als das bei dem ersten Versuche, unterschied sich aber, in ein Glas gegossen, nicht sehr von jenem. Der Rückstand von einem Kubickfufs wog 35 Gran oder $\frac{1}{12300}$.

Der Verfasser berechnet nun approximativ wie viel erdige Masse innerhalb 24 Stunden von dem Rhein fortgeführt werde. Er nimmt an, die mittlere jährliche Breite des Rheins zu Bonn betrage 1200 engl. Fufs, die mittlere Tiefe 15 engl. Fufs, die mittlere Geschwindigkeit $2\frac{1}{2}$ engl. Meilen in der Stunde, und die in Schwebung erhaltene feste Substanz durchschnittlich 28 Gran auf einen engl. Kubikfufs. Aus diesen Datis folgert er, dafs in jeden 24 Stunden 145,981 engl. Kubikfufs fester Substanzen vor Bonn vorbeigeführt werden.

XX. *Ueber die Figur des Gleichgewichts; von Prof. Dr. C. G. J. Jacobi.*

Die Frage nach der Figur der Erde hat die Untersuchung veranlafst, welche Figur eine flüssige homogene Masse, deren Theilchen zu einander nach dem Newton'schen Gesetz gravitiren, und welche sich um eine feste Axe gleichförmig dreht, annehmen müsse, um im Gleichgewicht zu bleiben. Man nennt solche Figur wohl schlechthin eine Figur des Gleichgewichts. Man fand bald, sie könne eine Fläche der zweiten Ordnung seyn, und zwar solche, die durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht, ein rundes, plattes Ellipsoid. Diefs haben schon Clairaut und Maclaurin bewiesen. Die Ellipse, die man fand, war immer sehr wenig excentrisch oder das Ellipsoid kam der Sphäre sehr nahe. Aber d'Alembert machte die wichtige Bemerkung, dafs die transcendente Gleichung, von der die Excentricität der Ellipse abhängt, immer noch eine Lösung hat, die in der Regel eine grofse Excentricität oder ein sehr plattes Sphäroid giebt; und la Place zeigte, wie d'Alembert vermuthet hatte, diefs seyen die einzigen Lösungen. Es wird übrigens hierbei vorausgesetzt, dafs die Rotationsgeschwindigkeit eine gewisse Gränze nicht überschreite; in dieser Gränze fallen beide Lösungen zusammen. Ueberschritte die Rotationsgeschwindigkeit diese Gränze, so würde man auf imaginäre Gröfsen kommen.

Die erste dieser Lösungen, die das wenig abgeplattete Umdrehungsellipsoid giebt, hat durch Legendre's bewundernswürdige Arbeiten über die Figur der Erde eine gröfsere Bedeutung erlangt. Dieser Mann, dessen Ruhm mit den Fortschritten der Mathematik zunimmt, hatte durch Einführung jener merkwürdigen Ausdrücke, durch welche wir heut in den Anwendungen die Functionen zweier Variabeln darstellen, die allgemeinsten Untersuchungen über diesen Gegenstand möglich gemacht. Er zeigte, dafs unter allen Figuren, die nicht zu sehr von der sphärischen Gestalt abweichen, so dafs es möglich ist, die Anziehung, welche auf einen Punkt der Oberfläche ausgeübt wird, nach den Potenzen dieser Abweichung zu entwickeln, das wenig abgeplattete Umdrehungsellipsoid, wie es Clairaut und Maclaurin bestimmt hatten, die einzig mögliche Figur des Gleichgewichts sey, und zwar nicht in irgend einer Annäherung, sondern in absoluter, geometrischer Strenge. Wenn man bedenkt, dafs man hier aus Relationen zwischen dreifachen Integralen, deren Gränzen unbekannt sind und welche Constanten enthalten, zwischen denen eine unbekannte Relation stattfindet, die Gleichung zwischen den drei Variabeln zu suchen hat, welche die Gränzen giebt und zugleich die unbekannte Relation zwischen den Constanten bestimmt, so staunt man über die Kühnheit und das Glück dieses Unternehmens. Es ist zu bedauern, dafs der Autor der *Mécanique céleste* es nicht für zweckmäfsig fand, das merkwürdige Theorem in sein weitschichtiges Werk aufzunehmen.

Wie wesentlich die Bedingung ist, dafs die Anziehung nach den Potenzen der Abweichung von der Kugelgestalt würden entwickelt werden können, oder wenigstens entwickelt gedacht werden, erhellt daraus, dafs die Legendre'sche Analysis das zweite sehr platte, von d'Alembert zuerst bemerkte Umdrehungsellipsoid nicht giebt. Aber man ist in einem sehr groben Irrthum gewesen, wenn man geglaubt hat, diese beiden Umdrehungsellipsoide seyen, wenigstens unter Flächen zweiter Ordnung, die einzigen Figuren des Gleichgewichts. In der That zeigt eine leichte Aufmerksamkeit, dafs *Ellipsoide mit drei ungleichen Axen eben so gut Figuren des Gleichgewichts seyn können; dafs man zum Aequator eine ganz beliebige Ellipse annehmen kann, und dann immer die dritte Hauptaxe, die Umdrehungsaxe, welche auch hier die kleinste der drei Axen ist, und die Rotationsgeschwindigkeit so bestimmen kann, dafs das Ellipsoid eine Figur des Gleichgewichts wird.*

Nennt man m, n die halben Hauptachsen des Aequators, p die halbe Umdrehungsaxe, so hat man, wenn man der Kürze halber

$$\nabla = \sqrt{\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\left(1+\frac{x}{pp}\right)}$$

setzt, folgende transcendente Relation zwischen den drei Hauptaxen,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\nabla} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{pp}\right)\nabla},$$

welche alle ungleichaxigen Ellipsoide umfafst, die Figuren des Gleichgewichts seyn können. Die zu jedem dieser Ellipsoide zugehörige Rotationsgeschwindigkeit v bestimmt sich durch die Gleichung:

$$v^2 = 2\pi \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+mm)(x+nn)\nabla}.$$

Nimmt man m und n beliebig an, so giebt die erste

Gleichung immer einen reellen Werth für p, welcher immer von der Art ist, dafs:

$$\frac{1}{pp} > \frac{1}{mm} + \frac{1}{nn}.$$

Man sieht hieraus, dafs ein ungleichaxiges Ellipsoid, wenn es Figur des Gleichgewichts seyn soll, immer sehr von der Kugelform abweicht, was mit dem Legendre'schen Theorem übereinstimmt, welches lehrt, dafs, wenn es aufser dem wenig abgeplatteten Umdrehungsellipsoid noch Figuren des Gleichgewichts giebt, diese sehr von der Kugelform abweichen müssen.

Da zum Aequator eine beliebige Ellipse angenommen werden kann, so kann man nach dem Fall fragen, wo für diese Ellipse ein Kreis angenommen würde. Für diesen Fall findet man jene oben erwähnte Gränze der Rotationsgeschwindigkeit, und unsere Figur des Gleichgewichts fällt mit den beiden bekannten zusammen.

Die beiden aufgestellten Formeln leiten sich ohne weitere Rechnung aus den bekannten ab, daher es hinreicht, sie hin zu schreiben. Unter den beiden Gleichungen, welche das Gleichgewicht erfordert, hat die eine, welche die nöthige Relation zwischen den drei Hauptaxen ausdrückt, die Form:

$$\varphi(m, n, p) = \varphi(n, m, p),$$

die, wie man augenblicklich sieht, erfüllt wird, wenn man $m = n$ setzt. Indem man nun in der zweiten Gleichung, welche die Rotationsgeschwindigkeit giebt, $m = n$ setzte, erhielt man die bekannten Umdrehungsellipsoide. Aber nachdem diese längst auf das genauste erörtert sind, durfte man fragen, ob denn jene Gleichung nothwendig erfordere, dafs $m = n$ gesetzt werde; ob nicht auch der Gleichung:

$$\frac{\varphi(m, n, p) - \varphi(n, m, p)}{m - n} = 0$$

durch reelle Werthe von m und n Genüge geschehen könne. Diese ist aber keine andere als die erste der angegebenen Gleichungen, welche in der That eine Klasse reeller ungleichaxiger Ellipsoide giebt, welche Figuren des Gleichgewichts seyn können.

Ich will noch eines anderen merkwürdigen Umstandes bei der Attraction der Ellipsoide erwähnen. Die ersten Analysten, die sich mit der Attraction homogener Ellipsoide beschäftigten, suchten diese endlich zu finden, natürlich vergeblich, da sie von elliptischen Integralen abhängt. Laplace erzählt bei dieser Gelegenheit, er habe sich einen Beweis gemacht, daſs diese Integrale sich nicht endlich, d. h. durch Kreisbogen und Logarithmen ausdrücken lassen, was interessant genug ist. Wenn man das Ellipsoid nicht homogen annimmt, sondern nur aus homogenen, concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Schichten bestehen läſst, deren Dichtigkeit sich von einer Schicht zur andern ändert, so daſs etwa, wie man öfters angenommen, die Dichtigkeit der auf demselben Durchmesser befindlichen Elemente der Entfernung vom Mittelpunkt umgekehrt proportional ist, oder durch irgend sonst eine rationale ungerade Function dieser Entfernung ausgedrückt wird, so läſst sich in der That die Anziehung, welche das Ellipsoid auf irgend einen äuſseren oder inneren Punkt ausübt, endlich d. h. durch Kreisbogen und Logarithmen ausdrücken.

Potsdam, den 4. October 1831.

XXI. *Ueber die Linien im prismatischen Spectrum.*

Bereits zu zweien Malen war in diesen Annalen (Bd. XXXII S. 128, Bd. XXVIII S. 385 und 386) von der merkwürdigen Entdeckung Brewster's über die Linien im Spectro des durch ein farbiges Gas gegangenen Lichtes die Rede. Gegenwärtig können wir noch folgendes Detail mittheilen.