

## Über symmetrische Matrices.

Von

JOSEF KÜRSCHÁK aus Budapest.

Es bedeute  $M_{nn}$  die Matrix

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$y_{ik} = y_{ki},$$

und überhaupt bezeichne  $M_{rs}$  für  $r \leq n$ ,  $s \leq n$  die Matrix

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1s} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{r1} & y_{r2} & \cdots & y_{rs} \end{vmatrix}.$$

Dann zeigt eine einfache Rechnung, daß jede lineare Funktion der Determinanten, die sich aus  $M_{nn}$  bilden lassen, folgendem Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen genügt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik} \partial y_{\mu\nu}} (1 + \delta_{ik}) (1 + \delta_{\mu\nu}) + \\ (S_n) \quad & \frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\mu} \partial y_{\nu k}} (1 + \delta_{i\mu}) (1 + \delta_{\nu k}) + \quad (i \leq k \leq \mu \leq \nu = 1, 2, \dots, n) \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\nu} \partial y_{k\mu}} (1 + \delta_{i\nu}) (1 + \delta_{k\mu}) = 0, \end{aligned}$$

wo  $\delta_{ik}$  die Null oder Eins ist, je nachdem  $i$  und  $k$  verschieden oder gleich sind.

Es sollen nun umgekehrt die folgenden zwei Sätze bewiesen werden\*):

(I) Jede Lösung von  $(S_n)$  ist eine lineare Funktion der Determinanten der Matrix  $M_{nn}$ .

(II) Jede solche Lösung von  $(S_n)$ , die nur die Elemente von  $M_{\nu n}$  enthält, ist eine lineare Funktion der Determinanten dieser Matrix  $M_{\nu n}$ .

Beide Sätze haben auch für  $n = 1$  einen Sinn und besagen dann, daß jede Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{11}^2} = 0$$

eine lineare Funktion von  $y_n$  ist. Beim Beweise für ein beliebiges  $n$  dürfen wir also beide Sätze für  $n - 1$  als richtig betrachten.

Ist nun  $F$  irgend eine Lösung von  $(S_n)$ , so ist für  $i = k = \mu = \nu = n$

$$12 \frac{\partial^2 F}{\partial y_{nn}^2} = 0.$$

Es ist also  $F$  eine lineare Funktion von  $y_{nn}$ , deren Koeffizienten von den Elementen der Matrix  $M_{n-1, n}$  abhängige Größen sind. Der Koeffizient  $\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$ , mit dem  $y_{nn}$  multipliziert ist, enthält überhaupt nur die Elemente von  $M_{n-1, n-1}$ , denn für  $i < n$  und  $k = \mu = \nu = n$  ist

$$6 \frac{\partial}{\partial y_{i, n}} \left( \frac{\partial F}{\partial y_{nn}} \right) = 0.$$

Da  $F$  auch dem Teilsysteme  $(S_{n-1})$  genügt, so gilt dasselbe auch vom besagten Koeffizienten  $\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$ . Für  $(S_{n-1})$  und  $M_{n-1, n-1}$  betrachten wir aber die Sätze (I) und (II) als bewiesen, mithin ist  $\frac{\partial F}{\partial y_{nn}}$  eine lineare Funktion der Determinanten von  $M_{n-1, n-1}$ . Das Produkt einer solchen Determinante mit  $y_{nn}$  ist gleich der Summe einer gewissen Determinante von  $M_{nn}$  und einer Funktion, die nur die Elemente von  $M_{nn-1}$ , oder, was dasselbe ist, nur von  $M_{n-1, n}$  enthält. Es ist folglich

$$F = G_{n-1} + F_n,$$

---

\*) Bezüglich der einfachsten Fälle des Satzes (I) vergleiche man folgende Abhandlungen, wo dieser Satz auch eine interessante Anwendung findet:

A. Hirsch, *Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung*. Math. Annalen Bd. 49, S. 49—72,

W. Hertz, *Über partielle Differentialgleichungen, die in der Variationsrechnung vorkommen*. Inaugural-Dissertation, der Universität zu Kiel vorgelegt. Göttingen 1903.

Obwohl das Beweisverfahren von Herrn Wilhelm Hertz mir bedenklich erscheint, verdanke ich seiner mir in liebenswürdiger Weise überreichten Dissertation nicht nur die unmittelbare Veranlassung zu dieser Note, sondern seine Einteilung des Systems  $(S_n)$  in Gruppen bot auch die Grundlage zu meinen Untersuchungen. Es ist dies freilich aus meiner kurzgefaßten Darstellung kaum ersichtlich.

wo in  $G_{n-1}$  nur die Elemente von  $M_{n-1n}$  vorkommen und  $F_n$  eine homogene lineare Funktion derjenigen Determinanten von  $M_{nn}$  ist, die  $y_{nn}$  wirklich enthalten.

Setzen wir jetzt voraus, es sei  $F$  auf die Gestalt

$$F = G_r + \sum_{k=r+1}^n F_k$$

gebracht, wo  $F_k$  eine homogene lineare Funktion der Determinanten von  $M_{kn}$  bedeutet, in denen wenigstens eine der Größen

$$y_{kk}, y_{kk+1}, \dots, y_{kn}$$

vorkommt, hingegen  $G_r$  nur mehr die Elemente von  $M_{rn}$  enthält. Dann können wir  $F$  in folgender Weise auf die Gestalt

$$F = G_{r-1} + \sum_{k=r}^n F_k$$

bringen.

Da  $F, F_{r+1}, \dots, F_n$  sämtlich Lösungen von  $(S_n)$  sind, gilt dasselbe auch von  $G_r$ . Wird aber auf  $G_r$  die Gleichung von  $(S_n)$  angewandt, in der  $i = k = r$  und  $\mu = \nu = n$ , so ergibt sich

$$4 \frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rr} \partial y_{nn}} + 2 \frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rn}^2} = 2 \frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rn}^2} = 0,$$

also ist  $G_r$  in  $y_{rn}$  linear. In der Formel

$$G_r = [G_r]_{y_{rn}=0} + \frac{\partial G_r}{\partial y_{rn}} y_{rn}$$

enthält  $\frac{\partial G_r}{\partial y_{rn}}$  nur die Elemente von  $M_{r-1, n-1}$ ; denn wenn man in  $(S_n)$  die Lösung  $G_r$  einsetzt, so erhält man für  $i = k = r \leq \mu < \nu = n$

$$4 \frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{rr} \partial y_{nn}} + 2(1 + \delta_{r\mu}) \frac{\partial^2 G_r}{\partial y_{r\mu} \partial y_{rn}} = 2(1 + \delta_{r\mu}) \frac{\partial}{\partial y_{r\mu}} \left( \frac{\partial G_r}{\partial y_{rn}} \right) = 0.$$

Außerdem genügt  $\frac{\partial G_r}{\partial y_{rn}}$  dem Teilsysteme  $(S_{n-1})$ , ist also eine lineare Funktion der Determinanten von  $M_{r-1, n-1}$ . Das Produkt einer solchen Determinante mit  $y_{rn}$  ist gleich der Summe einer gewissen Determinante von  $M_{rn}$  und einer Funktion, die nur die Elemente von  $M_{r-1n}$  enthält. Es ist folglich

$$G_r = A + F_r^{(1)},$$

wo  $F_r^{(1)}$  eine homogene lineare Funktion der Determinanten von  $M_{rn}$  bedeutet, die  $y_{rn}$  wirklich enthalten; und  $A$  eine solche Lösung von  $(S_n)$  ist, in der außer den Elementen von  $M_{rn-1}$  nur

$$y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{r-1n}$$

vorkommen.



Endlich können die obigen Überlegungen ohne wesentliche Änderungen auch für  $r = 1$  angewandt werden, und sie ergeben dann

$$G_1 = F_0 + F_1,$$

wo  $F_0$  eine Konstante und  $F_1$  eine homogene lineare Funktion von

$$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$$

ist. Wir haben also

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_r + \dots + F_n.$$

Enthält  $F$  nur die Elemente von  $M_{rn}$ , so ist bei diesem Verfahren

$$F_{r+1} = F_{r+2} = \dots = F_{rn} = 0.$$

Damit sind beide Sätze für  $(S_n)$  bewiesen.

Semmering, den 20. Juli 1903.

---