

Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind.

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

Im Folgenden soll die Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen behandelt werden, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Zunächst sollen die Haupteigenschaften und die Parameterdarstellung derselben gegeben werden, dann die Fälle $n = 3$ und $n = 5$ näher durchgeführt werden. Es ergeben sich hierbei eine Reihe neuer Beziehungen zwischen den eingeführten Thetafunctionen, deren Argumente Null sind. Hieran soll sich die Entwicklung einer Reihe allgemeinerer Relationen schliessen und diese dazu gebraucht werden, um die Fourier'schen Reihen für die Potenzen und Producte der gewöhnlichen Thetafunctionen in einfacher Weise darzustellen. Soweit dem Verfasser bekannt, sind diese Untersuchungen neu. Endlich sollen dann die Prym-Krazer'schen Thetarelationen auf eine directe und einfache Art entwickelt werden.

§ 1.

Einführung der allgemeinen Thetafunctionen. Eigenschaften und Parameterdarstellung derselben.

Wir definiren:

$$(1) \quad \vartheta_{\alpha} \left[\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] (v_1, v_2) = \vartheta_{\alpha} \left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (v_1, v_2) = \vartheta_{\alpha} \left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] ((v)) =$$

$$e^{\sum_{i=1}^2 \frac{\pi i g_i}{n} \left(2v_i + 2 \frac{h_i}{n} + \frac{g_1}{n} \tau_{1i} + \frac{g_2}{n} \tau_{2i} \right)} \vartheta_{\alpha} \left(v_1 + \frac{g_1 \tau_{11} + g_2 \tau_{12} + h_1}{n}, v_2 + \frac{g_1 \tau_{12} + g_2 \tau_{22} + h_2}{n} \right),$$

wobei α den Index einer beliebigen gewöhnlichen Thetafunction bedeutet. Dann lauten für den Index 5 die Fundamentalgleichungen (2):

$$\vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1 + 1, v_2) = e^{\frac{2g_1 \pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1, v_2),$$

$$\vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1, v_2 + 1) = e^{\frac{2g_2 \pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1, v_2),$$

$$\vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{\frac{-2h_1 \pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1, v_2) e^{-\pi i (2v_1 + \tau_{11})},$$

$$\vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{\frac{-2h_2 \pi i}{n}} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (v_1, v_2) e^{-\pi i (2v_2 + \tau_{22})},$$

$$\begin{aligned} \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] \left(v_1 + \frac{g'_1 \tau_{11} + g'_2 \tau_{12} + h'_1}{n}, v_2 + \frac{g'_1 \tau_{12} + g'_2 \tau_{22} + h'_2}{n} \right) \\ = e^{\frac{-\pi i}{n} \sum_1^2 g'_i (2v_i + 2h_i + 2h'_i + g'_1 \tau_{1i} + g'_2 \tau_{2i})} \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} \right] (v_1, v_2). \end{aligned}$$

Hierzu kommen dieselben Differentialgleichungen, wie bei den gewöhnlichen Thetafunctionen. Bei der Vermehrung um halbe Perioden gehen die Functionen mit dem Index 5 in die Functionen mit anderen Indices über. Der Uebergang ist der analoge, wie bei den gewöhnlichen Thetafunctionen, nur treten noch $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzeln als Factoren hinzu und zwar bei der Vermehrung von v_1, v_2 um resp.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}, 0; 0, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}; \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}; \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{12} + \tau_{22}}{2}; \\ \frac{\tau_{11}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}; \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{\tau_{12}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}; \\ \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2} + \frac{\tau_{12}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{\tau_{22}}{2}; \frac{\tau_{12}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\tau_{22}}{2} - \frac{1}{2}; \\ \frac{\tau_{11}}{2} + \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{\tau_{22}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{\tau_{11}}{2} + \frac{\tau_{12}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{\tau_{22}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

der Factor

$$e^{-\frac{\pi i \omega}{n}},$$

wobei ω resp. gleich ist:

$$\begin{aligned} g_1; g_2; g_1 + g_2; h_1; h_2; h_1 + h_2; g_1 + h_1; g_2 + h_1; g_1 + g_2 + h_1; \\ g_1 + h_2; g_2 + h_2; g_1 + h_1 + h_2; g_1 + g_2 + h_2; g_2 + h_1 + h_2; \\ g_1 + g_2 + h_1 + h_2. \end{aligned}$$

Die noch fehlenden Beziehungen sind aus den aufgestellten leicht abzuleiten. Es sind hiermit diejenigen Thetafunctionen eingeführt, deren Charakteristiken sich aus $2n^{\text{el}}$ ganzer Zahlen zusammensetzen. n soll von vornherein als ungerade Zahl angenommen werden.

Aus den soeben definirten Thetafunctionen lassen sich dann auf unendlich mannigfache Arten Thetafunctionen n^{ter} Ordnung bilden. Derartige Functionen sind z. B. die n^{ten} Potenzen einer jeden Function, die Producte zu je n :

$$\prod \vartheta_a \left[\frac{g}{h} \right] ((v)),$$

bei denen

$$\sum g_1 \equiv \sum g_2 \equiv \sum h_1 \equiv \sum h_2 \equiv 0 \text{ mod. } n$$

ist u. s. f.

Solche Thetafunctionen n^{ter} Ordnung können aber nach bekannten Regeln durch die gewöhnlichen Thetafunctionen ausgedrückt werden. Greifen wir z. B. die gerade Function heraus:

$$\begin{aligned} \vartheta_5 \left(v_1 + \frac{1}{n}, v_2 + \frac{1}{n} \right)^n + \vartheta_5 \left(v_1 + \frac{n-1}{n}, v_2 + \frac{n-1}{n} \right)^n \\ = \vartheta_5 \left(\left(v + \frac{1}{n} \right) \right)^n + \vartheta_5 \left(\left(v + \frac{n-1}{n} \right) \right)^n = f(v_1, v_2), \end{aligned}$$

so genügt dieselbe der Gleichung:

$$(3) \quad f(v_1, v_2) = \sum x_s \cdot \vartheta_5((v))^{\varepsilon_1} \cdot \vartheta_1((v))^{\varepsilon_2} \cdot \vartheta_{02}((v))^{\varepsilon_3} \cdot \vartheta_{34}((v))^{\varepsilon_4},$$

wobei:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = n \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \equiv \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \equiv 0 \text{ mod. } 2 \quad \varepsilon_4 < 4 \text{ ist.}$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich aus dieser Gleichung 15 weitere, die die Form haben:

$$\begin{aligned} \vartheta_a \left(\left(v + \frac{1}{n} \right) \right)^n + \vartheta_a \left(\left(v + \frac{n-1}{n} \right) \right)^n \\ = \sum x_s \cdot i^{\eta_s} \cdot \vartheta_{\eta_1}((v))^{\varepsilon_1} \cdot \vartheta_{\eta_2}((v))^{\varepsilon_2} \cdot \vartheta_{\eta_3}((v))^{\varepsilon_3} \cdot \vartheta_{\eta_4}((v))^{\varepsilon_4}. \end{aligned}$$

Wir dividiren diese Gleichungen durch $\vartheta_5((v))^n$ und setzen an Stelle der linken Seiten resp.:

$$\frac{\vartheta_a \left(\left(v + \frac{1}{n} \right) \right)^n}{\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{1}{n} \right) \right)^n} \cdot \frac{\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{1}{n} \right) \right)^n}{\vartheta_5((v))^n} + \frac{\vartheta_a \left(\left(v + \frac{n-1}{n} \right) \right)^n}{\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{n-1}{n} \right) \right)^n} \cdot \frac{\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{n-1}{n} \right) \right)^n}{\vartheta_5((v))^n}.$$

Führen wir dann die Argumente der hyperelliptischen Functionen ein, genau so wie es in einer Arbeit des Verfassers im 3^{ten} Bande der Acta mathematica geschehen ist, indem wir setzen:

$$u_1 = K_{11} \cdot v_1 + K_{12} \cdot v_2,$$

$$u_2 = K_{31} \cdot v_1 + K_{32} \cdot v_2,$$

so nehmen die Gleichungen bei bekannter Bezeichnungsweise die Form an:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & al_\alpha \left(u_1 + \frac{K_{11} + K_{12}}{n}, u_2 + \frac{K_{21} + K_{22}}{n} \right)^n \cdot al_\alpha \frac{\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{1}{n} \right) \right)^n}{\vartheta_5((v))^n} \\
 & + al_\alpha \left(u_1 + (n-1) \frac{K_{11} + K_{12}}{n}, u_2 + (n-1) \frac{K_{21} + K_{22}}{n} \right)^n \cdot \frac{\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{n-1}{n} \right) \right)^n}{\vartheta_5((v))^n} \\
 & = \sum x_i i^{\eta_i} \cdot al_{\eta_1}((u))^{\epsilon_1} \cdot al_{\eta_2}((u))^{\epsilon_2} \cdot al_{\eta_3}((u))^{\epsilon_3} \cdot al_{\eta_4}((u))^{\epsilon_4}.
 \end{aligned}$$

In diesen 16 Gleichungen sind die Grössen x_i , deren Zahl $\frac{n^2+1}{2}$ beträgt, Constanten, die durch Reihenentwickelungen der hyperelliptischen Functionen auf der rechten und linken Seite auf unendlich mannigfaltige Weise bestimmt werden können. Sie setzen sich rational aus den Thetafunctionen zusammen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen und deren Argumente Null sind. Zwischen diesen Grössen selbst ergeben sich unendlich viele Beziehungen. Mit Rücksicht auf die Parameterdarstellung der gewöhnlichen Thetafunctionen ergibt sich hieraus die Parameterdarstellung der von uns eingeführten Thetafunctionen. Wir erhalten dabei das Resultat, dass der Quotient je zweier unserer Functionen sich mit Hülfe einer n^{ten} und Quadratwurzeln aus zwei von einander unabhängigen Grössen darstellen lassen muss.

§ 2.

Der Fall $n = 3$.

Wir nehmen jetzt den speciellen Fall $n = 3$.

Für denselben wird:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \vartheta_5 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 + \vartheta_5 \left(\left(v + \frac{2}{3} \right) \right)^3 = x_1 \cdot \vartheta_5((v))^3 + x_2 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_1((v))^2 \\
 & + x_3 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_{02}((v))^2 + x_4 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_{34}((v))^2 \\
 & + x_5 \cdot \vartheta_1((v)) \cdot \vartheta_{02}((v)) \cdot \vartheta_{34}((v)).
 \end{aligned}$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich für die Nullwerthe der Argumente folgende Gleichungen (2)

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_5^3 + x_4 \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}^2, & 2 \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_{34}^3 + x_4 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5^2, \\
 -2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_{03}^3 + x_3 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}^2, & 2 \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_{23}^3 - x_3 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}^2, \\
 -2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_4^3 - x_2 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}^2, & 2 \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_{14}^3 + x_2 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_4^2, \\
 2 \cdot \vartheta_0 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_0^3 + x_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01}^2 + x_3 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_2^2 + x_4 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12}^2 \\
 & + x_5 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{12},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2 \cdot \vartheta_{01} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_{01}^3 - x_2 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_0^2 - x_3 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}^2 + x_4 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2^2 \\
 &\quad - x_5 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{12}, \\
 -2 \cdot \vartheta_2 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_2^3 - x_2 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{12}^2 - x_3 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0^2 + x_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01}^2 \\
 &\quad - x_5 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12}, \\
 2 \cdot \vartheta_{12} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_1 \cdot \vartheta_{12}^3 + x_2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_2^2 + x_3 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01}^2 + x_4 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0^2 \\
 &\quad + x_5 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0.
 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Constanten:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{34} - 2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_5}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, \\
 x_2 &= \frac{2 \cdot \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_4^3 + 2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14}^3}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot (\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)}, \\
 x_3 &= - \frac{2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{23}^3 + 2 \cdot \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{03}^3}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} (\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{03}^4)}, \\
 x_4 &= \frac{2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{34}^3 - 2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_5^3}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} (\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4)}.
 \end{aligned}$$

Die Constante x_5 ist aus einer der vier letzten Gleichungen des Systemes (2) bestimmt. Zu gleicher Zeit ergeben sich die Thetarelationen:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{aligned}
 &-\vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{03} + \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{23} + \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{34} = \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_5, \\
 &-\vartheta_{01} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{01} + \vartheta_{12} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{12} + \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14} = \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_5, \\
 &-\vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_4 + \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14} + \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{34} = \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_5, \\
 &\vartheta_0 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_0 - \vartheta_{01} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{01} = x_1 \cdot (\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - x_3 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 \\
 &\quad + x_4 \cdot \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2, \\
 &\vartheta_0 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_0 - \vartheta_2 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_2 = x_1 \cdot (\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + x_2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \\
 &\quad + x_4 \cdot \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2, \\
 &\vartheta_0 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_0 - \vartheta_{12} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{12} = x_1 \cdot (\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) + x_2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \\
 &\quad - x_3 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Durch Differentiiren ergibt sich für die Nullwerthe der Argumente, — was links durch den Index 0 angedeutet werden soll — das Gleichungssystem (4):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\partial_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_3 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= (-x_3 \cdot \partial_{14}^2 + x_4 \cdot \partial_4^2) a l'_3(u_i)_0 \\ &\quad + x_5 \cdot \partial_4 \cdot \partial_{14} \cdot a l_{13}(u_i)_0, \\ \frac{2}{\partial_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_{13} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= - (x_3 \cdot \partial_4^2 + x_4 \cdot \partial_{14}^2) a l'_{13}(u_i)_0 \\ &\quad + x_5 \cdot \partial_4 \cdot \partial_{14} \cdot a l_3(u_i)_0, \\ \frac{2}{\partial_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_{24} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= (x_2 \cdot \partial_{03}^2 - x_4 \cdot \partial_{23}^2) a l'_{24}(u_i)_0 \\ &\quad + x_5 \cdot \partial_{23} \cdot \partial_{03} \cdot a l_{04}(u_i)_0, \\ \frac{2}{\partial_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_{04} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= (x_2 \cdot \partial_{23}^2 + x_4 \cdot \partial_{03}^2) a l'_{04}(u_i)_0 \\ &\quad + x_5 \cdot \partial_{23} \cdot \partial_{03} \cdot a l_{24}(u_i)_0, \\ \frac{\partial}{\partial_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_{02} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= (x_2 \cdot \partial_{34}^2 + x_3 \cdot \partial_5^2) a l'_{02}(u_i)_0 \\ &\quad + x_5 \cdot \partial_5 \cdot \partial_{34} \cdot a l_1(u_i)_0, \\ \frac{2}{\partial_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_1 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= (x_2 \cdot \partial_5^2 + x_3 \cdot \partial_{34}^2) a l'_1(u_i)_0 \\ &\quad + x_5 \cdot \partial_5 \cdot \partial_{34} \cdot a l_{02}(u_i)_0. \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_\alpha \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 \\ &= 3 a l_\alpha \left(\left(\frac{K}{3} \right) \right)^2 \cdot \partial_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^2 \left[\partial_5 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right) \cdot a l_\alpha \left(u_i + \frac{K}{3} \right)_0 + a l_\alpha \left(\left(\frac{K}{3} \right) \right) \cdot \eta_i \right], \end{aligned}$$

wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} a l_\alpha \left(\frac{K_{11} + K_{12}}{3}, \frac{K_{21} + K_{22}}{3} \right) &= a l_\alpha \left(\left(\frac{K}{3} \right) \right), \\ \frac{\partial}{\partial u_i} \left[a l_\alpha \left(u_1 + \frac{K_{11} + K_{12}}{3}, u_2 + \frac{K_{21} + K_{22}}{3} \right) \right]_0 &= a l'_\alpha \left(u_i + \frac{K}{3} \right)_0, \\ \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\partial_5 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right) \right]_0 &= \eta_i. \end{aligned}$$

Die beiden Grössen η_1 und η_2 sind als Unbekannte anzusehen, alle andern dagegen als bekannt.

Es enthalten die soeben aufgestellten 12 Gleichungen also linear zwei Unbekannte, so dass sie zehn neue Thetarelationen repräsentiren. Es soll dieses in folgender Weise übersichtlicher dargestellt werden. Wir setzen:

$$a_\alpha = a l_\alpha \left(u_1 + \frac{K}{3} \right)_0 \cdot a l_\alpha (u_2)_0 - a l_\alpha \left(u_2 + \frac{K}{3} \right)_0 \cdot a l_\alpha (u_1)_0$$

dann ist, wie sich nach leichten Rechnungen ergibt:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a l_{13}(u_1)_0 \cdot a l_3(u_2)_0 \cdot a l_{13}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_3\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_3 &= \mu_x^2 \cdot a l_{13}(u_1)_0 \cdot a l_1(u_1)_0 \cdot a l_{13}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_1\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_{02} &= a l_{24}(u_1)_0 \cdot a l_{04}(u_1)_0 \cdot a l_{24}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{04}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_{04} &= -\lambda^2 \cdot a l_{02}(u_1)_0 \cdot a l_{24}(u_1)_0 \cdot a l_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{24}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_{13} &= a l'_{13}(u_2)_0 \cdot a l_1(u_1)_0 \cdot a l_3\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_1\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_{21} &= -\lambda_1^2 \cdot a l'_{02}(u_1)_0 \cdot a l_{04}(u_1)_0 \cdot a l_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{04}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_1'^{02} &= -\frac{\partial_5}{\partial_3^4} \cdot a l_3(u_2)_0 \cdot a l_{13}(u_1)_0 \cdot a l_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{14}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_{02}' &= -\frac{\partial_5}{\partial_3^4} \cdot a l_{24}(u_1)_0 \cdot a l_{04}(u_1)_0 \cdot a l_{03}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{23}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right), \\
 a_3^{13} &= -\frac{\partial_{04} \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_0 \cdot \partial_2 \cdot \partial_{12}}{\partial_4^3 \cdot \partial_{34}^3 \cdot \partial_5^4} \left(a l_0\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{03}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_4^2 \cdot \partial_0 \cdot \partial_{34} \right. \\
 &\quad \left. + a l_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{34}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_{01}^2 \cdot \partial_{03} \cdot \partial_4 \right), \\
 a_{13}^3 &= \frac{\partial_{12} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{03} \cdot \partial_{01}}{\partial_4^3 \cdot \partial_{34}^3 \cdot \partial_5^4} \left(a l_{01}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{03}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_4^2 \cdot \partial_{01} \cdot \partial_{34} \right. \\
 &\quad \left. + a l_{14}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{34}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_0^2 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{03} \right), \\
 a_{04}^{21} &= \frac{\partial_{03} \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{14} \cdot \partial_2 \cdot \partial_{23} \cdot \partial_{01}}{\partial_4^3 \cdot \partial_{34}^3 \cdot \partial_5^4} \left(a l_0\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_5^2 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{34} \right. \\
 &\quad \left. + a l_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{24}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_2^2 \cdot \partial_{01} \cdot \partial_{03} \right), \\
 a_{24}^{04} &= -\frac{\partial_{03} \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{23} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_0}{\partial_4^3 \cdot \partial_{34}^3 \cdot \partial_5^4} \left(a l_2\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_5^2 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{34} \right. \\
 &\quad \left. + a l_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot a l_{04}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \partial_0^2 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{03} \right).
 \end{aligned}$$

Damit sind diese Grössen wirklich bestimmt. Wir wollen nun weiter setzen:

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{\partial_5} a l_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)^2 \cdot \partial_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 &\left[\partial_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot a_\alpha + a l_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) (\eta_1 \cdot a l'_\alpha(u_2)_0 - \eta_2 \cdot a l'_\alpha(u_1)_0) \right] \\
 \frac{6}{\partial_5} a l_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)^2 \cdot \partial_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 &\left[\partial_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot a_\alpha^\beta + a l_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) (\eta_1 \cdot a l'_\beta(u_2)_0 - \eta_2 \cdot a l'_\beta(u_1)_0) \right]
 \end{aligned}$$

Dann können 6 der Gleichungen in die Form gebracht werden:

$$(5) \quad c_5 \cdot \lambda_x^2 \cdot \frac{\partial_{12} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0}{\partial_5} = \varepsilon_\alpha \cdot A_\alpha,$$

wobei $\varepsilon_\alpha = +1$ ist, wenn α gleich 1, 3, 24 ist, dagegen gleich -1 , wenn α die Werthe 13, 04, 02 annimmt. Die übrigen sechs haben die Form:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} A_3^{13} &= (x_3 \cdot \partial_{14}^2 - x_4 \cdot \partial_4^2) \frac{\lambda_x^2 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0}{\partial_4 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_5^2}, \\ A_{13}^3 &= - (x_3 \cdot \partial_4^2 + x_4 \cdot \partial_{14}^2) \frac{\lambda_x^2 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0}{\partial_4 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_5^2}, \\ A_{24}^{04} &= (-x_2 \cdot \partial_{03}^2 + x_4 \cdot \partial_{23}^2) \frac{\lambda_x^2 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0}{\partial_{03} \cdot \partial_{23} \cdot \partial_5^2}, \\ A_{04}^{24} &= - (x_2 \cdot \partial_{23}^2 + x_4 \cdot \partial_{03}^2) \frac{\lambda_x^2 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0}{\partial_{03} \cdot \partial_{23} \cdot \partial_5^2}, \\ A_{02}' &= (x_2 \cdot \partial_{34}^2 + x_3 \cdot \partial_5^2) \frac{\lambda_x^2 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0}{\partial_{34} \cdot \partial_5 \cdot \partial_5^2}, \\ A_1^{02} &= - (x_2 \cdot \partial_5^2 + x_3 \cdot \partial_{34}^2) \frac{\lambda_x^2 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2 \cdot \partial_0}{\partial_{34} \cdot \partial_5 \cdot \partial_5^2}. \end{aligned} \right.$$

Es möge nun an die Betrachtung der Function:

$$\partial_5 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 + \partial_5 \left(\left(v + \frac{2}{3} \right) \right)^3$$

noch die Betrachtung der Function:

$$\partial_5 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 - \partial_5 \left(\left(v + \frac{2}{3} \right) \right)^3$$

angeschlossen werden. Wir können jedenfalls setzen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \partial_5 \left(\left(x + \frac{1}{3} \right) \right)^3 - \partial_5 \left(\left(v + \frac{2}{3} \right) \right)^3 &= x_6 \cdot \partial_{02}((v)) \cdot \partial_{24}((v)) \cdot \partial_{04}((v)) \\ &+ x_7 \cdot \partial_3((v)) \cdot \partial_1((v)) \cdot \partial_{13}((v)) + x_8 \cdot \partial_{34}((v)) \cdot \partial_{23}((v)) \cdot \partial_{24}((v)) \\ &+ x_9 \cdot \partial_{34}((v)) \cdot \partial_{14}((v)) \cdot \partial_{13}((v)). \end{aligned}$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich für die Nullwerthe der Argumente folgende Gleichungen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \cdot \partial_1 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= -x_6 \cdot \partial_{34} \cdot \partial_{03} \cdot \partial_{23}, \\ 2 \cdot \partial_3 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_6 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_{12} - x_8 \cdot \partial_4 \cdot \partial_2 \cdot \partial_{01}, \\ 2 \cdot \partial_{02} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= x_7 \cdot \partial_{14} \cdot \partial_{34} \cdot \partial_4, \\ 2 \cdot \partial_{04} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 &= -x_7 \cdot \partial_{12} \cdot \partial_{23} \cdot \partial_2 - x_9 \cdot \partial_{03} \cdot \partial_{01} \cdot \partial_2, \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \begin{cases} 2 \cdot \vartheta_{13} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 = -x_6 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_2 - x_8 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 + x_9 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5, \\ 2 \cdot \vartheta_{24} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 = -x_7 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 + x_8 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 - x_9 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0. \end{cases}$$

Mithin erhalten wir folgende Werthe für die Constanten:

$$\begin{aligned} x_6 &= -\frac{2 \cdot \vartheta_1 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}}, & x_7 &= \frac{2 \cdot \vartheta_{02} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3}{\vartheta_{14} \cdot \vartheta_{31} \cdot \vartheta_4}, \\ x_8 &= -\frac{2 \cdot \vartheta_3 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} + 2 \cdot \vartheta_1 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01}}, \\ x_9 &= -\frac{2 \cdot \vartheta_{04} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 + 2 \cdot \vartheta_{02} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{14}}. \end{aligned}$$

Zu gleicher Zeit ergeben sich die Thetarelationen:

$$(9) \quad \begin{cases} \vartheta_{13} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 = \frac{\vartheta_1 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{23}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2} + \frac{\vartheta_3 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01}}, \\ \vartheta_{24} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 = -\frac{\vartheta_{04} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2} - \frac{\vartheta_{02} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4}, \\ \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 = -\frac{\vartheta_1 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{12}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2} - \frac{\vartheta_3 \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_5}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01}}, \\ \vartheta_{04} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 = \frac{\vartheta_{04} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2} + \frac{\vartheta_{02} \left(\left(\frac{1}{3} \right) \right)^3 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4}. \end{cases}$$

Weitere Thetarelationen können durch Differenziren erhalten werden. Für die Nullwerthe der Argumente ergeben sich auf diese Weise folgende Gleichungen (10):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= x_8 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{34} \cdot a \ell_{21}(u_i)_0 + x_9 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{14} \cdot a \ell_{13}(u_i)_0, \\ -\frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_0 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= x_6 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_4 \cdot a \ell_{13}(u_i)_0 + x_7 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot a \ell_{24}(u_i)_0 \\ &\quad + x_8 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{14} \cdot a \ell_{15}(u_i)_0 + x_9 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot a \ell_{24}(u_i)_0, \\ \frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_2 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= x_6 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_4 \cdot a \ell_{13}(u_i)_0 - x_7 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{12} \cdot a \ell_{04}(u_i)_0 \\ &\quad + x_8 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4 \cdot a \ell_3(u_i)_0 - x_9 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{03} \cdot a \ell_{04}(u_i)_0, \\ \frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_4 \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 &= x_6 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot a \ell_{13}(u_i)_0 + x_7 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{14} \cdot a \ell_{02}(u_i)_0 \\ &\quad + x_8 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01} \cdot a \ell_3(u_i)_0, \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_{01} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 = x_6 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{14} \cdot a l'_3 (u_i)_0 + x_7 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{03} \cdot a l'_{24} (u_i)_0 \\ - x_8 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_4 \cdot a l'_3 (u_i)_0 + x_9 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot a l'_{04} (u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_{03} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 = -x_6 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{34} \cdot a l'_1 (u_i)_0 + x_7 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{01} \cdot a l'_{24} (u_i)_0 \\ + x_9 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01} \cdot a l'_{04} (u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_{12} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 = -x_6 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{14} \cdot a l'_3 (u_i)_0 + x_7 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot a l'_{04} (u_i)_0 \\ + x_8 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot a l'_{13} (u_i)_0 + x_9 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{23} \cdot a l'_{24} (u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_{14} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 = x_6 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot a l'_3 (u_i)_0 - x_7 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{34} \cdot a l'_{02} (u_i)_0 \\ + x_8 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12} \cdot a l'_{13} (u_i)_0 - x_9 \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot a l'_{13} (u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_{23} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 = x_6 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{34} \cdot a l'_1 (u_i)_0 + x_7 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{12} \cdot a l'_{04} (u_i)_0 \\ - x_8 \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot a l'_{24} (u_i)_0 + x_9 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12} \cdot a l'_{24} (u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\vartheta_{34} \left(\left(v + \frac{1}{3} \right) \right)^3 \right]_0 = x_6 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot a l'_1 (u_i)_0 - x_7 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot a l'_{02} (u_i)_0 \\ - x_8 \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{23} \cdot a l'_{24} (u_i)_0 - x_9 \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{11} \cdot a l'_{13} (u_i)_0.$$

Da die Grössen η_1 und η_2 , die in diesen Gleichungen enthalten sind, vermöge der früheren Betrachtungen als bekannt angesehen werden können, so repräsentiren diese Formeln zwanzig neue Thetarelationen.

§ 3.

Der Fall $n = 5$.

Wir kommen zu dem Falle $n = 5$. In demselben beschränken wir uns auf das eine Beispiel:

$$\vartheta_5 \left(\left(v + \frac{1}{5} \right) \right)^5 + \vartheta_5 \left(\left(v + \frac{4}{5} \right) \right)^5.$$

Dieser Ausdruck ist gleich:

$$(1) \quad x_1 \cdot \vartheta_5((v))^3 \cdot \vartheta_1((v))^2 + x_2 \cdot \vartheta_5((v))^3 \cdot \vartheta_{02}((v))^2 + x_3 \cdot \vartheta_5((v))^3 \cdot \vartheta_{34}((v))^2 \\ + x_4 \cdot \vartheta_5((v))^2 \cdot \vartheta_1((v)) \cdot \vartheta_{02}((v)) \cdot \vartheta_{34}((v)) \\ + x_5 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_1((v))^4 + x_6 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_{02}((v))^4 + x_7 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_{34}((v))^4 \\ + x_8 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_{02}((v))^2 \cdot \vartheta_{34}((v))^2 + x_9 \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_{34}((v))^2 \cdot \vartheta_1((v))^2 \\ + x_{10} \cdot \vartheta_5((v)) \cdot \vartheta_1((v))^2 \cdot \vartheta_{02}((v))^2 + x_{11} \cdot \vartheta_1((v))^3 \cdot \vartheta_{02}((v)) \cdot \vartheta_{34}((v)) \\ + x_{12} \cdot \vartheta_1((v)) \cdot \vartheta_{02}((v))^3 \cdot \vartheta_{34}((v)) + x_{13} \cdot \vartheta_1((v)) \cdot \vartheta_{02}((v)) \cdot \vartheta_{34}((v))^3.$$

Mit Hülfe der Substitution halber Perioden ergeben sich hieraus die Werthe:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{2 \cdot \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{14}^3 + 2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_4^3}{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \\
 x_2 &= \frac{-2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{03}^3 - 2 \cdot \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{23}^3}{\vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \\
 x_3 &= \frac{2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_5^3 - 2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{34}^3}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \\
 x_5 &= \frac{2 \cdot \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_4 - 2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \\
 x_6 &= \frac{-2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{23} + 2 \cdot \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{03}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}, \\
 x_7 &= \frac{2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_5 - 2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{5} \right) \right)^5 \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun genau so wie im Falle $n = 3$

$$\begin{aligned}
 a_\alpha &= a l'_\alpha \left(u_1 + \frac{K}{5} \right)_0 \cdot a l'_\alpha (u_2)_0 - a l'_\alpha \left(u_2 + \frac{K}{5} \right)_0 \cdot a l'_\alpha (u_1)_0, \\
 a^\beta_\alpha &= a l'_\alpha \left(u_1 + \frac{K}{5} \right)_0 \cdot a l'_\beta (u_2)_0 - a l'_\alpha \left(u_2 + \frac{K}{5} \right)_0 \cdot a l'_\beta (u_1)_0, \\
 A_\alpha &= \frac{10}{\vartheta_5} \cdot a l_\alpha \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right)^4 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right)^4 \\
 &\quad \cdot \left(a l_\alpha \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right) \cdot (\eta_1 \cdot a l'_\alpha (u_2)_0 - \eta_2 \cdot a l'_\alpha (u_1)_0) + \vartheta_5 \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right) \cdot a_\alpha \right), \\
 A^\beta_\alpha &= \frac{10}{\vartheta_5} \cdot a l_\alpha \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right)^4 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right)^4 \\
 &\quad \cdot \left(a l_\alpha \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right) \cdot (\eta_1 \cdot a l'_\beta (u_2)_0 - \eta_2 \cdot a l'_\beta (u_1)_0) + \vartheta_5 \left(\left(\frac{K}{5} \right) \right) \cdot a^\beta_\alpha \right).
 \end{aligned}$$

Es müssten diese Grössen zum Unterschiede von den im vorigen Paragraphen gebrauchten mit einem Index versehen werden, indessen glaubt der Verfasser hiervon absehen zu können. Die Grössen A_α und A^β_α enthalten dann die beiden Unbekannten η_1 und η_2 linear in sich, sind aber von diesen abgesehen völlig bekannt.

Mit ihrer Hülfe ergeben sich die Werthe der Constanten:

$$x_{11} = f \cdot \frac{A_1 \cdot \vartheta_5^2 + A_{02} \cdot \vartheta_{34}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, \quad x_{12} = f \cdot \frac{A_{13} \cdot \vartheta_4^2 - A_3 \cdot \vartheta_{14}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4},$$

$$x_{13} = -f \cdot \frac{A_{24} \cdot \vartheta_{23}^3 + A_{04} \cdot \vartheta_{03}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4},$$

$$f = \frac{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^4}{\vartheta_0 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2},$$

während die Grössen x_8 , x_9 , x_{10} sich aus den Gleichungen ergeben:

$$x_6 \cdot \vartheta_4^4 + x_7 \cdot \vartheta_{14}^4 + x_8 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 = \frac{A_{13}^3 \cdot f_1}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}},$$

$$x_5 \cdot \vartheta_{23}^4 + x_7 \cdot \vartheta_{03}^4 + x_9 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 = \frac{A_{04}^{24} \cdot f_1}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}},$$

$$x_5 \cdot \vartheta_{34}^4 + x_6 \cdot \vartheta_6^4 + x_{10} \cdot \vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2 = \frac{A_{02}' \cdot f_1}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}},$$

$$f_1 = \frac{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^3 \cdot \vartheta_5^5}{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}.$$

Dabei sind dann die beiden unbekannten Grössen η_1 und η_2 aus den Gleichungen bestimmt:

$$(2) \quad \begin{cases} A_1 \cdot \vartheta_5^2 + A_{02} \cdot \vartheta_{34}^2 = A_{24} \cdot \vartheta_{03}^2 - A_{04} \cdot \vartheta_{23}^2, \\ A_3 \cdot \vartheta_{14}^2 - A_{13} \cdot \vartheta_4^2 = A_1 \cdot \vartheta_{34}^2 + A_{02} \cdot \vartheta_5^2, \\ -A_{24} \cdot \vartheta_{23}^2 - A_{04} \cdot \vartheta_{03}^2 = A_{13} \cdot \vartheta_{14}^2 + A_3 \cdot \vartheta_4^2, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{(A_{04}^{24} - A_{24}^{04}) \cdot f_1}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}} = - \frac{2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_4} + \frac{2 \cdot \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{14}} \\ \quad + \frac{2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{34}} - \frac{2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_5}, \\ \frac{(A_{02}' - A_1^{02}) \cdot f_1}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}} = - \frac{2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{03}} + \frac{2 \cdot \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{23}} \\ \quad + \frac{2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_4} - \frac{2 \cdot \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{14}}, \\ \frac{(A_{13}^3 - A_3^{13}) \cdot f_1}{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}} = - \frac{2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{03}} + \frac{2 \cdot \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{23}} \\ \quad + \frac{2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{34}} - \frac{2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_5}. \end{cases}$$

Es sind dieses sechs Gleichungen, welche die beiden Unbekannten η_1, η_2 linear in sich enthalten. Dieselben repräsentiren also zu gleicher Zeit vier Thetarelationen.

§ 4.

Methoden zur Herstellung allgemeiner Thetabeziehungen.

Die Fourier'schen Entwicklungen der Potenzen und Producte der Thetafunctionen.

Analog wie die in den vorigen Paragraphen behandelten Functionen können alle Thetafunctionen n^{ter} Ordnung betrachtet werden, die sich aus unseren Thetafunctionen bilden lassen. Ueberdies ist klar, dass auch zwischen mehreren derselben lineare Beziehungen existiren müssen, vorausgesetzt, dass dieselben als Thetafunctionen n^{ter} Ordnung betrachtet, dieselbe Charakteristik besitzen. Die Constanten können nach angegebenen Methoden bestimmt werden. Diese Bestimmung wird in vielen Fällen durch folgende Sätze erleichtert:

1) Leistet eine Function von v_1 und v_2 den Bedingungsgleichungen Genüge:

$$(1) \quad \begin{cases} f\left(v_1 + \frac{1}{n}, v_2\right) = f(v_1, v_2), & f\left(v_1, v_2 + \frac{1}{n}\right) = f(v_1, v_2), \\ f(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{-n\pi i(2v_1 + \tau_{11})} \cdot f(v_1, v_2), \\ f(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{-n\pi i(2v_2 + \tau_{22})} \cdot f(v_1, v_2), \end{cases}$$

so ist sie von einer Constanten abgesehen, immer gleich der transformirten Function:

$$\vartheta_3(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$

2) Leistet zweitens eine Function den Gleichungen Genüge:

$$(2) \quad \begin{cases} f\left(v_1 + \frac{1}{n}, v_2\right) = \alpha f(v_1, v_2), & f\left(v_1, v_2 + \frac{1}{n}\right) = \beta f(v_1, v_2), \\ f(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{-n\pi i(2v_1 + \tau_{11})} \cdot f(v_1, v_2), \\ f(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{-n\pi i(2v_2 + \tau_{22})} \cdot f(v_1, v_2), \\ \alpha = e^{\frac{2\pi ip}{n}}, & \beta = e^{\frac{2\pi iq}{n}}, \end{cases}$$

so ist sie von einer Constanten abgesehen immer gleich der Function:

$$e^{2\pi i(pv_1 + qv_2)} \cdot \vartheta_3(nv_1 + p\tau_{11} + q\tau_{12}, nv_2 + p\tau_{12} + q\tau_{22}).$$

Die Beweise der beiden Sätze liegen auf der Hand und sollen nicht weiter ausgeführt werden.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass diese beiden Sätze nur Vertreter zweier Kategorien von Sätzen sind, die aus den soeben aufgestellten mit leichter Mühe abzuleiten sind.

Hieraus nun folgen u. a. die Formeln (3):

$$\begin{aligned}
 \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((v)) &= c_1 \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} g_1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v))^n \\
 &= c_2 \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v))^n \\
 &= c_3 \cdot \sum_0^{n-1} \prod_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v)) \\
 &= c_4 \cdot \sum_0^{n-1} \prod_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v)) \\
 &= c_5 \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \prod_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} g_1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v)) \\
 &= c_6 \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \prod_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((v))^n &= c_7 \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} g_1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v))^n \\
 &= c_8 \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v))^n \\
 &= c_9 \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \prod_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} g_1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v)) \\
 &= c_{10} \cdot \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \prod_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v)).
 \end{aligned}$$

Die Constanten c , die in diesen Gleichungen vorkommen, können dadurch bestimmt werden, dass man den Argumenten einen bestimmten Werth beilegt.

Diese Formeln lassen eine interessante Anwendung zu. Sie lehren nämlich die Fouriersche Entwicklung der Potenzen und Producte der gewöhnlichen Thetafunctionen kennen.

In der That es ist:

$$\begin{aligned}
 &\sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((v))^n \\
 &= c_{pq} \cdot \varepsilon_{pq} \cdot \vartheta_5(nv, -p\tau_{11} - q\tau_{12}, \quad nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22}, \quad n\tau_{11}, \quad n\tau_{12}, \quad n\tau_{22}),
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{pq} = e^{-2\pi i(v_1 p + v_2 q) + \frac{\pi i}{n}(p^2 \tau_{11} + 2pq\tau_{12} + q^2 \tau_{22})}.$$

Die Constante c_{pq} bestimmen wir, indem wir an Stelle von v_1 und v_2 uns gesetzt denken resp.

$$v_1 + \frac{p\tau_{11} + q\tau_{12}}{n}, \quad v_2 + \frac{p\tau_{12} + q\tau_{22}}{n}.$$

Dann wird:

$$(4) \quad \Theta_5 \cdot c_{pq} = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\frac{p}{h_1} \frac{q}{h_2} \right] ((0))^n,$$

wenn

$$\Theta_5 = \vartheta_5(0, 0, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

gesetzt wird.

Demgemäss erhalten wir die Entwicklung:

$$(5) \quad n^2 \cdot \Theta_5 \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \varepsilon_{pq} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{p}{h_1} \frac{q}{h_2} \right] ((0))^n \\ \cdot \vartheta_5(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12}, nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22}, n\tau_{12}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$

Schon diese Formel kann als Lösung des gestellten Problems gelten, indessen soll sie noch in folgender Weise transformirt werden.

$$n^2 \cdot \Theta_5 \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \vartheta_5 \left[\frac{0}{h_1} \frac{0}{h_2} \right] ((0))^n \cdot \vartheta(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_5 \left[\frac{p}{h_1} \frac{0}{h_2} \right] ((0))^n \cdot \varphi(p, 0) \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_5 \left[\frac{0}{h_1} \frac{q}{h_2} \right] ((0))^n \cdot \varphi(0, q) \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_5 \left[\frac{p}{h_1} \frac{q}{h_2} \right] ((0))^n \cdot \varphi(p, q) \\ + \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_5 \left[\frac{p}{h_1} - \frac{q}{h_2} \right] ((0))^n \cdot \varphi(p, -q).$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\varphi(p, q) = \varepsilon_{pq} \cdot \vartheta_5(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12}, nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) \\ + \varepsilon_{-p-q} \cdot \vartheta_5(nv_1 + p\tau_{11} + q\tau_{12}, nv_2 + p\tau_{12} + q\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$

Die Fourierschen Entwicklungen der Grössen:

$$\varphi(p, q)$$

aber sind leicht herzustellen. In der That, es ist:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i (m_1^2 \tau_{11} + 2 m_1 m_2 \tau_{12} + m_2^2 \tau_{22}) + 2 \pi i (m_1 v_1 + m_2 v_2)}$$

Setzen wir hierin an Stelle von m_1 und m_2 resp. $n\mu_1 + p$, $n\mu_2 + q$, so folgt:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \varepsilon_{-p-q} \cdot \vartheta_5(n(v_1 + p\tau_{11} + q\tau_{12}), n(v_2 + p\tau_{12} + q\tau_{22}), n^2\tau_{11}, n^2\tau_{12}, n^2\tau_{22}).$$

Jetzt werde links und rechts an Stelle der Grössen τ_{11} , τ_{12} , τ_{22} gesetzt resp. $\frac{\tau_{11} + 2\lambda_1}{n}$, $\frac{\tau_{12} + 2\lambda_2}{n}$, $\frac{\tau_{22} + 2\lambda_3}{n}$, dann folgt leicht:

$$\begin{aligned} (5) \quad & \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11} + 2\lambda_1}{n}, \frac{\tau_{12} + 2\lambda_2}{n}, \frac{\tau_{22} + 2\lambda_3}{n}\right) \\ &= \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) + \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{2\pi i p^2 \lambda_1}{n}} \varphi(p, 0) + \sum_{q=1}^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{2\pi i q^2 \lambda_3}{n}} \varphi(0, q) \\ &+ \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{q=1}^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{n} (p^2 \lambda_1 + 2pq\lambda_2 + q^2 \lambda_3)} \varphi(p, q) + e^{\frac{2\pi i}{n} (p^2 \lambda_1 - 2pq\lambda_2 + q^2 \lambda_3)} \varphi(p, -q). \end{aligned}$$

In Bezug auf diese Formel möge auf eine Arbeit von Herrn Wiltheiss im 96^{ten} Bande des Crelle'schen Journals verwiesen werden. In derselben kann an Stelle einer jeden der drei Grössen λ_1 , λ_2 , λ_3 der Reihe nach 0, 1, ..., $n-1$ gesetzt werden. Die Functionen auf der linken Seite bilden dann einen Theil der repräsentirenden transformirten Thetafunctionen, deren Fourier'sche Entwicklungen unmittelbar bekannt sind.

Multipliciren wir diese Gleichungen mit $e^{\frac{2\pi i}{n} (p^2 \lambda_1 + 2pq\lambda_2 + q^2 \lambda_3)}$ und summiren nach den Grössen λ_1 , λ_2 , λ_3 , so erhalten wir umgekehrt die $\varphi(p, q)$ -Functionen durch die transformirten ausgedrückt und damit die gesuchten Fourier'schen Entwicklungen. In den Coefficienten treten die Potenzen der Thetafunctionen auf, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen und deren Argumente Null sind, daneben die Grösse Θ_5 .

Genau so kann man die Fourier'schen Entwicklungen für die Producte:

$$\vartheta_5((v))^\alpha \cdot \vartheta_{02}((v))^\beta \cdot \vartheta_1((v))^\gamma \cdot \vartheta_{34}((v))^\delta$$

bestimmen, bei denen die Exponenten die bekannten Bedingungen erfüllen. Die Formen bleiben dieselben, die Coefficienten ändern sich in leicht angebbarer Weise.

Es hat die Lösung dieses Problems eine weittragende Bedeutung. Das ursprüngliche Transformationsproblem lautet: Es sollen die transformirten Thetafunctionen als ganze rationale Functionen der ursprünglichen ausgedrückt werden. Hier nun ist das umgekehrte Problem gelöst worden. Es sind die ursprünglichen Thetafunctionen durch die transformirten ausgedrückt und damit in gewisser Weise eine Auflösung der Transformationsgleichungen gegeben worden. Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei die Einfachheit und Eleganz der Coefficienten. Aus den Sätzen, die wir zur Ableitung von Thetarelationen gebraucht haben, folgt ferner, dass wenn eine Reihe von Functionen den Gleichungen Genüge leisten:

$$(7) \quad \begin{cases} f(v_1 + \frac{1}{n}, v_2) = f(v_1, v_2), & f(v_1, v_2 + 1) = f(v_1, v_2) \\ f(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{-n\pi i \cdot (2v_1 + \tau_{11})} \cdot f(v_1, v_2), \\ f(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{-n\pi i \cdot (2v_2 + \tau_{22})} \cdot f(v_1, v_2), \end{cases}$$

dann zwischen je $n + 1$ derselben mindestens eine lineare Relation bestehen muss. Es wird also bei derartigen Functionen die Zahl der zu bestimmenden Constanten verringert — und zwar verringert im Vergleich zu den gewöhnlichen Thetafunctionen n^{ter} Ordnung.

Es zeigt sich diese Bemerkung vor allem bei Aufstellung der linearen Beziehungen zwischen den repräsentirenden Thetafunctionen von Bedeutung, ist dagegen für die Gewinnung neuer und einfacher Thetarelationen von keiner hervorragenden Wichtigkeit. Wir wollen auf sie und analoge Bemerkungen unter solchen Umständen nicht näher eingehen.

Zu weiteren Thetarelationen gelangt man durch den Umstand, dass, wenn zwei Thetafunctionen n^{ter} Ordnung, die als solche dieselbe Charakteristik besitzen, für n^2 Theilwerthe der Perioden übereinstimmen, dass sie dann überhaupt übereinstimmen müssen.

Setzen wir:

$$\alpha = e^{-\frac{2\pi i}{n}}, \quad \beta = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$$

und nehmen die Ausdrücke

$$\sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((0))^n \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((v))^n$$

und:

$$\sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((0))^n \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v))^n,$$

so stimmen dieselben für die n^2 Werthe von v überein:

$$\frac{-\tau_{11} + h_1}{n}, \quad \frac{-\tau_{12} + h_2}{n}.$$

Mithin erhalten wir die Gleichung:

$$(8) \quad \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((v))^n \\ = \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))^n.$$

Genau so ergeben sich die Gleichungen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \beta^{h_2} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((v))^n \\ &= \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \beta^{h_2} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))^n, \\ & \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((v))^n \\ &= \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix} ((v))^n. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen können eine Reihe anderer hergeleitet werden. Setzen wir in der ersten derselben z. B. an Stelle von v_1, v_2 der Reihe nach $v_1 + \frac{h_1'}{n}, v_2 + \frac{h_2'}{n}$ und lassen h_1' und h_2' alle Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen, so erhalten wir beim Summiren aller Gleichungen:

$$\sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((v))^n \\ = \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \vartheta_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))^n.$$

An Stelle von v_1 und v_2 setzen wir links und rechts resp. $v_1 + \frac{\tau_{11}}{n}, v_2 + \frac{\tau_{12}}{n}$, so wird:

$$\sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))^n \\ = \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((v))^n.$$

Setzen wir hierin $v = 0$, so erhalten wir die Gleichung:

$$(10) \quad \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((0))^n = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((v))^n.$$

Genau so wird:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((0))^n = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right] ((0))^n, \\ \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((0))^n = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \alpha^{h_1} \cdot \beta^{h_2} \cdot \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ h \end{smallmatrix} \right] ((0))^n. \end{array} \right.$$

Es können diese Gleichungen zur Vereinfachung der Constantenausdrücke in einigen früheren Gleichungen dienen. Durch Substitution von n tel Perioden können die Gleichungen in bedeutend allgemeinerer Form dargestellt werden, wie denn auch sie nur als Vertreter grosser Kategorien von Relationen dienen sollen.

§ 5.

Einfacher Beweis der Prym'schen Thetaformeln.

Es ist klar, dass ausser den Gleichungen, die im vorigen Paragraphen aufgestellt worden sind, noch eine Fülle anderer entwickelt werden kann. Es sollen diese nicht einzeln aufgestellt werden, vielmehr sollen lediglich die allgemeinsten Gleichungen, die zwischen den definirten Thetafunctionen bestehen, mit wenigen Schlüssen abgeleitet werden. Diese Gleichungen sind zuerst von den Herren Prym und Krazer in ihrer fundamentalen Arbeit in den Acta mathematica (Band III) aufgestellt worden. Wir setzen dazu:

$$\begin{array}{llll} nu_1 & = (1-n)v_1 & + \cdots + & v_{2n}, \\ nu_2 & = v_1 + (1-n)v_2 + \cdots + & & v_{2n}, \\ . & . & . & . \\ nu_{2n} & = v_1 & + \cdots + (1-n)v_{2n}, \\ nu'_1 & = (1-n)v'_1 & + \cdots + & v'_{2n}, \\ nu'_2 & = v'_1 + (1-n)v'_2 + \cdots + & & v'_{2n}, \\ . & . & . & . \\ nu'_{2n} & = v'_1 + v'_2 & + \cdots + (1-n)v'_{2n}, \end{array}$$

und bilden zunächst das Product:

$$\vartheta(v_1, v'_1) \cdot \vartheta(v_2, v'_2) \cdots \vartheta(v_{2n}, v'_{2n}) = \prod_{i=1}^{2n} \vartheta(v_i, v'_i).$$

Betrachten wir dieses Product als Function von v_i und v_i' und bezeichnen es als solche durch $f(v_i, v_i')$, so leistet es den Gleichungen Genüge:

$$(1) \quad \begin{cases} f(v_i + 1, v_i') = f(v_i, v_i'), & f(v_i, v_i' + 1) = f(v_i, v_i'), \\ f(v_i + \tau_{11}, v_i' + \tau_{12}) = e^{-\pi i (2v_i + \tau_{11})} f(v_i, v_i'), \\ f(v_i + \tau_{12}, v_i' + \tau_{22}) = e^{-\pi i (2v_i' + \tau_{22})} f(v_i, v_i'). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen es bis auf eine von v_i, v_i' unabhängige Constante.

Bilden wir andererseits das Product:

$$\prod_{i=1}^{2n} e^{-\frac{2}{n} \pi i g_1 \cdot h_1} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (u_i, u_i'),$$

wo die Zahlen g und h beliebige Werthe von 0 bis $n-1$ bedeuten können, und sehen diesen Ausdruck als Function von v_i und v_i' an, so geht er bei Vermehrung von v_i um 1 über in:

$$\prod_{i=1}^{2n} e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot g_1 \cdot (h_1+1)} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g_1}{h_1+1} \frac{g_2}{h_2} \right] (u_i, u_i').$$

Dabei ist klar, dass wir, ohne der Richtigkeit Abbruch zu thun, annehmen können, dass auch $h_1 + 1$ eine der Zahlen von 0 bis $n-1$ bedeutet. Hieraus folgt, dass die Summe:

$$\sum_{h_1=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{2n} e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot g_1 \cdot h_1} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (u_i, u_i')$$

als Function von v_i und v_i' aufgefasst ungeändert bleibt, wenn v_i um 1 vermehrt wird. Genau so folgt, dass die Summe:

$$\sum_{h_1=0}^{n-1} \sum_{h_2=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{2n} e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot (g_1 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2)} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (u_i, u_i')$$

ungeändert bleibt, wenn ein beliebiges der Argumente v_i, v_i' um die Einheit vermehrt wird. Nehmen wir endlich die vierfache Summe

$$\sum_{h_1=0}^{n-1} \sum_{h_2=0}^{n-1} \sum_{g_1=0}^{n-1} \sum_{g_2=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{2n} e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot (g_2 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2)} \cdot \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (u_i, u_i'),$$

so ist klar, dass dieselbe als Function von v_i und v_i' aufgefasst den vorhin aufgestellten charakterisirenden Gleichungen Genüge leistet. Da nun i eine beliebige der Grössen $0 \dots n-1$ bedeutet, so folgt die Gleichung:

$$\prod_{i=0}^{2n} \vartheta_5(v_i, v_i') = c \cdot \sum_{h_1=0}^{n-1} \sum_{h_2=0}^{n-1} \sum_{g_1=0}^{n-1} \sum_{g_2=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{2n} \vartheta_5 \left[\frac{g}{h} \right] (u_i, u_i') \cdot e^{-\frac{2\pi i}{n} (h_1 \cdot g_1 + h_2 \cdot g_2)}.$$

Hierbei ist c eine Grösse, die von den Veränderlichen u, u' oder v, v' unabhängig ist und lediglich von den Grössen τ abhängen kann.

Bezeichnen wir nun die linke Seite kurz durch F , so folgt unmittelbar, dass sie den Differentialgleichungen Genüge leistet:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{2n} i \frac{\partial^2 F}{\partial v_i^2} = 4\pi i \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau_{11}}, \quad \sum_1^{2n} i \frac{\partial^2 F}{\partial v_i'^2} = 4\pi i \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau_{22}}, \\ \sum_1^{2n} i \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \cdot \partial v_i'} = 2\pi i \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau_{12}}. \end{array} \right.$$

Genau denselben Gleichungen leistet aber die vierfache Summe auf der rechten Seite Genüge. Hieraus folgt, dass die Constante auch von den Grössen τ unabhängig sein muss. Dann aber finden wir sie am einfachsten, wenn für die einzelnen Thetafunctionen ihre Fourier'schen Entwicklungen eingesetzt werden. Hierbei ergibt sich, wie unmittelbar klar:

$$1 = c \cdot n^2$$

oder also:

$$(3) \quad n^2 \prod_1^{2n} \vartheta_5(v_i, v_i') = \sum_0^{n-1} h_1 \sum_0^{n-1} h_2 \sum_0^{n-1} g_1 \sum_0^{n-1} g_2 \prod_1^{2n} \vartheta_5 \left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (u_i, u_i') \cdot e^{-\frac{2\pi i}{\pi} (h_1 \cdot g_1 + h_2 \cdot g_2)}$$

Es ist dieses die Gleichung Θ_2 der Herren Prym und Krazer — für den Fall zweier Veränderlichen specialisirt. Genau so lässt sich die Gleichung Θ_1 ableiten. Damit sind die Prym'schen Fundamentalformeln entwickelt. —

Rostock im September 1885.