Sur les formes quadratiques à indéterminées conjuguées.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein).

Par

EMILE PICARD à Paris.

Le très intéressant article que M. Bianchi vient de publier dans les Mathematische Annalen me remet en mémoire le point de vue auquel je me suis placé autrefois dans l'étude des transformations employées par M. Poincaré pour les points de l'espace situés du même côté d'un plan. Dans un petit travail inséré au bulletin de la Société Mathématique (*Mars*, 1884) et intitulé: *Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan*, j'ai considéré la forme quadratique à indéterminées conjuguées X, Y, X_0, Y_0

$$XX_0 + xXY_0 + x_0 X_0 Y + (xx_0 + y^2) YY_0 \tag{1}$$

x représentant une quantité complexe arbitraire, et y une quantité réelle positive.

Effectuons sur cette forme la substitution

$$(X, Y, dX + bY, cX + aY) \qquad [ad - bc = 1]$$

où a, b, c, d sont des quantités complexes. Cette substitution transforme la forme (1) en la suivante

$$A' XX_0 + B' XY_0 + B_0' X_0 Y + C' YY_0$$

en posant

$$\begin{aligned}
A' &= cc_0\,(xx_0 + y^2) + dc_0 x + d_0 c x_0 + dd_0,\\
B' &= ca_0\,(xx_0 + y^2) + a_0 d x + c b_0 x_0 + d b_0,\\
C' &= aa_0 (xx_0 + y^2) + b a_0 x + b_0 a x_0 + b b_0.
\end{aligned}$$

On est ainsi conduit à une transformation relative à la variable complexe x et à la somme $xx_0 + y^2$, substitution qui peut s'écrire

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \quad x' = \dfrac{ca_0(xx_0+y^2) + a_0 dx + cb_0 x_0 + db_0}{cc_0\,(xx_0+y^2) + dc_0 x + d_0 c x_0 + dd_0}, \\[2ex] x' x_0' + y^2 = \dfrac{aa_0(xx_0+y^2) + ba_0 x + b_0 a x_0 + bb_0}{cc_0\,(xx_0+y^2) + dc_0 x + d_0 c x_0 + dd_0}. \end{cases}$$

A un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y correspond par ces formules un système parfaitement déterminé de x' et y' (y' étant positive comme y). Ce mode de transformation forme d'ailleurs évidemment un groupe.

On peut donner une forme, géométrique à ce résultat. Soient $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ un système d'axes de coordonnées rectangulaires et considérons le demi-espace situé au dessus du plan des $\xi\eta$; à chaque point (ξ, η, ζ) correspond un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y, si l'on pose

$$x = \xi + i\eta, \quad y = \zeta$$

On est ainsi conduit, par des considérations algébriques, au mode de transformation des figures dans un demi espace, dont M. Poincaré a fait usage dans son mémoire sur les groupes kleinéens et auquel il a été amené par des considérations géométriques.

J'ai considéré particulièrement, dans le travail cité, le cas où a, b, c, d sont des entiers complexes. Les substitutions (S) forment alors un groupe discontinu. Pour trouver son *polyèdre fondamental*, il suffit de faire usage du théorème de M. Hermite relatif à la réduction des formes quadratiques binaires *définies* à indéterminées conjuguées. Etant donnée une telle forme

$$AXX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0$$
$$(BB_0 - AC < 0, A > 0, C > 0)$$

dont les coefficients sont quelconques, on peut trouver une substitution, de déterminant *un*, à coefficients entiers complexes, telle que dans la forme transformée

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B_0'X_0Y + C'YY_0$$

on ait

$$A' \leq C', \quad -A' \leq 2m' \leq A', \quad -A' \leq 2n' \leq A'$$

en posant

$$B' = m' + n'i.$$

Cette Substitution sera, en général, unique.

Ceci rappelé, soit (x, y) un système de valeurs correspondant à un point arbitraire du demi espace, et prenons la forme (1) correspondante. La réduction de cette forme d'après le théorème précédent, transformera (x, y) en (x', y') par la substitution (S); la partie réelle et le coefficient de i dans x' seront compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ et l'on aura en outre

$$x'x_0' + y'^2 \geq 1.$$

Si l'on revient au point (ξ, η, ζ) et à son transformé (ξ', η', ζ'), on aura

$$-\tfrac{1}{2} \leq \xi' \leq \tfrac{1}{2}, \qquad -\tfrac{1}{2} \leq \eta' \leq \tfrac{1}{2}, \qquad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \geq 1.$$

Nous arrivons donc ainsi au *polyèdre fondamental* du groupe. Il est limité par les quatre plans

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2},$$

et est extérieur à la sphère de rayon *un*. Il y a dans ce polyèdre *un seul point* correspondant à un point pris arbitrairement dans le demi espace. Ce résultat est bien d'accord avec le théorème démontré par l'éminent géomètre italien. Ce polyèdre fondamental est entièrement analogue au triangle fondamental dans le demi plan, qui joue un rôle si important dans vos admirables recherches sur les fonctions modulaires.

Paris, le 15. Mai 1891.