Nun wird $V = a_{\alpha\alpha}$ für $x_\alpha = \pm 1$, während die anderen beiden der drei Größen x_α dementsprechend verschwinden. Ist also $a_{11} \leq a_{22} \leq a_{33}$, so ergibt sich $x_1 \leq a_{11}$, $x_3 \geq a_{33}$ ¹⁾.

Ist eine der Wurzeln x der Gleichung $D = 0$ doppelt, etwa $x_2 = x_3$, so bleibt der der einfachen Wurzel x_1 entsprechende Punkt g_1 bestimmt, die der doppelten Wurzel $x_2 = x_3$ entsprechenden Punkte g_2 und g_3 werden aber nur insofern bestimmt, als sie auf dem größten Kreise liegen müssen, dessen einer Pol g_1 ist. Wie aber immer die Punkte g_2, g_3 auf diesem größten Kreise liegen, wird stets

$$V_2 = V_3 = x_2 = x_3.$$

Allgemein ist ferner in diesem Falle

$$V = x_2 + (x_1 - x_2)y_1^2$$

und somit

$$V_1 - V = (x_1 - x_2)(1 - y_1^2)$$

$$V_2 - V = V_3 - V = -(x_1 - x_2)y_1^2.$$

Ist also

$$x_1 < x_2 = x_3$$

so ist V in keinem Punkte der Kugeloberfläche kleiner als $V_1 = x_1$ oder größer als $V_2 = x_2$. Es tritt also ein Minimum im Punkte g_1 , ein Maximum längs des zu g_1 als Pol gehörigen größten Kreises auf.

Ist aber

$$x_1 > x_2 = x_3$$

so sind die Werte Maximum und Minimum miteinander zu vertauschen. Auch hier bestehen, wenn $a_{11} \leq a_{22} \leq a_{33}$, $x_1 < x_2$ ist, die Ungleichheiten $x_1 \leq a_{11}$, $x_3 \geq a_{33}$.

Ist die Wurzel x der Gleichung $D = 0$ dreifach, so hat V für alle Punkte der Kugeloberfläche den Wert

$$V = x_1 = x_2 = x_3.$$

Die Frage des Maximums oder Minimums wird dann also gegenstandslos. Die dreifache Wurzel hat hier den Wert

$$x_1 = x_2 = x_3 = a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

II. Wir gehen nun zur Untersuchung der Fehler über. Den Fehler Δx eines numerisch ermittelten Wertes x rechnen wir in dem Sinne, daß $x + \Delta x$ den wahren Wert der zu ermittelnden Größe darstelle.

Wir nehmen dann an, daß die numerischen Werte der Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ mit kleinen Fehlern $\Delta a_{\alpha\beta}$ behaftet seien. Die ihnen entsprechenden kleinen Fehler Δx , Δx_α der vier Größen x , x_α werden dann, wenn Glieder zweiter Ordnung in den Fehlern neben den Gliedern erster Ordnung vernachlässigt werden dürfen, durch die Gleichungen

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\beta} \Delta x_{\alpha} - x_{\beta} \Delta x + X_{\beta} = 0$$

$$\sum_{\alpha} x_{\alpha} \Delta x_{\alpha} = 0$$

bestimmt, in denen zur Abkürzung

$$a_{\alpha\alpha} - x = b_{\alpha\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$\sum_{\alpha} x_{\alpha} \Delta a_{\alpha\beta} = X_{\beta}$$

gesetzt worden ist.

Die vier Gleichungen multiplizieren wir der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3, 0$; $0, x_3, -x_2, 0$; $-x_3, 0, x_1, 0$; $x_2, -x_1, 0, 0$; $0, 0, 0, 1$ und addieren jedesmal. Verstehen wir dann unter $\delta, \varepsilon, \zeta$ die drei Zahlen 1, 2, 3 in jeder der drei zyklischen Anordnungen 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; während α, β, γ fortfahren, eine beliebige der drei Zahlen 1, 2, 3 zu bezeichnen, und bedienen wir uns dann der abkürzenden Bezeichnungen

$$x_{\varepsilon} X_{\delta} - x_{\delta} X_{\varepsilon} = \Xi_{\zeta}$$

$$x_{\varepsilon} b_{\alpha\delta} - x_{\delta} b_{\alpha\varepsilon} = c_{\alpha\zeta}$$

so erhalten wir

$$\Delta x = \sum_{\alpha} x_{\alpha} X_{\alpha}$$

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha\beta} \Delta x_{\alpha} + \Xi_{\beta} = 0$$

$$\sum_{\alpha} x_{\alpha} \Delta x_{\alpha} = 0.$$

Wenn wir nun die vier letzten Gleichungen mit $c_{11}, c_{21}, c_{31}, x_1 \frac{\partial D}{\partial x}$; $c_{12}, c_{22}, c_{32}, x_2 \frac{\partial D}{\partial x}$; $c_{13}, c_{23}, c_{33}, x_3 \frac{\partial D}{\partial x}$ multiplizieren und jedesmal addieren, so kommen die Größen $b_{\alpha\beta}$ in den Koeffizienten der Δx_{α} nur in Verbindungen vor, die den Unterdeterminanten $a_{\alpha\beta}$ gleich sind. Für diese Größen bestehen aber die Gleichungen

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} x_{\alpha} = - \frac{\partial D}{\partial x} x_{\beta}$$

und mit Rücksicht auf sie findet man dann

$$\frac{\partial D}{\partial x} \Delta x_{\beta} = - \sum_{\alpha} c_{\alpha\beta} \Xi_{\alpha}.$$

Ist die Wurzel x , wie wir dies dem praktischen Falle entsprechend voraussetzen wollen, einfach, also $\frac{\partial D}{\partial x}$ von null verschieden, so erhält man durch die gewonnenen Formeln die Fehler Δx , Δx_{α} .

Es mag noch erwähnt werden, daß für gleiche sowohl wie ungleiche Werte β und γ die Beziehungen

$$\sum_{\alpha} c_{\beta\alpha} c_{\gamma\alpha} = \sum_{\alpha} b_{\beta\alpha} b_{\gamma\alpha}$$

bestehen, und daß folglich

$$\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2 \sum_{\alpha} \Delta x_{\alpha}^2 = \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha} b_{\alpha\beta} \Xi_{\alpha}\right)^2$$

ist.

III. Bei dem Apexprobleme ist der Punkt x der Apex, und die Koeffizienten setzen sich aus den Koordinaten der Pole der Eigenbewegungen von n Sternen zusammen. Wir verstehen unter σ, τ irgend welche der Zahlen 1, 2, \dots, n , bezeichnen mit $x_{\alpha\sigma}$ die drei rechtwinkligen Koordinaten des Poles x_{σ} und setzen

$$v_{\sigma} = \sum_{\alpha} x_{\alpha\sigma} x_{\alpha}.$$

Versteht man dann unter π_{σ} das Gewicht des Poles x_{σ} , also eine positive Zahl, so tritt an Stelle von V der Ausdruck

$$V = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} v_{\sigma}^2$$

¹⁾ Man vergleiche den angeführten Artikel des Herrn Carrigan.

in dem die Summe über σ hier und weiterhin von 1 bis n zu erstrecken ist. Die Größe v_σ bedeutet den Cosinus des sphärischen Abstandes des Poles x_σ vom Apex x .

Es seien a_σ, d_σ die Rektaszension und Deklination des durch den Index σ gekennzeichneten Sterns und ω_σ sei der Winkel, um den für einen Beobachter, der mit dem Kugelmittelpunkte zugekehrten Füßen im Orte des Sterns steht und in der Richtung von dessen Eigenbewegung blickt, der Nordpol nach links liegt. Legt man dann die positive x_1 -Achse nach dem Frühlingspunkt, die positive x_2 -Achse in den Äquator um $1/2\pi$ östlich vom Frühlingspunkt, die positive x_3 -Achse nach dem Nordpol, so wird

$$\begin{aligned} x_{1\sigma} + ix_{2\sigma} &= -(\sin \omega_\sigma \sin d_\sigma + i \cos \omega_\sigma) e^{ia_\sigma} \\ x_{3\sigma} &= \sin \omega_\sigma \cos d_\sigma \\ a_{\alpha\beta} &= \sum_\sigma \pi_\sigma x_{\alpha\sigma} x_{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

Es ist klar, daß hier die drei Werte $V_\alpha = x_\alpha$, weil V eine Summe von reellen Quadraten mit positiven Koeffizienten ist, nicht negativ werden können; ferner aber ist

$$\sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha} = \sum_\sigma \pi_\sigma.$$

Sind alle Gewichte der Einheit gleich, wie das vermutlich in der Regel angenommen werden wird, so ist

$$\sum_\alpha x_\alpha = n.$$

Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Formeln sollen nun lediglich zur Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler der Rektaszension a und der Deklination d des Apex benutzt werden. Die Fehler $\Delta a, \Delta d$ dieser Koordinaten findet man mit Rücksicht auf die Formeln

$$x_1 + ix_2 = \cos d \cdot e^{ia}, \quad x_3 = \sin d$$

durch die Gleichungen

$$\cos d \cdot \Delta a = \frac{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \Delta d = \frac{\Delta x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$X_\alpha = \sum_\sigma \pi_\sigma \sin \Delta \omega_\sigma ((x_{\alpha\sigma} w_\sigma + y_{\alpha\sigma} v_\sigma) \cos \Delta \omega_\sigma + (y_{\alpha\sigma} w_\sigma - x_{\alpha\sigma} v_\sigma) \sin \Delta \omega_\sigma).$$

Setzt man noch

$$x_\varepsilon x_{\delta\sigma} - x_\delta x_{\varepsilon\sigma} = \xi_{\zeta\sigma}, \quad x_\varepsilon y_{\delta\sigma} - x_\delta y_{\varepsilon\sigma} = \eta_{\zeta\sigma}$$

so wird

$$\Xi_\alpha = \sum_\sigma \pi_\sigma \sin \Delta \omega_\sigma ((\xi_{\alpha\sigma} w_\sigma + \eta_{\alpha\sigma} v_\sigma) \cos \Delta \omega_\sigma + (\eta_{\alpha\sigma} w_\sigma - \xi_{\alpha\sigma} v_\sigma) \sin \Delta \omega_\sigma).$$

Es möge erwähnt werden, daß der Punkt ξ_σ von den Punkten x und x_σ und ebenso der Punkt η_σ von den Punkten x und y_σ um $1/2\pi$ entfernt ist. Setzt man schließlich noch

$$\begin{aligned} w_\sigma \sum_\alpha b_{\alpha 3} \xi_{\alpha\sigma} + v_\sigma \sum_\alpha b_{\alpha 3} \eta_{\alpha\sigma} &= r_{1\sigma}, & w_\sigma \sum_\alpha b_{\alpha 3} \eta_{\alpha\sigma} - v_\sigma \sum_\alpha b_{\alpha 3} \xi_{\alpha\sigma} &= r_{2\sigma} \\ w_\sigma \sum_\alpha c_{\alpha 3} \xi_{\alpha\sigma} + v_\sigma \sum_\alpha c_{\alpha 3} \eta_{\alpha\sigma} &= s_{1\sigma}, & w_\sigma \sum_\alpha c_{\alpha 3} \eta_{\alpha\sigma} - v_\sigma \sum_\alpha c_{\alpha 3} \xi_{\alpha\sigma} &= s_{2\sigma} \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \cos d \cdot \Delta a &= - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \frac{\partial D}{\partial x}} \sum_\sigma \pi_\sigma \sin \Delta \omega_\sigma (r_{1\sigma} \cos \Delta \omega_\sigma + r_{2\sigma} \sin \Delta \omega_\sigma) \\ \Delta d &= - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \frac{\partial D}{\partial x}} \sum_\sigma \pi_\sigma \sin \Delta \omega_\sigma (s_{1\sigma} \cos \Delta \omega_\sigma + s_{2\sigma} \sin \Delta \omega_\sigma). \end{aligned}$$

in denen die Wurzel positiv zu nehmen ist. Durch die Substitution der Werte für die Größe Δx_α nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \cos d \cdot \Delta a &= - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \frac{\partial D}{\partial x}} \sum_\alpha b_{\alpha 3} \Xi_\alpha \\ \Delta d &= - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \frac{\partial D}{\partial x}} \sum_\alpha c_{\alpha 3} \Xi_\alpha. \end{aligned}$$

Die Fehler $\Delta a_{\alpha\beta}$ der Koeffizienten entstehen nun aus den Fehlern $\Delta \omega_\sigma$ der Winkel ω_σ . Als Fehler $\Delta \omega_\sigma$ sind dabei diejenigen Größen zu betrachten, um die der Wert von ω_σ vergrößert werden muß, damit sich mit den berechneten Werten der x_α statt des von null verschiedenen Wertes v_σ der verschwindende Wert $v_\sigma + \Delta v_\sigma$ ergebe. Diese Fehler $\Delta \omega_\sigma$ dürfen zu einem großen Teil durchaus nicht als kleine Größen betrachtet werden, wie dies sonst bei den Fehleraufgaben gewöhnlich geschehen kann. Dadurch gewinnt die hier auszuführende Untersuchung über die Fehler eine besondere Gestalt.

Setzt man

$$\begin{aligned} y_{1\sigma} + iy_{2\sigma} &= (-\cos \omega_\sigma \sin d_\sigma + i \sin \omega_\sigma) e^{ia_\sigma} \\ y_{3\sigma} &= \cos \omega_\sigma \cos d_\sigma \end{aligned}$$

so sind die Größen $y_{\alpha\sigma}$ offenbar die Koordinaten eines Punktes der Kugeloberfläche, der für den genannten Beobachter, der in der Richtung der Eigenbewegung des Sterns blickt, um $1/2\pi$ nach vorn entfernt ist. Mit Hilfe dieser Koordinaten wird

$$\Delta x_{\alpha\sigma} = 2 \sin \frac{\Delta \omega_\sigma}{2} \left(y_{\alpha\sigma} \cos \frac{\Delta \omega_\sigma}{2} - x_{\alpha\sigma} \sin \frac{\Delta \omega_\sigma}{2} \right)$$

und hiermit und mit der abkürzenden Bezeichnung

$$w_\sigma = \sum_\alpha y_{\alpha\sigma} x_\alpha$$

ergibt sich

Wir erwähnen noch, obwohl wir dieser Formel nicht bedürfen, daß

$$\Delta z = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \sin \Delta \omega_{\sigma} (2 w_{\sigma} v_{\sigma} \cos \Delta \omega_{\sigma} + (w_{\sigma}^2 - v_{\sigma}^2) \sin \Delta \omega_{\sigma})$$

ist.

IV. Vor der weiteren Entwicklung bedarf es der Untersuchung, ob die im Abschnitt II vorgenommene Vernachlässigung der Glieder von höherer Ordnung in den Fehlern $\Delta \log x$, Δx_{α} gegenüber den Gliedern erster Ordnung hier berechtigt ist, wo die Fehler $\Delta \omega_{\sigma}$ nicht als klein betrachtet werden dürfen. Es ist ersichtlich, daß die Fehler $\Delta \log x$, Δx_{α} in den Gliedern niedrigster Ordnung, deren Werte wir abgeleitet haben, die Form

$$\Delta z = \frac{1}{n} \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \sin \Delta \omega_{\sigma} (e_{1\sigma} \cos \Delta \omega_{\sigma} + e_{2\sigma} \sin \Delta \omega_{\sigma})$$

haben, in denen die Koeffizienten $e_{1\sigma}$, $e_{2\sigma}$ in n von der nullten Ordnung sind. Bei der vorgenommenen Entwicklung braucht demgemäß nach Division aller Gleichungen durch n nur vorausgesetzt zu werden, daß nicht die Größen $\Delta a_{\alpha\beta}$ selbst, sondern die Größen $\frac{1}{n} \Delta a_{\alpha\beta}$ genügend klein seien, und diese Größen sind von derselben Form und Größenordnung, wie die Größe Δz , deren mittlerer Wert nun bestimmt werden soll. Daß bei dieser Bestimmung von einer Entwicklung nach

Potenzen der Größe $\Delta \omega_{\sigma}$ abgesehen werden muß, braucht nicht erklärt zu werden.

Der numerische Wert des Fehlers $\Delta \omega_{\sigma}$ kann, indem man von Vielfachen von 2π absieht, nur im Bereiche von $-\pi$ über 0 bis $+\pi$ bestimmt werden. Theoretisch muß aber jeder Fehler von $\Delta \omega_{\sigma}$ im ganzen Bereiche von $-\infty$ über 0 bis $+\infty$ als möglich angesehen werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein spezieller numerischer Wert von $\Delta \omega_{\sigma}$ in dem unendlich kleinen Bereiche von x bis $x+dx$ liege, indem x selbst auf den Bereich von $-\pi$ über 0 bis $+\pi$ beschränkt bleibe, ergibt sich also als die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß $\Delta \omega_{\sigma}$ in den unendlich vielen Bereichen von $x + 2\gamma\pi$ bis $x + 2\gamma\pi + dx$, $-\infty < \gamma < +\infty$ liege*). Ist nun m der mittlere Wert des Fehlers $\Delta \omega_{\sigma}$, und nimmt man an, daß die Fehler $\Delta \omega_{\sigma}$ voneinander unabhängig seien — was freilich bei einem Teil der Fehler tatsächlich nicht der Fall ist — und daß sie dem Gaußschen Fehlergesetze genügen, so wird der mittlere Wert irgend einer Funktion $f(\Delta \omega_{\sigma})$ des Fehlers $\Delta \omega_{\sigma}$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sum_{\gamma} e^{-\frac{(x+2\gamma\pi)^2}{2m^2}} dx = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \sum_{\gamma} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-\frac{(x+2\gamma\pi)^2}{2m^2}} dx$$

bestimmt, der für eine mit dem Modul 2π periodische Funktion $f(x+2\pi) = f(x)$ die Gestalt

$$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \sum_{\gamma} \int_{-(2\gamma-1)\pi}^{(2\gamma+1)\pi} f(x) e^{-\frac{x^2}{2m^2}} dx = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2m^2}} dx$$

annimmt.

Setzt man nun

$$e^{-\frac{m^2}{2}} = \mu$$

so erhält man hiernach die mittleren Werte von $\sin^2 \Delta \omega_{\sigma}$, $\sin^2 \Delta \omega_{\sigma} \cdot \cos^2 \Delta \omega_{\sigma}$, $\sin^4 \Delta \omega_{\sigma}$ durch die Formeln

$$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 x e^{-\frac{x^2}{2m^2}} dx = \frac{1-\mu^4}{2}$$

$$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 x \cos^2 x e^{-\frac{x^2}{2m^2}} dx = \frac{1-\mu^{16}}{8}, \quad \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^4 x e^{-\frac{x^2}{2m^2}} dx = \frac{3-4\mu^4+\mu^{16}}{8}.$$

Da ferner die mittleren Werte von $\sin \Delta \omega_{\sigma} \cos \Delta \omega_{\sigma} \cdot \sin \Delta \omega_{\tau} \cos \Delta \omega_{\tau}$ und von $\sin \Delta \omega_{\sigma} \cos \Delta \omega_{\sigma} \cdot \sin^2 \Delta \omega_{\tau}$ ($\sigma \neq \tau$) verschwinden, so ergibt sich der mittlere Wert $m(z)$ von Δz aus der Formel

$$m(z)^2 = \frac{1}{8n^2} \left[(1-\mu^{16}) \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 e_{1\sigma}^2 + 2(1-\mu^4)^2 \left(\sum_{\sigma} \pi_{\sigma} e_{2\sigma} \right)^2 + (1-\mu^8)^2 \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 e_{2\sigma}^2 \right].$$

Die Koeffizienten $e_{1\sigma}$, $e_{2\sigma}$ sind gleich wahrscheinlich positiv und negativ, die Größen

$$\sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 e_{1\sigma}^2, \quad \left(\sum_{\sigma} \pi_{\sigma} e_{2\sigma} \right)^2, \quad \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 e_{2\sigma}^2$$

sind also von der Ordnung der Zahl n und somit ist $m(z)$,

auch ohne daß m als klein betrachtet würde, klein von der Ordnung der Größe $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Die erwähnte Vernachlässigung ist also in der Tat gestattet, wenn n eine genügend große Zahl ist.

*) Man vergleiche Herrn Andings angeführte Schrift.

Der mittlere Wert m der Größen $\Delta\omega_\sigma$ ist nun aus dem Werte κ abzuleiten, da

$$\kappa = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} v_{\sigma}^2 = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \Delta v_{\sigma}^2$$

ist. Setzen wir

$$2 \sin \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2} \left(w_{\sigma} \cos \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2} - v_{\sigma} \sin \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2} \right) = \varpi_{\sigma}$$

$$\sum_{\alpha} (x_{\alpha\sigma} + \Delta x_{\alpha\sigma}) \Delta x_{\alpha} = \Delta\varpi_{\sigma}$$

so ergibt sich

$$\Delta v_{\sigma} = \varpi_{\sigma} + \Delta\varpi_{\sigma}$$

$$\kappa = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \varpi_{\sigma}^2 + 2 \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \varpi_{\sigma} \Delta\varpi_{\sigma} + \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \Delta\varpi_{\sigma}^2.$$

Um den mittleren Wert dieses Ausdrucks zu bilden, sind die Größen ϖ_{σ} , $\Delta\varpi_{\sigma}$ als Funktionen der Fehler $\Delta\omega_{\sigma}$ darzustellen und dann die mittleren Werte nach den $\Delta\omega_{\sigma}$ zu bilden. Beachtet man dabei, daß die zweite Summe der rechten Seite der Formel für κ sich aus Gliedern von der Form $2 \pi_{\sigma} \varpi_{\sigma} (x_{1\sigma} + \Delta x_{1\sigma}) \Delta x_{\alpha}$, die dritte Summe sich aus Gliedern von der Form $\pi_{\sigma} (x_{\alpha\sigma} + \Delta x_{\alpha\sigma}) (x_{\beta\sigma} + \Delta x_{\beta\sigma}) \Delta x_{\alpha} \Delta x_{\beta}$ zusammensetzen, so ist ersichtlich, daß der mittlere Wert der zweiten Summe gegenüber dem der ersten klein ist wie $\frac{1}{\sqrt{n}}$ gegenüber der Einheit, während der der dritten Summe gegenüber der der ersten auf die Größenordnung $\frac{1}{n}$ gegenüber der Einheit hinabsinkt. Die Beschränkung von κ auf die erste Summe ist also mit gleichem Rechte gestattet, wie die Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung in den Fehlern $\Delta \log \kappa$, Δx_{α} gegenüber den Gliedern erster Ordnung.

Um nun den mittleren Wert von

$$\kappa = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \varpi_{\sigma}^2$$

$$\cos^2 d \cdot m(a)^2 = \frac{1}{8(x_1^2 + x_2^2) \left(\frac{\partial D}{\partial \kappa} \right)^2} \left[(1 - \mu^{16}) \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 r_{1\sigma}^2 + 2(1 - \mu^4)^2 \left(\sum_{\sigma} \pi_{\sigma} r_{2\sigma} \right)^2 + (1 - \mu^8)^2 \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 r_{2\sigma}^2 \right]$$

$$m(d)^2 = \frac{1}{8(x_1^2 + x_2^2) \left(\frac{\partial D}{\partial \kappa} \right)^2} \left[(1 - \mu^{16}) \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 s_{1\sigma}^2 + 2(1 - \mu^4)^2 \left(\sum_{\sigma} \pi_{\sigma} s_{2\sigma} \right)^2 + (1 - \mu^8)^2 \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}^2 s_{2\sigma}^2 \right].$$

Die wahrscheinlichen Fehler $\varepsilon(a)$ und $\varepsilon(d)$ erhält man aus den mittleren Fehlern durch Multiplikation mit 0.67449.

V. Es wird nun nicht nötig sein, die wahrscheinlichen Fehler für jeden speziellen Fall des Apexproblems besonders zu berechnen, sondern ausreichen, Näherungswerte zu ermitteln, die man aus plausiblen Annahmen über die Verteilung der Pole der Eigenbewegungen und der Sterne erhält. Wir wollen annehmen, daß die n Pole sich um einen größten Kreis, den parallaktischen Äquator zusammendrängen, mit wachsenden Abständen von diesem Kreise seltener werden und auf dem parallaktischen Äquator parallelen Zonen einigermaßen gleichmäßig verteilt seien. Ferner wollen wir annehmen, daß die am Pole der Eigenbewegung gemessenen Winkel

$$x_{1\sigma} = \cos f_{\sigma} \cos u_{\sigma}, \quad x_{2\sigma} + i x_{3\sigma} = (\cos f_{\sigma} \sin u_{\sigma} + i \sin f_{\sigma}) e^{i\varphi}.$$

zu bilden, dienen die folgenden Formeln für die mittleren

Werte von $\sin^2 \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2} \cos^2 \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2}$ und $\sin^4 \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2}$

$$\frac{1}{m \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{2m^2}} dx = \frac{1 - \mu^4}{8}$$

$$\frac{1}{m \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^4 \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{2m^2}} dx = \frac{3 - 4\mu + \mu^4}{8}$$

und die Bemerkung, daß der mittlere Wert von

$$\sin^3 \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2} \cos \frac{\Delta\omega_{\sigma}}{2}$$

verschwindet. Zur Bestimmung von μ und damit von m hat man also die algebraische Gleichung vierten Grades

$$\left(\sum_{\sigma} \pi_{\sigma} w_{\sigma}^2 - \kappa \right) \mu^4 + 4\kappa \mu - \left(\sum_{\sigma} \pi_{\sigma} w_{\sigma}^2 + \kappa \right) = 0.$$

Die Anwendung des Sturmschen Satzes zeigt, daß diese Gleichung stets nur zwei reelle Wurzeln μ hat, und daß eine davon stets positiv ist, die zweite aber das Vorzeichen des Ausdrucks

$$k = \kappa - \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} w_{\sigma}^2 = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} (v_{\sigma}^2 - w_{\sigma}^2)$$

besitzt. Da die Natur der Aufgabe einen positiven Wert erfordert, ist die Lösung der Gleichung stets möglich, aber eindeutig oder zweideutig, je nachdem k negativ oder positiv ist.

Da die Größen v_{σ} Fehler darstellen, die eigentlich verschwinden sollten, so ist es von vornherein als wahrscheinlich zu betrachten, daß die Lösung eindeutig sei.

Ist μ ermittelt worden, so erhält man die mittleren Fehler $m(a)$ und $m(d)$ von a und d aus den Formeln

zwischen den Richtungen nach dem Apex und dem zum Pole gehörigen Stern gleich wahrscheinlich jeden Wert haben können und daß allen Gewichten π_{σ} der Wert 1 zukomme.

Der parallaktische Äquator habe seinen aufsteigenden Knoten in der positiven x_1 -Achse und sei um den Winkel φ gegen die $x_1 x_2$ -Ebene geneigt. Von dem Pol σ_{σ} der Eigenbewegung fällen wir ein sphärisches Lot auf den parallaktischen Äquator; die Länge des Lotes sei f_{σ} und sie werde positiv gerechnet, wenn der Pol nördlich vom parallaktischen Äquator liegt, und die Entfernung des Fußpunktes des Lotes vom aufsteigenden Knoten des parallaktischen Äquators sei, im Sinne der Rektaszension gerechnet, gleich u_{σ} . Dann ist

Wir werden nun jeden Wert von u_σ als gleich wahrscheinlich betrachten und ersetzen also $\cos^2 u_\sigma$ und $\sin^2 u_\sigma$ durch den mittleren Wert $1/2$, $\cos u_\sigma$, $\sin u_\sigma$ und $\cos u_\sigma \sin u_\sigma$ durch den mittleren Wert 0. Bedienen wir uns dann der abkürzenden Bezeichnung

$$a_{11} = 1/2 n (1 - \varrho_1)$$

$$a_{21} = 0$$

$$a_{22} = n (\varrho_1 \sin^2 \varphi + 1/2 (1 - \varrho_1) \cos^2 \varphi)$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = 1/2 n (1 - 3 \varrho_1) \cos \varphi \sin \varphi$$

$$a_{33} = n (\varrho_1 \cos^2 \varphi + 1/2 (1 - \varrho_1) \sin^2 \varphi)$$

$$V = 1/2 n (1 - \varrho_1) (x_1^2 + (x_2 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi)^2) + n \varrho_1 (x_2 \sin \varphi - x_1 \cos \varphi)^2$$

$$D = (1/2 n (1 - \varrho_1) - \kappa)^2 (n \varrho_1 - \kappa).$$

Es ist ersichtlich, daß diese Werte streng richtig sind, wenn zu jedem Werte von f_σ mindestens drei voneinander äquidistante Pole gehören.

Es bestehen also, wenn $\varrho_1 \neq 1/3$ ist, die einfache Wurzel $\kappa_1 = n \varrho_1$ und die doppelte Wurzel $\kappa_2 = 1/2 n (1 - \varrho_1)$, und es findet also, je nachdem der Wert der Differenz der Wurzeln $b = \kappa_2 - \kappa_1 = 1/2 n (1 - 3 \varrho_1)$ positiv oder negativ ist, im Punkte g_1 , dessen Koordinaten

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\sin \varphi, \quad x_3 = \cos \varphi$$

sind, und der also den nördlichen Pol des parallaktischen Äquators darstellt, ein Minimum oder Maximum statt; gleichzeitig tritt dann für jeden Punkt des parallaktischen Äquators selbst ein Maximum oder Minimum ein. Für $\varrho_1 = 1/3$ ergibt sich die dreifache Wurzel $\kappa = 1/3 n$, für die die Aufgabe bedeutungslos wird.

Herr Kobold *) teilt nun für 1427 Sterne die Zahl der Pole der Eigenbewegung mit, die in 10° breiten, dem

$$b_{11} = b$$

$$b_{21} = 0$$

$$b_{31} = 0$$

$$b_{22} = b \cos^2 \varphi$$

$$b_{32} = b \cos \varphi \sin \varphi$$

$$b_{33} = b \sin^2 \varphi$$

$$c_{11} = 0$$

$$c_{21} = b \cos \varphi$$

$$c_{31} = b \sin \varphi$$

$$c_{12} = -b \cos \varphi$$

$$c_{22} = 0$$

$$c_{32} = 0$$

$$c_{13} = -b \sin \varphi$$

$$c_{23} = 0$$

$$c_{33} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \kappa} = -b^2$$

$$\xi_{1\sigma} = \cos f_\sigma \sin u_\sigma, \quad \xi_{2\sigma} + i \xi_{3\sigma} = -\cos f_\sigma \cos u_\sigma e^{i\varphi}.$$

Nun liege für den Beobachter, der in dem Pol x_σ der Eigenbewegung mit dem Kugelmittelpunkt zugekehrten Füßen steht und in der Richtung des zu dem Pol gehörigen Sterns blickt, der Apex x , also der Punkt g_1 um den Winkel ν_σ nach links. Dann wird

$$y_{1\sigma} = \cos \nu_\sigma \sin u_\sigma - \sin \nu_\sigma \cos u_\sigma \sin f_\sigma, \quad y_{2\sigma} + i y_{3\sigma} = (-\cos \nu_\sigma \cos u_\sigma - \sin \nu_\sigma \sin u_\sigma \sin f_\sigma + i \sin \nu_\sigma \cos f_\sigma) e^{i\varphi}$$

$$\eta_{1\sigma} = -\cos \nu_\sigma \cos u_\sigma - \sin \nu_\sigma \sin u_\sigma \sin f_\sigma, \quad \eta_{2\sigma} + i \eta_{3\sigma} = -(\cos \nu_\sigma \sin u_\sigma - \sin \nu_\sigma \cos u_\sigma \sin f_\sigma) e^{i\varphi}$$

$$w_\sigma = \cos f_\sigma \sin \nu_\sigma, \quad v_\sigma = \sin f_\sigma$$

$$r_{1\sigma} + i s_{1\sigma} = b \sin \varphi (-(1 - 2 \sin^2 f_\sigma) \sin \nu_\sigma + i \sin f_\sigma \cos \nu_\sigma) e^{i u_\sigma}$$

$$r_{2\sigma} + i s_{2\sigma} = b \sin \varphi (\sin f_\sigma \cos f_\sigma (1 + \sin^2 \nu_\sigma) + i \cos f_\sigma \sin \nu_\sigma \cos \nu_\sigma) e^{i u_\sigma}.$$

Indem wir nun die mittleren Werte sowohl nach u_σ , wie nach ν_σ nehmen und dementsprechend $\cos^2 \nu_\sigma$ und $\sin^2 \nu_\sigma$ durch den Wert $1/2$, $\cos^2 \nu_\sigma \sin^2 \nu_\sigma$ durch den Wert $1/8$, $\sin^4 \nu_\sigma$ durch den Wert $3/8$, $\cos \nu_\sigma$, $\sin \nu_\sigma$, $\cos \nu_\sigma \sin \nu_\sigma$, $\cos \nu_\sigma \sin^3 \nu_\sigma$ durch den Wert 0 ersetzen, finden wir

$$\sum_\sigma \sin^2 \alpha f_\sigma = n \varrho_\alpha$$

die für spätere Bedürfnisse sogleich auch für andere Werte von α , als den zunächst allein erforderlichen Wert $\alpha = 1$ eingeführt wird, so ist

parallaktischen Äquator parallelen Zonen liegen. Nimmt man an, daß alle Pole sich in der Mittellinie der betreffenden Zonen befänden, so erhält man daraus die Werte

$$\varrho_1 = 0.1814, \quad \varrho_2 = 0.0876.$$

Der Wert von ϱ_1 zeigt, daß für die einfache Wurzel, also für den Pol des parallaktischen Äquators, ein Minimum stattfindet.

Herr Kobold hat die Freundlichkeit gehabt, mir für 1579 Sterne die nicht veröffentlichten abgerundeten Werte der Wurzeln

$$\kappa_1 = 291, \quad \kappa_2 = 553, \quad \kappa_3 = 735$$

mitzuteilen, die in der Differenz der Werte κ_2, κ_3 eine merkbare Abweichung von der gleichmäßigen Verteilung der Pole längs der Zonen erweisen und Herrn Kobolds Resultat bestätigen, daß die Fehler nicht alle zufällig sind.

Wir wollen demnach die Fehlerbestimmung auf Grund unserer Annahme für die einfache Wurzel durchführen. Es wird hier

*) H. Kobold, Untersuchung der Eigenbewegungen des Auwers-Bradley-Catalogs nach der Bessel'schen Methode, Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 64, Nr. 5, S. 254, Halle 1895.

$$\sum_{\sigma} w_{\sigma}^2 = \frac{n}{2} (1 - \varrho_1)$$

$$\sum_{\sigma} r_{1\sigma}^2 = \sum_{\sigma} s_{1\sigma}^2 = \frac{n}{4} b^2 \sin^2 \varphi (1 - 3\varrho_1 + 4\varrho_2)$$

$$\sum_{\sigma} r_{2\sigma}^2 = \sum_{\sigma} s_{2\sigma}^2 = \left(\sum_{\sigma} r_{2\sigma} \right)^2 = \left(\sum_{\sigma} s_{2\sigma} \right)^2 = \frac{n}{16} b^2 \sin^2 \varphi (1 + 18\varrho_1 - 19\varrho_2)$$

$$(1 - 3\varrho_1) \mu^4 + 8\varrho_1 \mu - (1 + \varrho_1) = 0$$

$$\cos^2 d \cdot m(a)^2 = m(d)^2 = \frac{4(1 - \mu^{16})(1 - 3\varrho_1 + 4\varrho_2) + (3 - 4\mu^4 + \mu^{16})(1 + 18\varrho_1 - 19\varrho_2)}{32n(1 - 3\varrho_1)^2}$$

Setzt man die oben angegebenen Werte von ϱ_1 und ϱ_2 ein, so findet man die einzige positive Wurzel

$$\mu = 0.7266.$$

Diesem Werte entspricht

$$m = 0.7992 = 45^{\circ}79'.$$

Der wahrscheinliche Fehler eines einzelnen Wertes $\Delta\omega_{\sigma}$ ist also $30^{\circ}89'$. Schließlich wird

$$\cos d \cdot m(a) = m(d) = \frac{63^{\circ}34'}{\sqrt{n}}$$

$$\cos d \cdot \varepsilon(a) = \varepsilon(d) = \frac{42^{\circ}77'}{\sqrt{n}}$$

Sternwarte Kiel, 1904 November.

Für den von Herrn Kobold behandelten Fall $n = 1427$ ergibt sich also

$$\cos d \cdot \varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1^{\circ}13'.$$

Daß eine Entwicklung nach Potenzen von m^2 , praktisch betrachtet, nicht möglich ist, erkennt man daraus, daß

$$\mu^{16} = e^{-8m^2} = e^{-5.110}$$

wird.

Die Bedeutung der erlangten Werte der wahrscheinlichen Fehler wird durch die Tatsache, daß nicht alle Fehler $\Delta\omega_{\sigma}$ als zufällige betrachtet werden dürfen, gewiß nicht so weit abgeschwächt, daß sie nicht wenigstens als Grenzwerte angesehen werden dürften, die mäßig unterhalb der wirklich begangenen Fehler liegen.

Paul Harzer.

Nachschrift vom 23. Februar 1905. Herrn Bohlins Artikel in der soeben erschienenen Nr. 3997 dieser Zeitschrift veranlaßt mich, daran zu erinnern, daß Herr Kobold die Bedingung, daß $\sum_{\sigma} v_{\sigma}^2$ ein Minimum werde, für die Bestimmung auch des Radianen eines Sternschnuppenschwärmes benutzt hat (vergl. Astr. Nachr. 3608, Bd. 151, 1900, S. 120). Herrn Bohlins Lösung entspricht dem eindeutigen Problem,

den Ausdruck $\sum_{\sigma} \pi_{\sigma} v_{\sigma}^2 = \frac{1}{x_3^2} \sum_{\sigma} \frac{v_{\sigma}^2}{1 - x_{3\sigma}^2}$ zu einem Minimum zu machen. Das Gewicht π_{σ} wird hiernach von der Lage der Koordinatenachsen abhängig; Herr Bohlin schwächt aber diese qualitativ unzulässige Abhängigkeit dadurch quan-

titativ so viel als möglich ab, daß er die x_3 -Achse in die Nähe des an die Stelle des Apex tretenden Radianen verlegt. Bei dem Sternschnuppenproblem sind nämlich die Werte aller Größen v_{σ} unbedeutend, und durch die genannte Wahl der Lage der x_3 -Achse wird nahezu $x_3 = 1$, $x_{3\sigma} = v_{\sigma}$ und somit unterscheiden sich die Werte der Gewichte π_{σ} nur wenig von der Einheit. Das Problem, das für $\pi_{\sigma} = 1$ dreideutig ist, verwandelt sich durch die Einführung des Näherungspunktes für den Radianen in ein eindeutiges. Bei dem Apexproblem wird das Bohlinsche Verfahren durch den Umstand unzweckmäßig, daß die Größen v_{σ} hier zu einem großen Teil beträchtliche Werte besitzen.

P. H.

Pianeta 1905 PS

osservato all'equatoriale Dembowski (187 mm) in Padova.

1905	T.m. Padova	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Cf.	Oss.	α app.	$\log p \cdot \Delta$	δ app.	$\log p \cdot \delta$	Red. ad l. app.	*
Gen. 13	11 ^h 27 ^m 38 ^s	-0 ^m 46 ^s 81	+ 0' 44" 1	10.5	A	8 ^h 28 ^m 12 ^s 11	9.238 _n	+18° 43' 55".4	0.610	+1 ^s 05 - 11".5	1
14	10 51 54	-1 48.98	+ 2 30.8	8.4	A	8 27 9.96	9.339 _n	+18 45 42.1	0.620	+1.07 - 11.5	1
16	10 50 42	+0 19.05	+ 2 45.0	10.5	A	8 26 0.71	9.310 _n	+18 49 19.3	0.616	+1.11 - 11.6	2
23	11 29 5	-3 29.76	- 6 36.8	10.5	A	8 17 16.41	8.855 _n	+19 2 13.0	0.591	+1.20 - 11.8	3
27	7 27 30	+2 34.15	+ 9 57.6	10.5	A	8 13 5.87	9.597 _n	+19 8 51.3	0.701	+1.24 - 11.8	4
28	10 18 34	+1 22.06	+11 48.6	10.5	GA	8 11 53.78	9.191 _n	+19 10 42.3	0.600	+1.24 - 11.8	4
31	10 23 23	-0 24.42	- 7 40.0	10.5	A	8 8 45.51	9.078 _n	+19 15 23.7	0.593	+1.26 - 11.8	5