# Über Irrationalität gewisser unendlicher Reihen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

In einer vorhergehenden Arbeit von Herrn Bernstein und mir*) wurde mit Hilfe der auf Eisenstein zurückgehenden Kettenbruchentwicklung**):

$$(1)\qquad \sum_0^\infty {}^\lambda q^{\lambda^2} x^\lambda = 1 + \frac{qx|}{|1} - \frac{q^3x|}{|1} + \frac{q^3(1-q^2)x|}{|1} - \frac{q^7x|}{|1} + \frac{q^5(1-q^4)x|}{|1} - + \cdots$$

bewiesen, daß die Reihe $\sum_0^\infty {}^\lambda \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda^2} x^\lambda$ einen irrationalen Wert hat, wenn $r$, $s$ und $x$ *reelle* Zahlen sind, die den Bedingungen genügen:

$$(2)\qquad \begin{cases} x \neq 0 \text{ und rational,} \\ |s| > |r|^3 \text{ und } r, s \text{ ganze Zahlen.} \end{cases}$$

Im folgenden wird dieser Satz auf einfacherem Wege bewiesen und zugleich sein Gültigkeitsbereich erweitert: unter Beibehaltung der Bedingungen (2) dürfen $x$, $r$ und $s$ auch *komplexe* Zahlen sein.***)

Ich benutze nicht den unendlichen Kettenbruch (1), sondern ziehe die ihm zugrunde liegende Funktionenfolge heran:

---

*) Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu q^{\nu^2} x^\nu$, Math. Ann. 76 (1915), S. 295—300. Daselbst auch weiterer Literaturnachweis.

**) Vgl. Oskar Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 315, 333 und 353.

***) Eine komplexe ganze Zahl ist von der Form: $a + bi$, wo $a$ und $b$ reelle ganze Zahlen sind; eine komplexe rationale Zahl ist der Quotient zweier ganzer Zahlen. Hier sei erwähnt, daß Herr O. Perron den bekannten Legendreschen Irrationalitätssatz auf Kettenbrüche ausdehnte, deren Elemente ganze Zahlen eines imaginären quadratischen Körpers sind. Man vgl. seine Arbeit: Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen, Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 37 (1907), S. 401—482, insb. S. 453.

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_{2\nu}(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} {}^{\lambda}\, q^{\lambda(2\nu+\lambda)} \dfrac{(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu+2})\cdots(1-q^{2\nu+2\lambda-2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2\lambda})} x^{\lambda}, \\ \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} {}^{\lambda}\, q^{\lambda(2\nu+\lambda)} \dfrac{(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu+2})\cdots(1-q^{2\nu+2\lambda})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2\lambda})} x^{\lambda}, \\ \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

Man bestätigt leicht die Formeln:

$$\mathfrak{Q}_0(x) = 1, \quad \mathfrak{Q}_1(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\lambda}\, q^{\lambda^2} x^{\lambda},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{2\nu}(x) &= \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) - q^{4\nu+1} x\, \mathfrak{Q}_{2\nu+2}(x), \\ \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) &= \mathfrak{Q}_{2\nu+2}(x) + q^{2\nu+1}(1-q^{2\nu+2}) x\, \mathfrak{Q}_{2\nu+3}(x), \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

setzt man hierin

$$q = \frac{r}{s}, \quad x = \frac{m}{n},$$

$$\mathfrak{Q}_{2\nu}(x) = s^{(2\nu-1)\nu} n^{\nu} Q_{2\nu}(x), \quad \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) = s^{(2\nu+1)\nu} n^{\nu} Q_{2\nu+1}(x),$$

so erhält man die Rekursionsformeln:

$$(4)\quad \begin{cases} Q_{2\nu}\left(\dfrac{m}{n}\right) = s^{2\nu} Q_{2\nu+1}\left(\dfrac{m}{n}\right) - r^{4\nu+1} m\, Q_{2\nu+2}\left(\dfrac{m}{n}\right), \\ Q_{2\nu+1}\left(\dfrac{m}{n}\right) = s^{2\nu+1} n\, Q_{2\nu+2}\left(\dfrac{m}{n}\right) + r^{2\nu+1}(s^{2\nu+2} - r^{2\nu+2})\, m\, Q_{2\nu+3}\left(\dfrac{m}{n}\right), \\ \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \end{cases}$$

deren Koeffizienten nunmehr komplexe *ganze* Zahlen sind.

Man beweist auch leicht, daß bei festem $x$ und $q$ ($|q| < 1$)

$$(5)\qquad \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{Q}_{\nu}(x) = 1$$

ist; in der Tat folgt aus (3) unmittelbar:

$$|\mathfrak{Q}_{\nu}(x) - 1| \leqq |q|^{2\nu} \left( \prod_{1}^{\infty} {}^{\lambda}\, \frac{1+|q|^{2\lambda}}{1-|q|^{2\lambda}} \right) \sum_{1}^{\infty} {}^{\lambda}\, |q|^{\lambda^2} |x|^{\lambda},$$

und der rechtsseitige Ausdruck strebt offenbar mit wachsendem $\nu$ gegen Null.

Hieraus folgt auch, daß es bei festem $x$ und $q$ eine Zahl $N = N(x, q)$ gibt, derart, daß

$$\mathfrak{Q}_{\nu} \neq 0 \quad \text{ist für} \quad \nu \geqq 2N,$$

oder auch

$$Q_{\nu}(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2N.$$

Sei nun zur Abkürzung:

$$\frac{Q_\nu(x)}{Q_{\nu+1}(x)} = P_\nu(x) \qquad (\nu = 2N-1, 2N, \cdots);$$

ich beweise zunächst, daß $P_{2N}\left(\frac{m}{n}\right)$ irrational ist.

Aus (4) folgt $\left(\text{ich schreibe kurz } P_\varkappa \text{ statt } P_\varkappa\left(\frac{m}{n}\right)\right)$:

$$(6) \qquad \begin{cases} P_{2\nu+1}(P_{2\nu} - s^{2\nu}) = -r^{4\nu+1}m, \\ P_{2\nu+2}(P_{2\nu+1} - s^{2\nu+1}n) = r^{2\nu+1}(s^{2\nu+2} - r^{2\nu+2})m, \\ (\nu = N, N+1, \cdots); \end{cases}$$

hieraus läßt sich $P_\nu$ als rationale Funktion von $P_{2N}$ ausdrücken. Man erhält:

$$(7) \qquad \begin{cases} P_{2\nu-1}(B_{2\nu-1}P_{2N} - A_{2\nu-1}) = r^{4\nu-3}m(B_{2\nu-2}P_{2N} - A_{2\nu-2}), \\ P_{2\nu}(B_{2\nu}P_{2N} - A_{2\nu}) = -r^{2\nu-1}(s^{2\nu} - r^{2\nu})m(B_{2\nu-1}P_{2N} - A_{2\nu-1}), \\ (\nu = N+1, N+2, \cdots), \end{cases}$$

wobei

$$B_{2N} = 0, \quad B_{2N+1} = 1, \quad A_{2N} = -1, \quad A_{2N+1} = s^{2N},$$

$$\left.\begin{aligned} B_{2\nu+1} &= s^{2\nu}B_{2\nu} + r^{2\nu-1}(s^{2\nu} - r^{2\nu})mB_{2\nu-1}, \\ A_{2\nu+1} &= s^{2\nu}A_{2\nu} + r^{2\nu-1}(s^{2\nu} - r^{2\nu})mA_{2\nu-1}, \end{aligned}\right\} (\nu = N+1, N+2, \cdots)$$

$$\left.\begin{aligned} B_{2\nu+2} &= s^{2\nu+1}nB_{2\nu+1} - r^{4\nu+1}mB_{2\nu}, \\ A_{2\nu+2} &= s^{2\nu+1}nA_{2\nu+1} - r^{4\nu+1}mA_{2\nu}, \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = N, N+1, \cdots)$$

ist, wie man mit vollständiger Induktion leicht bestätigt. Für das folgende ist nur von Wichtigkeit, daß die $B_\nu$, $A_\nu$ *ganze* (komplexe) Zahlen sind; ferner ist

$$B_\nu P_{2N} - A_\nu \neq 0 \quad \text{für} \quad \nu = 2N, 2N+1, \cdots,$$

denn für $\nu = 2N$ ist dies offenbar richtig und seine allgemeine Gültigkeit folgt dann durch vollständige Induktion aus (7). Hieraus ergibt sich auch:

$$(8) \quad P_{2\nu-1}P_{2\nu}(B_{2\nu}P_{2N} - A_{2\nu}) = -r^{6\nu-4}(s^{2\nu} - r^{2\nu})m^2(B_{2\nu-2}P_{2N} - A_{2\nu-2})$$
$$(\nu = N+1, N+2, \cdots);$$

ferner ist nach Definition:

$$(9) \qquad P_{2\nu-1}P_{2\nu} = \frac{Q_{2\nu-1}}{Q_{2\nu+1}} = s^{4\nu-1}n\frac{\mathfrak{Q}_{2\nu-1}}{\mathfrak{Q}_{2\nu+1}},$$

und

$$\left|\frac{s^{4\nu-1}n}{r^{6\nu-4}(s^{2\nu} - r^{2\nu})m^2}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{s^{2\nu-1}}{r^{6\nu-4}m^2}\right| \geq \frac{1}{2|m|^2}\left(\frac{|s|}{|r|^3}\right)^{2\nu-1}.$$

Falls $|s| > |r|^3$ ist, wächst also dieser Quotient über alle Schranken; mit Berücksichtigung von (5), (8) und (9) folgt hieraus, daß die unendlich vielen von Null verschiedenen positiven Zahlen:

$$|B_{2\nu} P_{2N} - A_{2\nu}| \qquad (\nu = N, N+1, \cdots) \tag{10}$$

unter jede Schranke sinken, daher ist $P_{2N}$ irrational.

Aus (4) folgt nun aber sukzessive, daß auch die Zahlen

$$Q_{2N-1}, \; Q_{2N-2}, \; \cdots, \; Q_1$$

von Null verschieden sind und die $P_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sämtlich irrational sind.

Der Fall $|s| = |r|^3$ konnte im reellen Gebiet leicht auf den Fall $|s| > |r|^3$ zurückgeführt werden; hier würde er eine gesonderte Behandlung erheischen.

Aus (8) ist leicht ersichtlich, daß für $|s| < |r|^3$ die Größen (10) von einem gewissen an monoton unbegrenzt wachsen. Dasselbe gilt auch für die entsprechenden Ausdrücke mit ungeraden Indizes, so daß für diesen Fall der hier eingeschlagene Weg zu keinem Resultat führt.

Ist schließlich $\xi$ eine Nullstelle von $\mathfrak{Q}_\nu(x)$, so ist $P_\nu(x) = 0$, also rational, daher muß auch $\xi$ irrational sein; die Nullstellen sind in unendlicher Anzahl vorhanden, denn $\mathfrak{Q}_\nu(x)$ ist offenbar (für $|q| < 1$ und jedes $\nu$) eine ganze transzendente Funktion nullter Ordnung.

Zusammenfassend gilt also der Satz:

*Ist $x$ eine von Null verschiedene reelle oder komplexe rationale Zahl und $r$, $s$ reelle oder komplexe ganze Zahlen, die der Bedingung*

$$|s| > |r|^3$$

*genügen, sa hat die Reihe $\sum_0^\infty{}_\lambda \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda^2} x^\lambda$ einen irrationalen Wert. Unter der gleichen Bedingung sind $\left(q = \frac{r}{s} \text{ gesetzt}\right)$ die Nullstellen der Funktionen* (3) *sämtlich irrational.*

---

Auf ähnlichem Wege läßt sich zeigen, daß unter denselben Bedingungen auch die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} x^\nu$ einen irrationalen Wert hat und ihre Nullstellen sämtlich irrational sind. Auch die Irrationalität von $e^x$ für alle komplexen rationalen Werte des Argumentes kann auf diesem Wege von neuem bewiesen werden, indem man den Beweis der Irrationalität für reelle rationale $x$ der Arbeit von F. Bernstein und O. Szász in entsprechender Weise verallgemeinert. Der Grundgedanke aller dieser Überlegungen ist der, eine absolut abnehmende Folge von Linearformen $B_\nu\zeta - A_\nu$ zu konstruieren, wo $\zeta$ die Irrationalität ist und $B_\nu$, $A_\nu$ ganzzahlig sind. Dieser Gedanke findet sich zuerst bei Lambert, der die bekannte Kettenbruchentwicklung von $\operatorname{tg} x$ und die Irrationalität von $\operatorname{tg} x$ und $e^x$ für rationale $x$ streng bewies.*)

Göttingen, den 21. Juli 1914.

---

*) J. H. Lambert, Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques, Histoire de l'Académie de Berlin 1761 (publ. 1768), S. 265—322. Vgl. hierzu Alfred Pringsheim, Über die ersten Beweise der Irrationalität von $e$ und $\pi$, Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 28 (1898), S. 325—337.