

5. *Ein Beitrag*  
*zur Theorie der Gitterinversion;*  
*von Clemens Schaefer und Fritz Reiche.*

---

Im Jahre 1888 fand Heinrich Hertz, daß ein Gitter, das aus zylindrischen Metallstäben besteht, eine auffallende elektrische Welle in verschiedener Weise beeinflußt, je nachdem die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}$  der einfallenden Welle den Stäben parallel oder senkrecht zu ihnen gerichtet war. Bezeichnet man das „Durchlässigkeitsvermögen“ des Gitters, d. h. den Quotienten  $\frac{\text{durchgelassene Energie}}{\text{einfallende Energie}}$  mit  $D$ , so ist

$$D_{\parallel} = 0 \text{ (wenn } \mathfrak{E} \text{ den Stäben parallel ist),}$$

$$D_{\perp} = 1 \text{ (wenn } \mathfrak{E} \text{ auf den Stäben senkrecht steht).}$$

Sind diese beiden Idealfälle auch nicht immer streng erfüllt, so ist doch jedenfalls bei den genannten Versuchen stets der Quotient

$$q = \frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} < 1.$$

Wir wollen diesen Effekt den *Hertzeffekt* nennen.

Im Gegensatz hierzu stehen die Ergebnisse, die du Bois zum Teil allein, zum Teil mit Rubens in seinen Arbeiten über die metallische Gitterpolarisation fand. Du Bois<sup>1)</sup> untersuchte den Einfluß metallischer Gitter auf Wellen von verschiedener Polarisationsrichtung im Gebiete der sichtbaren Strahlung und gelangte zu dem merkwürdigen Resultat, daß im Gebiete dieser Wellenlängen der Quotient

$$q = \frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} > 1,$$

daß also im Gebiete der kleinen Wellen die Durchlässigkeit

---

1) H. du Bois, Wied. Ann. 46. p. 542. 1892; 48. p. 546. 1893.

des Gitters größer ist, wenn  $\mathcal{E}$  den Stäben parallel gerichtet ist. Dieses dem Hertzeffekt entgegengesetzte Phänomen wollen wir kurz den *Duboisefekt* nennen. Es ergab sich ferner aus den Untersuchungen von du Bois und Rubens<sup>1)</sup>, daß der *Duboisefekt sich allmählich in den Hertzeffekt umwandelt, wenn man zu immer größeren Wellenlängen übergeht.*

Der Punkt, an dem der Übergang des Duboisefektes in den Hertzeffekt stattfindet, an dem  $q$  also den Wert 1 besitzt, heißt der *Inversionspunkt*. Du Bois und Rubens fanden die Lage des Inversionspunktes nur von dem *Material des Gitters* abhängig, *dagegen innerhalb der Grenzen ihrer Untersuchung wesentlich unabhängig vom Radius der zylindrischen Gitterstäbe.*

Im Widerspruch zu diesem Ergebnisse schienen die Resultate F. Brauns<sup>2)</sup> zu stehen. Braun benutzte Gitter, die er durch Zerstäubung von Metalldrähten auf Glasplatten gewann, und deren Struktur so fein war, daß sie der Auflösungskraft der besten Mikroskope widerstand. *Er fand bei diesen feinen Gittern im Gebiete der sichtbaren Strahlung deutliche Polarisationswirkung* und schloß, *obwohl die Orientierung der Gitterstäbe nicht zu erkennen war, aus der Lage des zerstäubten Drahtes auf den Hertzeffekt.* Nach du Bois-Rubens, die ja die Lage des Inversionspunktes als unabhängig von  $\varrho$  (dem Radius der Gitterstäbe) feststellten, hätte man dagegen auch bei den Braunschen Gittern im ganzen Gebiete der sichtbaren Strahlung den Duboisefekt erwarten müssen.

Wir wollen im folgenden zuerst zeigen, daß die Theorie den Schluß Brauns bestätigt, wenn man die zweifellos berechnete Annahme macht, daß bei den von ihm benutzten Gittern das Verhältnis  $\varrho/\lambda$ , d. h.

$$\frac{\text{Radius der Gitterstäbe}}{\text{Wellenlänge des einfallenden Lichtes}}$$

eine sehr kleine Größe war.

Sodann wollen wir auch über den Duboisefekt und den Inversionspunkt einige zusammenfassende Betrachtungen machen.

1) H. du Bois u. H. Rubens, Wied. Ann. 49. p. 593. 1893.

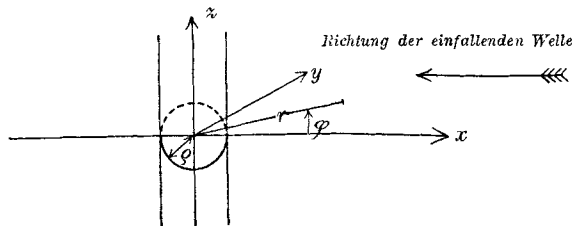
2) F. Braun, Ann. d. Phys. 16. p. 1. 1905.

## § 1. Der Hertzeffekt im Gebiete der sichtbaren Wellen.

(Versuche von F. Braun.)

Wir setzen im folgenden voraus, daß  $\varrho/\lambda$  klein sei. Machen wir ferner, zur Vereinfachung, die Hypothese, daß der Abstand der einzelnen Gitterstäbe voneinander so groß ist, daß eine merkliche gegenseitige Beeinflussung nicht stattfindet, so können wir, bis auf einen konstanten Faktor, die Wirkung des ganzen Gitters durch die Wirkung eines einzigen Gitterstabes ersetzen. Wir sind damit auf das folgende bekannte Beugungsproblem<sup>1)</sup> zurückgeführt: Eine ebene Welle fällt auf einen gegen die Wellenlänge dünnen, metallischen Zylinder von endlicher Leitfähigkeit. Es handelt sich darum, die Intensität hinter dem Zylinder in großer Entfernung zu berechnen, wenn 1. die elektrische Kraft der einfallenden Welle der Zylinderachse parallel ist, 2. die elektrische Kraft der einfallenden Welle senkrecht zur Zylinderachse steht.

Wir wählen die Zylinderachse zur  $z$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und führen in der  $xy$ -Ebene Polarkoordinaten ein.



Die durch den gefiederten Pfeil angedeutete Richtung der negativen  $x$ -Achse sei die Richtung der einfallenden ebenen Welle. Wir betrachten nur zeitlich rein periodische Vorgänge von der Schwingungszahl  $n = 2\pi/T$ .

1. *Es in der einfallenden Welle parallel der  $z$ -Achse.*

Es ist dann im ganzen Außenraum des Zylinders die Lösung des obigen Beugungsproblems gegeben durch:

$$(1) \quad \mathfrak{E}_z = e^{i n t} \left[ \sum_m^{0, \infty} a_m Q_m(p_1) \cos m \varphi + e^{i p_1 \cos \varphi} \right].$$

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905; W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. p. 764. 1905; 19. p. 54. 1906.

Dabei ist

$$(2) \quad p_1 = k_1 r = \frac{2\pi}{\lambda} r;$$

$$(3) \quad Q_m = K_m - \frac{i\pi}{2} J_m$$

ist bis auf einen konstanten Faktor die sogenannte zweite Hankelsche Zylinderfunktion  $m^{\text{ter}}$  Ordnung,  $J_m$  und  $K_m$  sind die erste und zweite Besselsche Funktion  $m^{\text{ter}}$  Ordnung, und durch folgende Reihen definiert:

$$(4) \quad J_m(x) = \frac{x^m}{2 \cdot 4 \dots 2m} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(m+2)(m+4)} - \dots \right\}.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} K_m(x) &= J_m(x) \log \frac{2}{\gamma x} + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) J_m(x) \\ &+ \frac{m!}{2} \sum_s^{0, m-1} \frac{1}{m-s} \left( \frac{2}{x} \right)^{m-s} \frac{J_s(x)}{s!} \\ &+ \sum_1^{0, \infty} (-1)^s \frac{m+2s}{s(m+s)} J_{m+2s}(x). \end{aligned} \right.$$

Dabei ist  $\log \gamma = 0,5772$  die sogenannte Mascheronische Konstante. Alle drei Funktionen  $J_m$ ,  $K_m$ ,  $Q_m$  sind Lösungen der Besselschen Differentialgleichung:

$$(6) \quad \frac{d^2 Q_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Q_m}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) Q_m = 0.$$

Die im Ausdruck von  $\mathfrak{E}_z$  auftretenden Koeffizienten  $a_m$  bestimmen sich aus den Grenzbedingungen an der Zylinderoberfläche und sind allgemein gegeben durch:

$$(7) \quad a_m = 2im \frac{J_m(\pi_1) \frac{J'_m(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2} J'_m(\pi_1)}{\frac{k_1}{k_2} Q'_m(\pi_1) - \frac{J'_m(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} Q_m(\pi_1)}.$$

Dabei ist

$$(8) \quad k_2 = \frac{2\pi \sqrt{\varepsilon}}{\lambda},$$

wo

$$(9) \quad \varepsilon = (\nu - i\kappa)^2$$

die hier komplexe Dielektrizitätskonstante,  $\nu$  den Brechungs-

exponenten,  $\kappa$  den Extinktionskoeffizienten des metallischen Zylindermaterials bedeuten. Ferner sind:

$$(10) \quad \begin{cases} \pi_1 = k_1 \varrho, \\ \pi_2 = k_2 \varrho. \end{cases}$$

Die Striche an den Funktionen  $J_m$  und  $Q_m$  bedeuten Ableitungen nach dem Argument. Für  $m=0$  ist der Faktor 2 auf der rechten Seite von Gleichung (7) zu streichen.

Nun sind in diesem Problem  $\pi_1$  und  $\pi_2$  als klein gegen 1 vorausgesetzt. Es vereinfachen sich in diesem Falle die Koeffizienten  $a_m$  erheblich und zwar wird

$$a_0 = \frac{\pi_1^2}{2}(\varepsilon - 1),$$

während schon  $a_1$  als von der Ordnung  $\pi_1^4$  zu vernachlässigen ist.

Setzt man diese Werte in (1) ein und beschränkt sich auf Punkte in großer Entfernung hinter dem Zylinder ( $\varphi = \pi$ ,  $p_1$  groß gegen 1), so folgt unter Benutzung des Hankelschen asymptotischen Wertes von  $Q_m(p_1)$ :

$$(11) \quad Q_m(p_1) = -i^{m+1} \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} e^{i(\pi/4 - p_1)}$$

für  $\mathfrak{E}_z$  der Wert:

$$(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = e^{i n t} [e^{-i p_1} + a_0 Q_0(p_1)], \\ = e^{i(n t - p_1)} + \frac{\pi_1^2}{2}(\varepsilon - 1) \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} e^{i(n t - p_1 - \pi/4)}, \\ = e^{i(n t - p_1)} + A(\nu^2 - \kappa^2 - 1 - 2\nu\kappa) e^{i(n t - \psi)}, \end{cases}$$

wobei

$$(13) \quad \begin{cases} A = \frac{\pi^2 \varrho^2}{r^{1/2} \lambda^{1/2}}, \\ \psi = p_1 + \pi/4. \end{cases}$$

Bilden wir nun den Ausdruck für die Intensität,  $\overline{\mathfrak{E}_z^2}$ , indem wir den reellen Teil von  $\mathfrak{E}_z$  auf die Form  $M \cos n t + N \sin n t$  bringen und  $(M^2 + N^2)$  bilden, so erhalten wir, wenn man die mit  $A^2$  multiplizierten Glieder als von höherer Ordnung vernachlässigt:

$$(14) \quad 2 \overline{\mathfrak{E}_z^2} = 1 + A \sqrt{2} (\nu^2 - \kappa^2 - 1 - 2\nu\kappa).$$

2.  $\mathfrak{E}$  in der einfallenden Welle senkrecht zur Z-Achse.

In diesem Falle ist im ganzen Außenraum des Zylinders die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}_\varphi$  gegeben durch:

$$(15) \quad \mathfrak{E}_\varphi = i e^{i n t} \left[ \sum_m^0, \infty b_m Q_m'(p_1) \cos m \varphi + i \cos \varphi e^{i p_1 \cos \varphi} \right].$$

Dabei sind die oben angeführten Bezeichnungen beibehalten und die Koeffizienten  $b_m$  gegeben durch:

$$(16) \quad b_m = 2 i^m \frac{\frac{k_1}{k_2} \frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} J_m(\pi_1) - J_m'(\pi_1)}{Q_m'(\pi_1) - \frac{k_1}{k_2} \frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} Q_m(\pi_1)}.$$

Für  $m=0$  ist wieder der Faktor 2 auf der rechten Seite zu streichen. Die Koeffizienten  $b_m$  nehmen im vorliegenden Falle, da  $\pi_1$  und  $\pi_2$  klein gegen 1 sind, einfache Werte an. Es wird:

$$b_1 = i \pi_1'^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1},$$

während  $b_0$  und alle anderen  $b_m$  zu vernachlässigen sind. Setzt man diese Werte in (15) ein und beschränkt sich wieder auf Punkte in großer Entfernung hinter dem Zylinder ( $\varphi = \pi$ ,  $p_1$  groß gegen 1), so folgt unter Benutzung von (11) und (13):

$$(17) \quad \mathfrak{E}_\varphi = e^{i(n t - p_1)} - 2 A \frac{\nu^2 - \kappa^2 - 1 - 2 \nu \kappa i}{\nu^2 - \kappa^2 + 1 - 2 \nu \kappa i} e^{i(n t - \varphi)}.$$

Bilden wir wieder den Ausdruck für die Intensität  $\overline{\mathfrak{E}_\varphi^2}$ , so ergibt sich, wenn man, wie vorher, die Glieder mit  $A^2$  vernachlässigt:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{wo} \\ \text{und} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \overline{\mathfrak{E}_\varphi^2} = 1 - 2 A \sqrt{2} (\alpha - \beta), \\ \alpha = \frac{(\nu^2 + \kappa^2)^2 - 1}{(\nu^2 - \kappa^2 + 1)^2 + 4 \nu^2 \kappa^2} \\ \beta = \frac{4 \nu \kappa}{(\nu^2 - \kappa^2 + 1)^2 + 4 \nu^2 \kappa^2} \end{array} \right.$$

sind.  $2 \overline{\mathfrak{E}_z^2}$  bzw.  $2 \overline{\mathfrak{E}_\varphi^2}$  in (14) bzw. (18) sind die Intensitäten in großer Entfernung hinter dem Zylinder für die beiden hier in Betracht kommenden Fälle ( $\mathfrak{E} \parallel$  oder  $\perp$  zur Zylinderachse), und folglich ist der Quotient  $\overline{\mathfrak{E}_z^2} / \overline{\mathfrak{E}_\varphi^2}$  nichts anderes als das Durchlässigkeitsverhältnis  $q = D_{\parallel} / D_{\perp}$ . Gelingt es also zu zeigen, daß

$$\overline{\mathfrak{E}_z^2} < \overline{\mathfrak{E}_\varphi^2},$$

so ist damit für unseren (bzw. den Braunschen) Fall bewiesen, daß Hertzeffekt und *nicht* Duboisefekt eintritt.

Setzt man in die obige Ungleichung die Werte aus (14) und (18) ein, so wird die zu beweisende Beziehung

$$\nu^2 - \kappa^2 - 1 - 2\nu\kappa < -2(\alpha - \beta),$$

oder

$$(19) \quad 1 + \kappa^2 + 2\nu\kappa - \nu^2 > 2 \frac{(\nu^2 + \kappa^2)^2 - 1 - 4\nu\kappa}{(\nu^2 - \kappa^2 + 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2}.$$

Die Werte der optischen Konstanten  $\nu$  und  $\kappa$  einiger Metalle für Na-Licht sind in der folgenden Tab. I zusammengestellt.

Tabelle I.

$$\lambda = 589,3 \mu\mu.$$

| Metall  | $\nu$ | $\kappa$ | Beobachter                |
|---------|-------|----------|---------------------------|
| Stahl   | 2,485 | 3,433    | R. S. Minor <sup>1)</sup> |
| Kobalt  | 2,120 | 4,040    | "                         |
| Kupfer  | 0,617 | 2,630    | "                         |
| Silber  | 0,177 | 3,638    | "                         |
| Gold    | 0,37  | 2,82     | P. Drude <sup>2)</sup>    |
| Platin  | 2,06  | 4,26     | "                         |
| Natrium | 0,005 | 2,61     | "                         |

Man sieht in leichter Rechnung, daß für alle angegebenen Metalle für die betreffende Wellenlänge die Beziehung (19) erfüllt ist.

Beim Übergang zu kürzeren Wellenlängen ändern sich die optischen Konstanten in der Weise, die aus den folgenden Tabb. IIa—d ersichtlich ist.

Tabelle IIa.

Stahl (Minor).

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | $\nu$ | $\kappa$ |
|-----------------------|-------|----------|
| 400,0                 | 1,681 | 2,725    |
| 450,0                 | 1,885 | 2,934    |
| 500,0                 | 2,092 | 3,145    |
| 550,0                 | 2,309 | 3,303    |
| 589,3                 | 2,485 | 3,433    |

Tabelle IIb.

Kobalt (Minor).

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | $\nu$ | $\kappa$ |
|-----------------------|-------|----------|
| 395,0                 | 1,627 | 2,912    |
| 450,0                 | 1,792 | 3,421    |
| 500,0                 | 1,930 | 3,711    |
| 550,0                 | 2,048 | 3,904    |
| 589,3                 | 2,120 | 4,040    |

1) R. S. Minor, Ann. d. Phys. **10**. p. 581. 1903.

2) P. Drude, Lehrbuch der Optik I. Aufl. p. 338.

Tabelle IIc.

Kupfer (Minor).

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | $\nu$ | $\kappa$ |
|-----------------------|-------|----------|
| 395,0                 | 1,173 | 1,763    |
| 450,0                 | 1,131 | 2,149    |
| 500,0                 | 1,098 | 2,341    |
| 535,0                 | 1,004 | 2,276    |
| 550,0                 | 0,892 | 2,133    |
| 575,0                 | 0,651 | 2,428    |
| 589,3                 | 0,617 | 2,680    |

Tabelle IID.

Silber (Minor).

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | $\nu$ | $\kappa$ |
|-----------------------|-------|----------|
| 395,5                 | 0,155 | 1,912    |
| 450,0                 | 0,164 | 2,386    |
| 500,0                 | 0,169 | 2,941    |
| 550,0                 | 0,176 | 3,305    |
| 589,3                 | 0,177 | 3,638    |

Für *alle diese Werte* ist immer noch die Beziehung (19) erfüllt, so daß man schließen muß:

*Hat  $\varrho/\lambda$ , wie bei den Versuchen von F. Braun, einen sehr kleinen Wert, so ist im ganzen Gebiet der sichtbaren Strahlung der Hertzeffekt vorhanden.*

Dieser Schluß wird noch durch folgendes verstärkt: F. Braun fand, daß die polarisierende Wirkung seiner Präparate mit abnehmender Wellenlänge *abnimmt*. Genau dasselbe Resultat ergibt die Ungleichung (19), wenn man in sie die Werte von  $\nu$  und  $\kappa$  aus den Tabb. IIa—d einsetzt: sie ist um so besser erfüllt, je größer die Wellenlänge ist. Nimmt man endlich noch hinzu,<sup>1)</sup> daß von allen Metallen die Ungleichung für *Platin* am besten stimmt, und daß dieses Metall in der Tat nach Braun die stärkste polarisierende Wirkung ausübt, *so kann wohl kein Zweifel mehr bestehen, daß wir in Brauns Versuchen den Hertzeffekt vor uns haben.*

*Dasselbe läßt sich auch für das langwellige ultrarote Spektrum erweisen.*

In diesem Gebiete sind, wie aus den Versuchen von Hagen und Rubens folgt, die optischen Konstanten, gemäß der Maxwell'schen Theorie, aus der Leitfähigkeit  $\sigma$  allein zu berechnen. Es wird dann

$$\nu = \kappa = \sqrt{\sigma \tau},$$

wo  $\tau = \lambda/\tau$  die Periode der einfallenden Welle ist.

---

1) Darauf hat uns auch Hr. Braun aufmerksam gemacht, dem wir unser Resultat mitgeteilt hatten.



Es ist nun leicht zu zeigen, daß auch im Gebiete dieser langen Wellen für kleines  $\varrho/\lambda$  stets der *Hertzeffekt* sich ergeben muß.

Die zu beweisende Ungleichung (19) wird nämlich hier:

$$1 + 2\nu^2 > 2 \frac{4\nu^4 - 4\nu^2 - 1}{1 + 4\nu^4},$$

oder

$$3 + 10\nu^2 - 4\nu^4 + 8\nu^6 > 0.$$

Setzt man  $\nu^2 = x$ , so ist zu zeigen, daß die Funktion

$$f(x) = 3 + 10x - 4x^2 + 8x^3,$$

für alle *positiven reellen*  $x$  größer als Null ist. Nun ist zunächst  $f(0) = 3 > 0$ . Ferner ist

$$f'(x) = 10 + 24x^2 - 8x$$

stets größer als Null, da die Gleichung  $f'(x) = 0$  *keine reellen Wurzeln* besitzt. Daher ist also  $f'(x)$  für alle reellen positiven  $x$  *selbst positiv*, und die Ungleichung (19) ist bewiesen.

In dem Gebiete endlich zwischen  $0,7 \mu$  und  $8 \mu$  weichen die optischen Konstanten mit abnehmender Wellenlänge mehr und mehr von ihren nach der Maxwellschen Theorie sich ergebenden Werten ab. Da dieser Übergang, wie die Hagen-Rubensschen Versuche zeigen, stets im gleichen Sinne erfolgt, so darf aus der Tatsache, daß für kleines  $\varrho/\lambda$  zu beiden Seiten dieses Übergangsgebietes der *Hertzeffekt* auftritt, geschlossen werden, daß auch in diesem Spektralbereich dasselbe gilt.

Zusammenfassend können wir also sagen: *Ist  $\varrho/\lambda$  hinreichend klein, so ist sowohl im sichtbaren, als auch im ultraroten Spektrum für alle Metalle der Hertzeffekt vorhanden.*

## § 2. Der Inversionspunkt und der Duboiseffekt.

Die Versuche von du Bois und Rubens<sup>1)</sup>, ebenso wie diejenigen von Rubens und Nichols<sup>2)</sup> haben gezeigt, daß im Gebiete der ultraroten Wellen ( $\lambda$  zwischen  $2 \mu$  und  $50 \mu$ ) stets dann der Hertzeffekt eintrat, wenn  $\varrho/\lambda$  einen nicht zu großen

1) H. du Bois u. H. Rubens, l. c.; Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1904. p. 77.

2) H. Rubens u. F. Nichols, Wied Ann. 60. p. 418. 1897.

Wert besaß. Selbst noch für  $\varrho/\lambda = 2$  fanden sie in diesem langwelligen Bereiche den Hertzeffekt bei allen untersuchten Metallen. *Erst für größere Werte von  $\varrho/\lambda$ , etwa  $\varrho/\lambda > 4$ , trat der Duboisefekt auf.*<sup>1)</sup> So lag bei einem Gitter, dessen  $\varrho = 12,5 \mu$  war, für verschiedene Metalle der Inversionspunkt an den aus der Tab. III ersichtlichen Stellen.

Tabelle III.

| Metall         | $\lambda_{\text{Inversionsp. in } \mu}$ | $\varrho/\lambda_{\text{Inversionsp.}}$ |
|----------------|---|---|
| Platin . . . . | 1,9                                     | 6,6                                     |
| Silber . . . . | 2,1                                     | 6,0                                     |
| Gold . . . .   | 2,8                                     | 4,5                                     |
| Eisen . . . .  | 2,9                                     | 4,3                                     |
| Kupfer . . . . | 3,1                                     | 4,0                                     |

Die Lage des Inversionspunktes im Spektrum ergab sich, wie schon oben gesagt, nach du Bois-Rubens als unabhängig von  $\varrho$ .

Die Berechnung stößt in diesem Falle, da  $\varrho/\lambda$  und damit die Argumente der Besselschen Funktionen, die in den Koeffizienten  $a_m$  und  $b_m$  auftreten, *groß* sind, auf Schwierigkeiten. Denn da diese Koeffizienten  $a_m$  und  $b_m$  hier von einem bestimmten  $m$  an nur langsam abnehmen, so ist die Zahl der zu berechnenden Koeffizienten groß. Auch läßt sich wohl kaum die Rechnung auf diesem Wege hier so allgemein (d. h. ohne *numerische* Wertangaben) durchführen, wie oben. Immerhin lassen sich folgende allgemeine Bemerkungen machen:

Wären  $\nu$  und  $\kappa$  *konstante*, von  $\lambda$  unabhängige Größen, so müßte nach der Theorie, da ja dann in den Koeffizienten  $a_m$

---

1) Die Wahl eines zu kleinen  $\varrho/\lambda (= \frac{1}{2})$  ist wohl auch der Grund, daß der Versuch von W. Seitz (Ann. d. Phys. **21**. p. 1013. 1906), den Duboisefekt in einem speziellen Falle theoretisch abzuleiten, zu einem *negativen* Ergebnis führte. Sein Erklärungsversuch für dieses negative Resultat, — daß man nämlich die an einem einzelnen Drahte gefundenen Resultate nicht ohne weiteres auf den Fall eines engen Gitters übertragen dürfe, — erscheint uns nicht stichhaltig, da die von du Bois u. Rubens benutzten Gitter zweifellos als „*weite*“ Gitter bezeichnet werden müssen (Gitterkonstante  $a = 2\varrho > 8\lambda$  im Gebiete des Duboisefektes) und daher eine *gegenseitige* Beeinflussung der Gitterstäbe kaum stattfinden konnte.

und  $b_m$  nur  $\varrho/\lambda$  als Variable auftritt, auch die Lage des Inversionspunktes für ein bestimmtes Metall von diesem Verhältnis  $\varrho/\lambda$  abhängig sein. Dies läßt sich folgendermaßen zeigen:

Die Größen  $\overline{\mathfrak{E}_z^2}$  und  $\overline{\mathfrak{E}_\varphi^2}$  lassen sich stets auf folgende Gestalt bringen:<sup>1)</sup>

$$2 \overline{\mathfrak{E}_z^2} = 1 + \frac{\lambda}{4r} (A^2 + B^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A + B)$$

und

$$2 \overline{\mathfrak{E}_\varphi^2} = 1 + \frac{\lambda}{4r} (A'^2 + B'^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A' + B'),$$

wo  $A, B, A', B'$  Aggregate aus den Koeffizienten  $a_m$  und  $b_m$ , also Funktionen von  $\varrho/\lambda$ , sind.

Für den Inversionspunkt gilt nun die Bedingung:

$$\overline{\mathfrak{E}_z^2} = \overline{\mathfrak{E}_\varphi^2};$$

also folgt hier:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4r} (A^2 + B^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A + B) \\ = \frac{\lambda}{4r} (A'^2 + B'^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A' + B'), \end{aligned}$$

oder

$$\sqrt{\frac{\lambda}{8r}} (A^2 + B^2) + A + B = \sqrt{\frac{\lambda}{8r}} (A'^2 + B'^2) + A' + B'.$$

In hinreichend großer Entfernung  $r$  (diese ist in den optischen Versuchen stets realisiert) ist das mit  $1/\sqrt{r}$  multiplizierte Glied auf beiden Seiten *beliebig* klein, so daß die Bedingung für den Inversionspunkt einfach lautet:

$$(20) \quad A + B - (A' + B') = 0.$$

Diese Größen aber hängen *nur* ab von  $\varrho/\lambda$ , vorausgesetzt, daß  $\nu$  und  $\kappa$  *Konstanten* sind. In Wirklichkeit sind aber  $\nu$  und  $\kappa$  Funktionen von  $\lambda$ , sodaß man (20) in der Form schreiben kann:

$$(20a) \quad F\left(\lambda, \frac{\varrho}{\lambda}\right) = 0.$$

Man erkennt aus (20a), daß *zwei* Faktoren die Lage des Inversionspunktes bestimmen: *erstens die Werte von  $\varrho/\lambda$  und zweitens diejenigen von  $\nu$  und  $\kappa$ .*

Auch die experimentell gefundene Konstanz des Inversionspunktes erklärt sich nach (20a) leicht durch folgende Annahme:

1) Vgl. z. B. Cl. Schaefer, Berliner Ber. 1909. p. 335, Formel (19a).

Man muß nur annehmen, daß die Funktion  $F$  in dem betreffenden Bereiche sehr unempfindlich gegen Schwankungen des Arguments  $\varrho/\lambda$  ist.<sup>1)</sup>

Von diesem Standpunkt kann also kein Zweifel darüber bestehen, daß die „Konstanz“ des Inversionspunktes nur innerhalb eines beschränkten Bereiches existiert. Sehr wünschenswert — freilich auch nicht ganz leicht — sind daher Versuche, die das in den Untersuchungen von du Bois und Rubens vorliegende Material ergänzen.

Man erkennt übrigens auch leicht durch Betrachtung der Gleichungen (14), (18), (19), weshalb die Herren du Bois und Rubens keine einfache Beziehung der Lage des Inversionspunktes der verschiedenen Metalle zu ihren optischen Konstanten finden konnten: Diese zwar sicher vorhandene Relation ist selbst in dem einfachsten, in § 1 untersuchten Falle so kompliziert, daß ohne die Führung durch eine Theorie dieser Versuch schwerlich erfolgreich sein konnte.

Breslau, Physik. Inst. d. Universität, im Februar 1910.

---

1) Darauf hat uns auch Hr. Prof. Pringsheim aufmerksam gemacht.

(Eingegangen 9. März 1910.)

---