

Beiträge zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen.

Von

ROBERT FRICKE in Braunschweig.

Der Höhepunkt in der Entwicklung der Theorie der automorphen Funktionen wird durch diejenigen Sätze dargestellt, welche F. Klein als „Fundamentaltheoreme“ bezeichnete. Es sind die Existenztheoreme „linear-polymorpher“ oder kurz „polymorpher Funktionen“ auf beliebig gegebenen Riemannschen Flächen*). Von den verschiedenen Beweisansätzen dieser Theoreme ist der am weitesten reichende der von Klein und Poincaré gleichzeitig konzipierte „Kontinuitätsbeweis“ (*méthode de continuité*). Die Idee dieses Beweises ist, das einzelne Kontinuum gleichgearteter Polygone bezw. Gruppen dem zugeordneten Kontinuum Riemannscher Flächen gegenüberzustellen, um aus denjenigen Eigenschaften, welche man über die Beziehung der beiden Kontinua aufeinander von Hause aus kennt, den Schluß auf die gegenseitige Eindeutigkeit der Beziehung zu tun.

Klein hat in den *Mathem. Annalen* Bd. 21, pag. 208ff. (datiert 2. Oktober 1882) seine Ideen über den Kontinuitätsbeweis entwickelt. Andererseits ist Poincaré auf den gleichen Gegenstand in den *Acta mathem.*, Bd. 4, pag. 233ff. (datiert Oktober 1883) eingegangen und hat daselbst in einer für das erste Eindringen bewunderungswerten Art die Tiefen und Schwierigkeiten des Beweises aufgedeckt, sowie Ideen zu ihrer Überwindung angegeben.

Indessen handelt es sich bei diesen Entwicklungen nur erst um erste Entwürfe; und der reifere Aufbau der Theorie der automorphen Funktionen, welcher in dem oben zitierten Werke „A. F.“ angestrebt wird, hat die

*) Cf. A. F. II, pag. 45. Zitate dieser Gestalt beziehen sich auf die „Vorlesungen über automorphe Funktionen“, welche ich in Gemeinschaft mit F. Klein bei B. G. Teubner, Leipzig, herausgebe; Bd. I (1897), Bd. II, Lief. 1 (1901). Diesem Werke schließen sich die folgenden Entwicklungen methodisch und in der Wahl der Bezeichnungen eng an.

Verpflichtung einer sorgfältigeren und einwurfsfreieren Ausbildung jener Kontinuitätsmethoden, eine Aufgabe, deren Lösung nicht geringe Schwierigkeiten in sich birgt. Bei dieser Sachlage habe ich die Fundamentaltheoreme in ihrer Allgemeinheit zunächst als zu schwierig bei Seite gelassen und mich zur Durchführung einiger niederer Spezialfälle gewandt, wo zumal auch die direkte geometrische Anschauung zu einem wesentlichen Hilfsmittel der Untersuchung wird. Die Ergebnisse, zu denen ich in der fraglichen Richtung gekommen bin, sind im folgenden zusammengestellt.

I. Aufstellung zweier grundlegender Theoreme.

In A. F. II, pag. 167ff. ist nach Poincaré bewiesen worden, daß die Moduln der algebraischen Gebilde *stetige* Funktionen von den Moduln oder Invarianten der automorphen Gebilde sind, denen jene algebraischen Gebilde entsprechen. Dieser Satz war eine unmittelbare Folge der gleichmäßigen Konvergenz der Poincaréschen Reihen; und zwar bezieht sich hierbei die Gleichmäßigkeit der Konvergenz nicht nur auf Abänderung des Argumentes ξ der Poincaréschen Reihe, sondern auch auf Abänderung der Gruppeninvarianten, was eben die gerade genannte Schlußfolgerung zu ziehen gestattet. Nun waren aber a. a. O. beim Beweise der gleichmäßigen Konvergenz die *Grenzfälle* der Polygonkontinua zunächst ausdrücklich ausgeschlossen. Hier wird indessen die Frage, ob die Stetigkeit der algebraischen Moduln bis zu den Grenzfällen inklusive besteht oder nicht, unabweislich.

In dieser Hinsicht erinnere ich zunächst an folgende Verhältnisse. Wir haben erstlich das „Polygonkontinuum“, welches zu einer gegebenen Signatur $(p, n; l_1, l_2, \dots, l_v)$ gehört. Dasselbe ist ein *einfach* zusammenhängendes Kontinuum, da es sich, wenn es m -dimensional ist, eindeutig stetig auf die Punkte eines m -dimensionalen regulären Würfels beziehen läßt*). Diesem Kontinuum gehören nun die durch „Transformation“ auseinander hervorgehenden Polygone als verschiedene Individuen an (cf. A. F. I, pag. 320 und 389). Aber alle solche ineinander transformierbaren Polygone liefern eine und dieselbe „Gruppe“ Γ . Um also das „Gruppenkontinuum“ der Signatur $(p, n; l_1, l_2, \dots, l_v)$ zu gewinnen, müssen wir im Polygonkontinuum den DB^{**} der zugehörigen „automorphen Modulgruppe“ abgrenzen, welche nur im Falle $p = 0, n = 3$ die Ordnung 1, sonst aber stets die Ordnung ∞ besitzt.

*) Siehe die Notiz „Über die in der Theorie der automorphen Funktionen auftretenden Polygonkontinua“, Göttinger Nachrichten 1903, Heft 5.

***) heißt „Diskontinuitätsbereich“.

Die Sachlage ist nun die, daß es allerdings aussichtslos ist, die am Rande des „Polygonkontinuums“ eintretenden Polygongestalten allgemein überblicken zu wollen. Indessen ist es vollständig ausreichend, sich auf das „Gruppenkontinuum“ und also auf den DB der automorphen Modulgruppe zu beschränken. Die Grenzgebilde dieses Kontinuums, d. h. die Randstellen des DB , welche zugleich Randstellen des Polygonkontinuums sind, zu untersuchen, ist aber weit aussichtsreicher. Die nachfolgenden Entwicklungen werden dies dartun.

Um zu einem für die Folge ausreichend allgemeinen Grundsatz zu gelangen, nehmen wir an, daß man von den Polygonen unseres Kontinuums durch irgend einen stetigen Übergang zu einem Grenzgebilde gelangt, welches ein nichtzerfallendes und auch nicht sonstwie ausartendes Polygon von niederem „Charakter“ (p, n) darstellt. Als Beispiel wähle man das eindimensionale Kontinuum der Kreisbogenvierecke gegebener Winkel $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}, \frac{\pi}{l_4}$ und nenne die Ecken entsprechend $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. In Fig. 1 sind die Ecken $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ einander bereits sehr nahe. Lassen wir den Kreis $\varepsilon_2 \varepsilon_3$ bis zur Berührung an den Kreis $\varepsilon_4 \varepsilon_1$ herankommen, so zieht sich der Kreis $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ auf einen Punkt zusammen, und die Ecken ε_3 und ε_4 verschmelzen miteinander zu einer parabolischen Spitze. Es entspringt also das nicht ausartende*) Grenzgebilde $(0, 3; l_1, l_2, \infty)$.

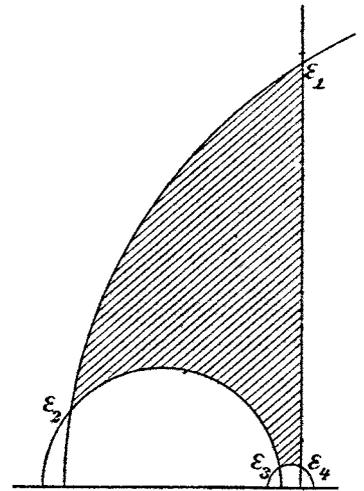


Fig. 1.

Jetzt erinnere man sich, welches der eigentliche Nerv des in A. F. II, pag. 167 entwickelten Poincaréschen Beweises der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen ist. Derselbe beruhte auf der Auswahl eines Bereiches B_0 , der auch bei Abänderung der Moduln beständig *innerhalb* des Ausgangspolygons liegt, so daß die mit B_0 äquivalenten Bereiche nie miteinander kollidieren. Dieser Umstand gestattete eine Abschätzung der Reihe:

$$\sum_k \left| \frac{dV_k(\xi)}{d\xi} \right|^{\frac{d'}{2}}$$

auf Grund eines a. a. O. pag. 170ff. dargestellten Verfahrens. Man erkennt ohne weiteres, daß für die Auswahl eines solchen Bereiches B_0 ein nicht ausartendes Grenzpolygon oben gedachter Art genau so leicht zugelassen werden kann, wie irgend ein dem Inneren des Kontinuums angehörendes

*) Diese Ausdrucksweise hat hier folgenden Sinn: Von einer Ausartung wird nur gesprochen, wenn im Grenzfall ein endlich ausgedehnter DB nicht mehr vorliegt. Dagegen gilt eine Herabminderung der Signatur *nicht* als Ausartung.

Polygon. Im Grenzfall werden alsdann gewisse Glieder der eben angeführten Reihe als verschwindend ausfallen, und man gewinnt im stetigen Übergange die Reihen des automorphen Gebildes von niederem Charakter bezw. von niederer Signatur.

Die a. a. O. gezogenen Folgerungen betreffs der Stetigkeit der Moduln des algebraischen Gebildes gelten somit bis zum Grenzfall inklusive; d. h. wir haben folgenden

Stetigkeitssatz: Die Stetigkeit der Moduln des algebraischen Gebildes oder, wie wir kurz sagen wollen, der „algebraischen Moduln“ bei stetiger Abänderung der „Gruppenmoduln“ trifft nicht nur im „Innern“ des Gruppenkontinuums zu, sondern bleibt auch bis zu solchen Grenzfällen „inklusive“ bestehen, welche nicht-ausartende automorphe Gebilde darstellen. —

Einen zweiten für die folgenden Untersuchungen grundlegenden Satz werden wir als „Unitätssatz“ zu bezeichnen haben. Derselbe hat von Anfang an eine wichtige Rolle beim Kontinuitätsbeweise gespielt*). Zur Aufstellung dieses Satzes knüpfen wir an das Existenztheorem der automorphen Funktionen (cf. A. F. II, pag. 14). Nach diesem Theorem entspricht jedem automorphen Gebilde eindeutig ein algebraisches Gebilde, oder jedes unserer Polygone gestattet eindeutige und *konforme* Abbildung auf eine Riemannsche Fläche. Wir fragen jetzt, ob zwei verschiedene Polygone hierbei eine und dieselbe Riemannsche Fläche zu liefern imstande sind. Selbstverständlich werden zwei Polygone, die durch Transformation**) ineinander überführbar sind, dieselbe Fläche geben. Wir haben uns also, die Polygone betreffend, auf einen *DB* der automorphen Modulgruppe zu beschränken. Dies kann in der Weise geschehen, daß wir auf der Fläche ein bestimmtes kanonisches Querschnittssystem vorschreiben und die so zerschnittene Fläche alsdann auf die beiden fraglichen Polygone abgebildet denken. Letztere mögen in zwei getrennten Ebenen, denen der Variablen ζ und ζ' gelagert sein.

Was die Gestalt der kanonischen Flächenzerschneidung angeht, so ist dieselbe z. B. in A. F. I, pag. 183 dargelegt. Man erinnere sich, daß es sich hier um Flächen handelt, welche mit n Punkten e_1, e_2, \dots, e_n „signiert“ sind. Doch wollen wir die Maßregeln gleich so treffen, daß die Fälle, in denen der Hauptkreis kein Grenzkreis ist, nicht ausgeschlossen sind. Handelt es sich demnach um eine orthosymmetrische Riemannsche Fläche mit $\mu = n - \nu$ Symmetrielinien, so befassen wir uns nur mit der

*) Man vergl. z. B. die Erörterung des gedachten Theorems in der schon zitierten Abhandlung von Klein in den Math. Annalen Bd. 21, pag. 209.

**) Es sind hier nicht nur lineare Transformationen von ζ gemeint, sondern auch die Transformationen im Sinne von A. F. I, pag. 320 ff., welche auf Abänderungen der kanonischen Querschnittssysteme auf den Riemannschen Flächen beruhen.

einen der beiden symmetrischen Flächenhälften, welche dann noch mit ν Punkten e_1, e_2, \dots, e_ν signiert ist. Bei Anlage des kanonischen Schnittsystems werden die μ Symmetrielinien den ν Punkten e_1, \dots, e_ν gleich behandelt.

Die kanonisch zerschnittene Fläche bzw. Flächenhälfte überträgt sich nun auf zwei den Halbebenen von ξ bzw. ξ' angehörende Polygone P und P' , welche, allgemein zu reden, je ν feste Ecken und je $\mu = n - \nu$ Segmente der reellen Achsen längs der Berandungen aufweisen. Durch Vermittlung der Riemannschen Fläche sind diese beiden Polygone P und P' aufeinander eindeutig und *konform* bezogen. Erzeugt man nun von P und P' aus die beiden Polygonnetze N und N' , welche die beiden Halbebenen schlicht bedecken, so entspringt eine eindeutige und *konforme* Beziehung beider Halbebenen aufeinander, indem ja die Polygone des einen Netzes eindeutig denen des anderen entsprechen. Man hat nur zu beachten, daß an den elliptischen Ecken zwar die Beziehung des einzelnen Polygons auf die Fläche eine Einbuße der Konformität erfährt, daß aber wegen der an beiden Polygonen P, P' jeweils gleichen Eckenwinkel bei der Beziehung der beiden Halbebenen aufeinander an solchen Stellen die Konformität wieder hergestellt erscheint.

Um Umständlichkeiten zu entgehen, wollen wir über die hier entspringende Beziehung der reellen Achsen aufeinander zunächst keine weiteren Folgerungen ziehen und die konforme Abbildung nur auf die inneren Teile der Halbebenen beziehen. Jedenfalls bleibt beim fortschreitenden Reproduktionsprozeß der Polygone kein endlich weit von der reellen Achse entfernter Punkt der einzelnen Halbebene vom Polygonnetze unbedeckt. Man kann demnach aussagen: Man kommt mit dem Punkte ξ (bzw. ξ') in *jede vorgeschriebene* Nähe der reellen Achse, wenn man mit dem entsprechenden Punkte ξ' (bzw. ξ) *ausreichend nahe* an die Achse herangeht.

Es besteht nun die Tatsache, daß die hier gewonnene Beziehung notwendig durch eine lineare Gleichung:

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$

darstellbar sein muß, d. h. daß beide Halbebenen und damit auch beide Vollebenen ξ und ξ' (im Nichtgrenzkreisfalle) kreisverwandt sind. Der Beweis, welchen Klein a. a. O. für diese Tatsache beigebracht hat, ist dadurch erschwert, daß die Beziehung von ξ auf ξ' unter Fortsetzung des soeben befolgten Schlußverfahrens auf die reellen Achsen und dann auf die negativen Halbebenen ausgedehnt wird, wobei also die längs der reellen Achsen angeordneten Grenzpunkte der beiden Polygonnetze zu überschreiten sind. Ein neuerer von W. F. Osgood ausgebildeter Beweis

für das Bestehen der Kreisverwandtschaft ist von dieser Schwierigkeit frei und stützt sich einzig auf die oben allein betreffs der positiven Halbebenen festgestellten Tatsachen*).

Osgood arbeitet zunächst nicht mit den Halbebenen, sondern (was keinen wesentlichen Unterschied ausmacht) mit den Einheitskreisen der ξ - und ξ' -Ebene. Zugleich ordnet er die letzteren so an, daß dem Punkte $\xi = 0$ der Punkt $\xi' = 0$ korrespondiert. Die Folge ist, daß der Quotient $\frac{\xi'}{\xi}$ im Innern des Einheitskreises der Ebene von $\xi = \xi + i\eta$ eine überall endliche und nicht verschwindende analytische Funktion ist, welche ebenda keinerlei singuläre Stellen besitzt. Der Logarithmus dieser Funktion werde unter Trennung der reellen und imaginären Bestandteile:

$$\log \left(\frac{\xi'}{\xi} \right) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$$

geschrieben. Die reellen Funktionen $u(\xi, \eta)$ und $v(\xi, \eta)$ sind im „Innern“ des Einheitskreises überall eindeutig, stetig und harmonisch. Für die erste dieser Funktionen gilt die Darstellung:

$$\log \frac{|\xi'|}{|\xi|} = u(\xi, \eta).$$

Nun wurde oben festgestellt, daß, wenn man ξ auf irgend welchen Wegen dem Einheitskreise selbst ohne Ende nahe kommen läßt, hierbei $|\xi'|$ sich gleichmäßig dem Betrage 1 nähert. Man kann demnach im Innern des Einheitskreises einen demselben ausreichend nahe gelegenen, mit ihm konzentrischen Kreis derart annehmen, daß längs der Peripherie desselben $|\xi|$ und $|\xi'|$ „beliebig“ wenig von 1 und also $|u(\xi, \eta)|$ „beliebig“ wenig von 0 abweicht. Wegen des harmonischen Verhaltens von $u(\xi, \eta)$ geht hieraus hervor, daß $u(\xi, \eta)$ im Innern des Einheitskreises überhaupt keinen von 0 verschiedenen Wert annehmen kann. Ist aber $u(\xi, \eta)$ innerhalb des Einheitskreises überall mit 0 identisch, so hat die konjugierte Funktion $v(\xi, \eta)$ daselbst allenthalben einen konstanten Wert, welcher ϑ genannt werde. Die vorletzte Gleichung liefert nunmehr $\xi' = e^{i\vartheta} \cdot \xi$, so daß in der Tat die ξ' -Ebene auf diejenige von ξ kreisverwandt bezogen ist.

Kehren wir nun zu unseren beiden Polygonen P und P' zurück, so sind dieselben als miteinander kreisverwandt für den Standpunkt der Invariantentheorie überhaupt nicht voneinander verschieden. Auf diese Weise gewinnen wir den nachfolgenden

Unitätssatz: Jeder Stelle des einzelnen Kontinuums automorpher

*) Dieser Beweis, dessen Kenntnis ich einer brieflichen Mitteilung des Hrn. Osgood verdanke, ist anderweit noch nicht veröffentlicht worden. Das im Texte folgende Referat ist mit gütiger Erlaubnis des Hrn. Osgood hier eingeschoben.

Gebilde, d. i. des Gruppenkontinuums, entspricht „eindeutig“ eine Stelle im zugehörigen Kontinuum algebraischer Gebilde (Kontinuum signierter Riemannscher Flächen); jeder Stelle des letzteren Kontinuums entspricht „höchstens“ eine Stelle des Gruppenkontinuums.

Der Inhalt des Fundamentaltheorems ist, daß es sich hier um ein umkehrbar eindeutiges Entsprechen handelt. Dies soll nunmehr in einer Reihe spezieller Fälle tatsächlich bewiesen werden. —

II. Die Gebilde des Charakters $p = 0, n = 3$.

Die Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1, l_2, l_3)$ erledigen sich sofort. Jede mit drei Punkten e_1, e_2, e_3 , denen drei ganze Zahlen $l_1, l_2, l_3 \geq 2$ (den Wert ∞ eingeschlossen) zugeordnet sind, signierte Ebene ist konform abbildbar auf ein Paar symmetrischer Kreisbogendreiecke der Winkel $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$. Das Innere des durch e_1, e_2, e_3 hindurchzulegenden Kreises liefert dabei das eine Dreieck, während das Äußere jenes Kreises dem anderen Dreieck entspricht. Wir betrachten sogleich die

Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1, l_2)$

und denken die l_1, l_2 als ganze Zahlen ≥ 2 , den Wert ∞ eingeschlossen, irgendwie fixiert. Hier ist das Polygonkontinuum noch mit dem Gruppenkontinuum identisch, d. h. die automorphe Modulgruppe hat die Ordnung 1. Das fragliche Kontinuum ist eindimensional und (cf. A. F. I, pag. 341 ff.) mittelst der Invariante j_3 oder, was zweckmäßiger ist, der Invariante:

$$t = \frac{j_3 - 2}{j_3},$$

deren Intervall $0 \leq t \leq 1$ ist, darstellbar. Die einzelne hierher gehörige Gruppe Γ ist stets durch Spiegelungen erweiterungsfähig; die typische Gestalt der Polygone ist in Fig. 2 gegeben.

Man kann hier allemal noch mit elliptischen Substitutionen der Periode 2, welche die Halbebenen permutieren, erweitern. Als DB der erweiterten Gruppe benutzen wir etwa den oberen, stark umrandeten Teil des bisherigen DB (siehe Fig. 2). Die angegebenen Pfeile beziehen sich auf die Erzeugenden dieser erweiterten Gruppe. Von den mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ bezeichneten Eckpunkten des links

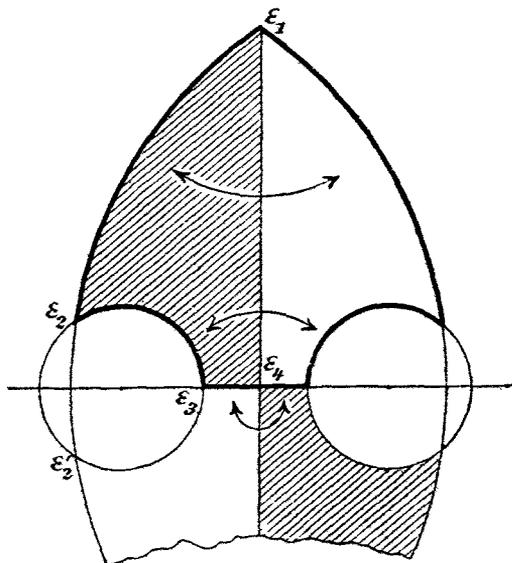


Fig. 2.

liegenden Elementarvierecks gehören die beiden ersten als Fixpunkte den Erzeugenden V_1, V_2 an.

Die beiden Grenzwerte der Invariante t sind $t = 0$ und $t = 1$. Andererseits erhalten wir offenbar ein am Rande des Kontinuums gelegenes Polygon, falls zwei benachbarte unter den Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ koinzidieren, oder falls mehrere solche Koinzidenzen gleichzeitig auftreten.

Zunächst ist in Fig. 3 ein Polygon gezeichnet, in welchem ε_3 und ε_4 einander sehr nahe gekommen sind. In Fig. 4 ist die Koinzidenz dieser

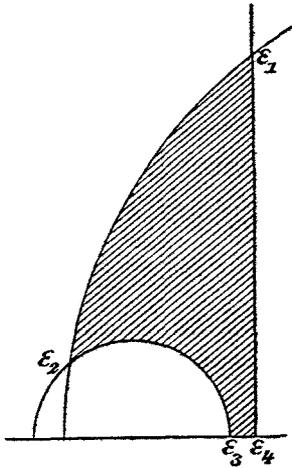


Fig. 3.

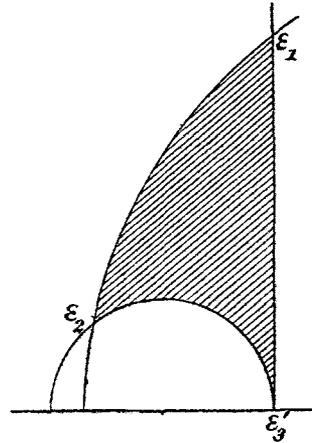


Fig. 4.

Ecken eingetreten, und damit ist V_3 parabolische geworden, so daß wir $j_3 = 2$ und also $t = 0$ erreicht haben. Man beachte, daß wir als nicht-ausartendes Grenzgebilde dasjenige der Signatur $(0, 3; l_1, l_2, \infty)$ gewinnen. Auf diesen Grenzübergang werden wir hiernach den „Stetigkeitssatz“ anwenden dürfen. Den Grenzübergang $\lim. t = 0$ kann man zweitens so ausführen,

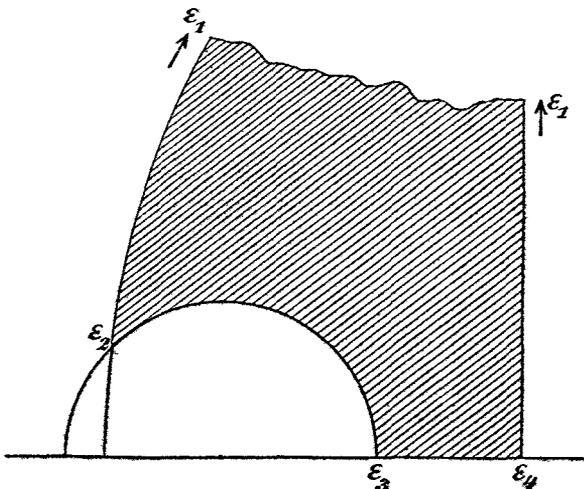


Fig. 5.

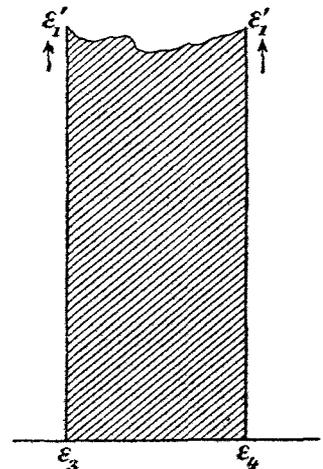


Fig. 6.

wie Fig. 5 anzeigt. Man stelle sich dieselbe als auf der „ ξ -Kugel“ gelegen vor, wo alsdann die beiden Ecken ε_1 und ε_2 einander sehr nahe gekommen sind. Im Falle der Koinzidenz dieser beiden Ecken entspringt, wie Fig. 6

darlegt, als Grenzgebilde die parabolische Diedergruppe, welcher die Signatur $(0, 3; 2, 2, \infty)$ zukommt. Auch hier ist schließlich V_3 parabolisch geworden, und man hat $\lim. t = 0$.

Im Innern des Intervalles $0 \leq t \leq 1$ wird durch einen Wert t ein zugehöriges Gebilde *eindeutig* bestimmt. Wenn demnach auch in den Figuren 4 und 6 zwei gänzlich verschiedene nicht-ausartende Grenzgebilde herauskommen, so müssen doch die zum Grenzfall $(0, 3; l_1, l_2, \infty)$ stetig hinführenden Gebilde unseres Kontinuums genau dieselben sein (d. i. natürlich bis auf lineare Transformation), wie die zum Grenzfall $(0, 3; 2, 2, \infty)$ hinführenden. In der Tat kann man sofort ein Polygon mit einander nahe gelegenen Ecken $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ vermöge einer „Ähnlichkeitstransformation“ $\xi' = a\xi$ mit ausreichend großem a in ein Polygon mit nahe gelegenen Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ verwandeln. Man wolle die Anordnung nur so treffen, daß in Fig. 3 der Punkt ε_4 mit $\xi = 0$ und die Seite $\varepsilon_4\varepsilon_1$ mit der imaginären ξ -Achse zusammenfällt. Nur im Grenzfall $t = 0$ selbst ist diese Überführung nicht mehr statthaft, weil für $\lim. t = 0$ offenbar $\lim. a = \infty$ zutrifft.

Den Grenzübergang zu $t = 0$ kann man auch noch dadurch vollziehen, daß man gleichzeitig ε_1 mit ε_2 und ε_3 mit ε_4 koinzidieren läßt. Dann aber zieht sich das Polygon auf eine Linie zusammen, so daß wir eine Ausartung des Gebildes bekommen, welche die Anwendung des Stetigkeitssatzes verbietet.

Die hier hervorgetretenen Verhältnisse sind nun überhaupt typisch für den Übergang zu Randstellen der Gruppenkontinua. Im „Innern“ eines Kontinuums wird durch das einzelne Wertsystem der Moduln *eindeutig* ein zugehöriges Gebilde festgelegt. Bei einem bestimmten Grenzübergange zu einer Randstelle des Kontinuums kann man verschiedenartige Grenzgebilde niederer Charaktere erhalten, Verhältnisse, die natürlich in ganz entsprechender Art an den algebraischen Gebilden hervortreten müssen.

Wir werden nun bei dem Unternehmen, das Fundamentaltheorem über Existenz polymorpher Funktionen in einem Einzelfalle $(p, n; l_1, l_2, \dots, l_n)$ zu beweisen, die niederen Fälle bereits als erledigt ansehen. Alsdann brauchen wir bei einem einzelnen Grenzübergange nicht alle möglichen erreichbaren Grenzgebilde in die Diskussion zu ziehen; es wird vielmehr zum Zwecke der Anwendung des Stetigkeitssatzes vollkommen ausreichend sein, wenn wir in jedem Falle ein einziges nicht-ausartendes Grenzgebilde erreichen.

Wenden wir diesen Grundsatz auf unser Kontinuum $(0, 3; l_1, l_2)$ an, so können wir den Grenzübergang $\lim t = 1$ durch Koinzidenz der Ecken ε_2 und ε_3 erzielen. Das in Fig. 7 (s. pag. 458) gezeichnete Polygon liegt dieser Grenze bereits sehr nahe. Man erkennt sofort: Der eingeleitete

Grenzübergang liefert als nicht-ausartendes Grenzgebilde die elliptische Diedergruppe der Signatur $(0, 3; 2, 2, l_1)$.

Zur Darstellung des unserem Gruppenkontinuum gegenüberstehenden Kontinuums algebraischer Gebilde führen wir eine Hauptfunktion $z = \varphi(\xi)$

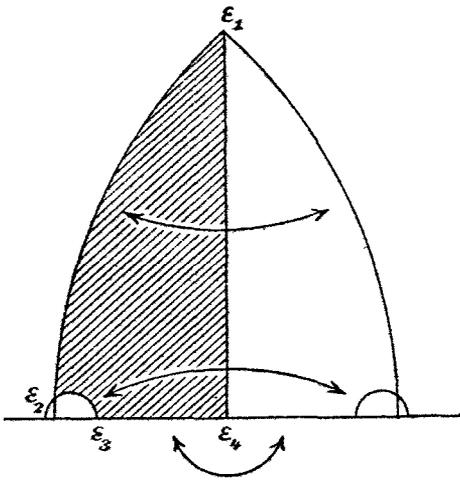


Fig. 7.

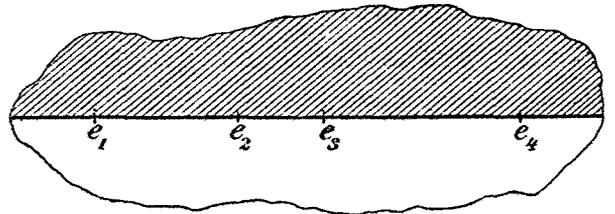


Fig. 8.

des in Fig. 2 stark umrandeten Polygons so ein, daß z längs der Symmetriekreise des Polygonnetzes reell ist, und daß $z = \infty$ in einem Punkte der Seite $\varepsilon_1 \varepsilon_4$ zutrifft. Das typische Bild der z -Ebene ist dann durch Fig. 8 dargestellt; und man benutzt, um das Kontinuum derart signierter z -Ebene invariant darzustellen, am einfachsten das Doppelverhältnis:

$$\lambda = - \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_3)(e_4 - e_2)}.$$

Offenbar gewinnt man das gesamte „algebraische Kontinuum“, indem man λ als reelle Größe das Intervall $0 \leq \lambda \leq 1$ beschreiben läßt.

Den Grenzwert $\lambda = 0$ erreicht man, indem man entweder e_1 und e_2 oder e_3 und e_4 zusammenfallen läßt. Hier treffen wir die oben in anderer Gestalt skizzierten Verhältnisse wieder an. Ist e_2 dem Punkte e_1 bereits sehr nahe gekommen, so können wir durch Ausübung einer Substitution:

$$\frac{z' - e_1}{z' - e_4} = a \frac{z - e_1}{z - e_4},$$

welche e_1 und e_4 an Ort und Stelle läßt, den Punkt e_2 noch an jede Stelle des von e_1 und e_4 eingeschlossenen Intervalls bringen. Je weiter wir ihn aber von e_1 entfernen, um so näher wird e_3 an e_4 heranrücken. Nur die beiden Grenzfälle $e_1 = e_2$ einerseits und $e_3 = e_4$ andererseits selbst sind (wegen $a = \infty$) nicht mehr ineinander überführbar.

Nun ist im Innern des Intervalls $0 \leq t \leq 1$ der algebraische Modul λ eine eindeutige stetige Funktion $\lambda(t)$ von t . Der Grenzübergang $\lim t = 0$ liefere den durch Fig. 4 versinnlichten Fall. Ihm entspricht eine mit drei Punkten e_1, e_2, e_3' signierte z -Ebene. Letzterer Punkt ist durch

Koinzidenz von e_3 und e_4 entstanden, so daß $\lambda = 0$ geworden ist. Zu-
 folge des Stetigkeitssatzes erreicht λ hierbei stetig seinen Grenzwert $\lambda = 0$.
 Ganz entsprechend findet man, daß für $\lim t = 1$ die Funktion $\lambda(t)$ sich
 stetig der Grenze 1 annähert.

Diese Angaben enthalten nun bereits den Beweis des Fundamental-
 theorems im vorliegenden Falle vollständig. Man gehe von irgend einem
 im „Innern“ des Intervalls gelegenen Werte t aus und markiere den zu-
 gehörigen Punkt λ . Von diesem Anfangspunkte t aus lasse man den
 Punkt $t^{(0)}$ stetig bis zum Punkte $t^{(0)} = 0$ wandern. Der korrespondierende
 Punkt $\lambda^{(0)} = \lambda(t^{(0)})$ wird von der markierten Anfangsstelle λ aus stetig
 bis $\lambda^{(0)} = 0$ wandern. Man lasse zugleich vom gewählten Anfangspunkte t
 aus den Punkt $t^{(1)}$ bis 1 stetig wandern. Dabei wird $\lambda^{(1)} = \lambda(t^{(1)})$ von
 der Anfangsstelle λ aus stetig nach $\lambda^{(1)} = 1$ wandern. Das Abbild der
 Strecke von $t = 0$ bis $t = 1$ der t -Achse überträgt sich stetig eindeutig
 auf die Strecke von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1$ der λ -Achse. Zufolge des Unitäts-
 theorems können hierbei nicht einem und demselben λ zwei verschiedene
 t entsprechen: also bedeckt das Abbild die genannte Strecke der λ -Achse
 überall nur einfach. *Es handelt sich demnach hier in der Tat um ein
 gegenseitig „eindeutiges“ Entsprechen.*

Gehen wir auf das in Fig. 2 angedeutete, bezüglich der reellen
 ξ -Achse sich selbst symmetrische Gesamtpolygon zurück, so können wir
 das erhaltene Theorem in folgenden Worten aussprechen: *Die z -Ebene
 sei mit zwei der positiven Halbebene angehörenden Punkten e_1, e_2 signiert,
 denen zwei ganze Zahlen $l_1, l_2 \geq 2$, den Wert ∞ eingeschlossen, zugeordnet
 seien; die zu e_1, e_2 symmetrischen Punkte der negativen z -Halbebene seien
 e'_1, e'_2 . Es gibt stets eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe
 Funktion $\xi = f(z)$, welche die z -Ebene auf ein Kreisbogenpolygon vom
 Typus der Fig. 2 abbildet; die Punkte e_1, e_2, \dots liefern die Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$,
 an denen sich die vorgeschriebenen Winkel finden, die reelle z -Achse liefert
 das dem Polygon angehörende Segment der reellen Z -Achse, und der Kreis
 durch e_1, e_2, e'_1, e'_2 ergibt die übrigen Symmetriekreise des Polygons bezw.
 des Polygonnetzes. —*

Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1)$.

Die Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1)$, in welcher l_1 irgend eine ganze Zahl
 ≥ 2 , den Wert ∞ eingeschlossen, bedeutet, bilden ein zweidimensionales
 Kontinuum. Auch hier ist das Polygonkontinuum mit dem Gruppen-
 kontinuum identisch. Zur invarianten Darstellung dienen die Moduln
 j_2, j_3 oder, was wieder zweckmäßiger ist:

$$t_1 = \frac{j_2 - 2}{j_2}, \quad t_2 = \frac{j_3 - 2}{j_3}.$$

Wir stellen das gesamte Kontinuum gerade vollständig dar, wenn wir mit dem „Punkte“ (t_1, t_2) das hierneben in Fig. 9 gezeichnete Quadrat der t -Ebene beschreiben. Unsere erste Aufgabe wird sein, die hierbei auftretenden Grenzgebilde näher zu untersuchen.

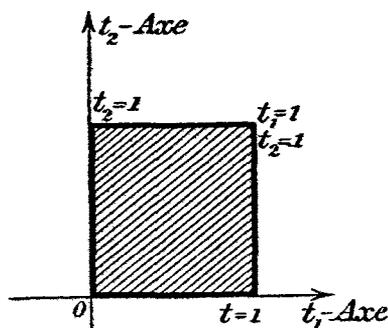


Fig. 9.

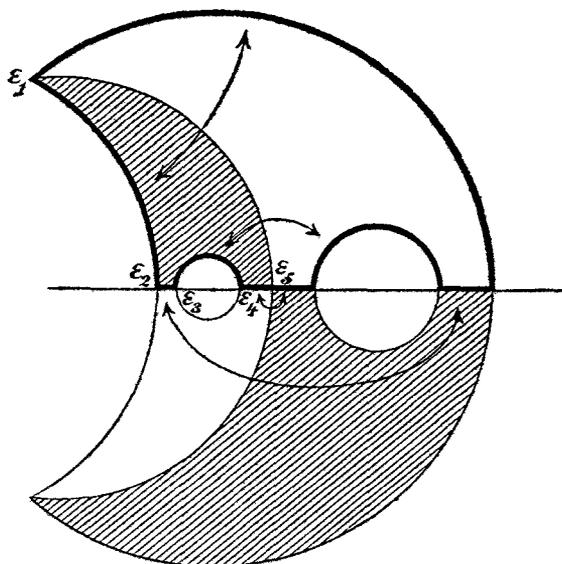


Fig. 10.

Die vorliegenden Gruppen gestatten stets Erweiterung durch Spiegelungen; die Polygone haben die in Fig. 10 dargestellte typische Gestalt. Andererseits ist die einzelne Gruppe der Signatur $(0, 3; l_1)$ stets auch durch elliptische Substitutionen der Periode 2, welche die beiden Halbebenen permutieren, erweiterungsfähig. Als DB der so erweiterten Gruppe können wir den oberen, in Fig. 10 stark umrandeten Teil des bisherigen DB wählen. Die in der Figur angedeutete Zuordnung der Randkurven bezieht sich auf diese erweiterte Gruppe, und an ihr wollen wir die Grenzfälle untersuchen. Die Ecke ε_1 gehört der elliptischen oder parabolischen Erzeugenden V_1 der ursprünglichen Gruppe an, die hyperbolische Erzeugende V_2 entspringt durch Kombination der Spiegelungen an den Symmetriekreisen $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ und $\varepsilon_3 \varepsilon_4$; endlich entsteht V_3 durch Kombination der Spiegelungen an $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ und $\varepsilon_5 \varepsilon_1$.

Die Seite $t_1 = 0$ unseres t -Quadrates erfordert $j_2 = 2$ und damit eine parabolische Substitution V_2 . Wir führen den Grenzübergang zu $t_1 = 0$ am Polygone dadurch aus, daß wir das Segment $\varepsilon_2 \varepsilon_3$ der reellen Achse auf einen Punkt zusammenziehen. So gelangen wir zum eindimensionalen Kontinuum der Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$, das sich der soeben abgeschlossenen Untersuchung subsumiert. Die Quadratseite $t_2 = 0$ liefert $j_3 = 2$. Wir ziehen hier das Segment $\varepsilon_4 \varepsilon_5$ auf einen Punkt zusammen und gelangen aufs neue zu dem eindimensionalen Kontinuum der Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$. Im Eckpunkte $t_1 = t_2 = 0$ hängen beide Kontinua zusammen; sie haben hier den gemeinsamen Grenzfall $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$.

Um die Seite $t_1 = 1$ des Quadrats zu erreichen, hat man den Grenzübergang $\lim j_2 = \infty$ zu vollziehen, was in der Art geschehen kann, daß man die Seite $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ des Polygons auf einen Punkt zusammenzieht.

Ein dem Grenzfall nahe gelegenes Polygon ist in Fig. 11 dargestellt. Im Grenzfall selbst erhalten wir als nicht-ansartende Gebilde hyperbolische Diedergruppen; dieselben bilden ein eindimensionales Kontinuum, welches man mittels der Invariante t_2 darstellt. In der Ecke $t_2 = 0, t_1 = 1$ wird die hyperbolische Diedergruppe zur parabolischen, der die Signatur $(0, 3; 2, 2, \infty)$ zukommt. Zu eben diesem Grenzfall gelangen wir auch, wenn wir uns der fraglichen Ecke längs der Geraden $t_2 = 0$ mittels der oben ausgewählten Grenzgebilde annähern. Es findet also auch an dieser Ecke ein kontinuierlicher Zusammenschluß der ausgewählten Grenzgebilde statt.

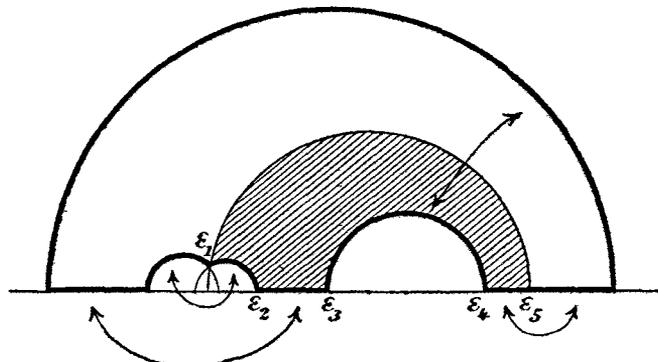


Fig. 11

Die Ecke $t_1 = 1, t_2 = 1$ des Quadrates erfordert eine besondere Betrachtung. Will man die Richtung vorschreiben, in der man sich diesem Eckpunkte aus dem Innern des Quadrates annähert, so hat man für

$$\lim \frac{j_3}{j_2} = \lim \frac{1 - t_1}{1 - t_2}$$

einen beliebigen, aber bestimmt gewählten positiven Wert anzugeben. Am Polygone kann man diesen Grenzübergang dann in der Weise vornehmen, daß man den Halbkreis $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ etwa auf den Mittelpunkt des Segmentes $\varepsilon_2 \varepsilon_5$ der reellen ξ -Achse zusammenzieht. Einem vorgeschriebenen Grenzwerte des Quotienten $\frac{j_3}{j_2}$ entspricht alsdann immer eine ganz bestimmte Endlage der beiden Symmetriekreise $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1 \varepsilon_5$. So zeigt Fig. 12

ein der Grenze nahe gelegenes Polygon, für welches $\frac{j_3}{j_2}$ sehr klein ist. So lange der vorgeschriebene Grenzwert dieses Quotienten weder 0 noch ∞ ist, erhalten wir als nicht-ansartendes Grenzgebilde die elliptische Dieder-

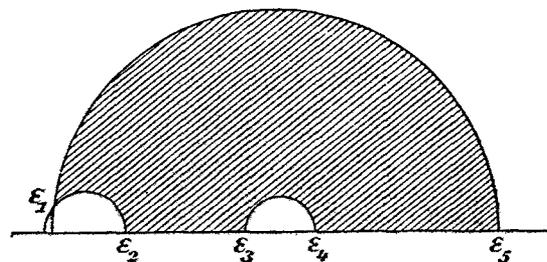


Fig. 12

ein der Grenze nahe gelegenes Polygon, für welches $\frac{j_3}{j_2}$ sehr klein ist. So lange der vorgeschriebene Grenzwert dieses Quotienten weder 0 noch ∞ ist, erhalten wir als nicht-ansartendes Grenzgebilde die elliptische Dieder-

gruppe der Signatur $(0, 3; 2, 2, 1_1)$; die sämtlichen den verschiedenen $\frac{j_3}{j_2}$ entsprechenden Gebilde sind also äquivalent. Lassen wir indessen den Kreis $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ in Figur 12 mit $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ zugleich unendlich klein werden, so gelangen wir zu eben demjenigen Grenzgebilde, welches wir vordem längs der Geraden $t_1 = 1$ an deren Endpunkte $t_2 = 1$ von den hyperbolischen Diedergruppen aus erreichten. Um demnach die Kontinuität der ausgewählten Grenzgebilde an der Ecke $t_1 = 1, t_2 = 1$ zum vollen Abschluß zu bringen, müssen wir zwischen die beiden längs der Geraden $t_1 = 1$ bzw. $t_2 = 1$ an der fraglichen Ecke erreichten Grenzgebilde alle Grenzübergänge stetig eingeschaltet denken, wie sie in eben bezeichneter Weise den Grenzwerten $\lim \frac{j_3}{j_2} = 0, \dots, \infty$ entsprechen.

Man kann diese Verhältnisse dadurch einer geometrischen Deutung unterziehen, daß man eine dritte Koordinate t_3 neben t_1 und t_2 einführt und sodann die Relation vorschreibt:

$$t_3 = \frac{1 - t_2}{2 - t_1 - t_2}.$$

Hierdurch wird t_3 als eine Funktion von t_1, t_2 erklärt, die an der Stelle $t_1 = 1, t_2 = 1$ stetig vieldeutig wird; und zwar entsprechen den aus dem

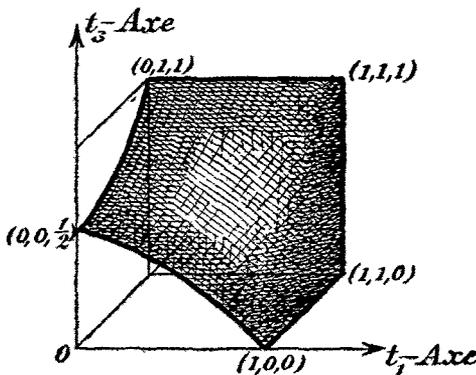


Fig. 13.

Innern des t -Quadrates möglichen Grenzübergängen zum genannten Eckpunkte stetig eindeutig die Werte des Intervalles $0 \leq t_3 \leq 1$. Deutet man die zwischen den t vorgeschriebene Relation als Hyperboloid, so erscheint das bisher betrachtete Quadrat der t -Ebene auf einen Bereich dieses Hyperboloids übertragen, der, wie Fig. 13 zeigt, in ein Fünfeck eingespannt ist. Dieses der Hyperboloidoberfläche angehörende Fünfeck wird von drei geraden Strecken und zwei Hyperbelstücken gebildet.

Der Rand des Fünfecks ist uns nunmehr ein Bild für das ringförmig geschlossene Kontinuum der ausgewählten Grenzgebilde.

Zur Darstellung des Kontinuums algebraischer Gebilde, welche den betrachteten automorphen Gebilden gegenüberstehen, knüpfen wir an die obere, stark umrandete Hälfte des in Fig. 10 dargestellten Polygons. Diese Hälfte liefert den DB der oben genannten erweiterten Gruppe, welche dem Geschlechte $p = 0$ zugehört. Es sei $z = \varphi(\zeta)$ eine zugehörige Hauptfunktion, welche längs der Symmetriekreise reelle Werte hat. Den in Fig. 10 mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5$ bezeichneten Ecken gehören dann

die Punkte e_1, e_2, \dots, e_5 der reellen z -Achse zu; man darf voraussetzen, daß

$$e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5$$

zutrifft, sofern kein Grenzfall vorliegt.

Um das Kontinuum der solcherweise signierten z -Ebenen invariant darzustellen, führen wir die beiden Doppelverhältnisse ein:

$$\lambda_1 = -\frac{(e_4 - e_1)(e_2 - e_5)}{(e_4 - e_2)(e_3 - e_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(e_1 - e_3)(e_4 - e_5)}{(e_1 - e_4)(e_5 - e_3)}.$$

Bei der vorliegenden Anordnung der Stellen e längs der reellen z -Achse ist λ_1 im Intervall $0 < \lambda_1 < 1$ gelegen. Zugleich können wir λ_1 im Innern*) dieses Intervalls beliebig auswählen und würden dadurch das Punktquadrupel e_1, e_2, e_3, e_4 im wesentlichen fixieren. Denken wir letzteres geschehen, so ist e_5 noch beliebig zwischen e_4 und e_1 verschiebbar. Es wird demnach λ_2 gleichfalls dem Intervall $0 < \lambda_2 < 1$ angehören und im Innern desselben beliebig wählbar sein. Nach dieser Auswahl ist die z -Ebene eindeutig bestimmt. Das Kontinuum der wie bezeichnet signierten z -Ebenen wird demnach durch die Punkte des in Fig. 14 gezeichneten Quadrates einer Ebene dargestellt werden, in welcher wir λ_1 und λ_2 als rechtwinklige Koordinaten deuten.

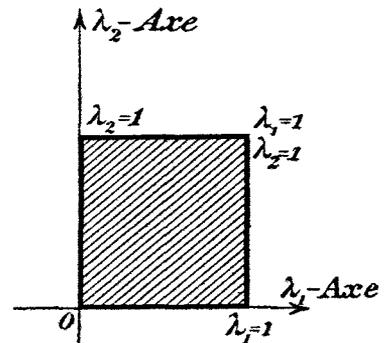


Fig. 14.

Die Grenzfälle haben wir nur insoweit zu betrachten, als dies durch die oben ausgesuchten Grenzgebilde des Gruppenkontinuums vorgezeichnet ist. Die Seite $t_1 = 0$ des Quadrates der t -Ebene hatten wir durch Zusammenrücken der Ecken $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ des Polygons erreicht. Es entsprang das eindimensionale Kontinuum der Polygone von der Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$, welches wir mittels der auf das Intervall $0 \leq t_2 \leq 1$ beschränkten Invariante t_2 darstellten. Diese Polygone liefern z -Ebenen, die mit vier Punkten $e_1, e_3 (= e_2), e_4, e_5$ signiert sind; und zwar erreicht man, falls man sich einem Punkte der Seite $t_1 = 0$ stetig annähert, den fraglichen Grenzfall der z -Ebene gleichfalls in stetigem Übergange. Wie man sieht, ist $\lambda_1 = 0$ geworden, und λ_2 hat einen gewissen Wert des Intervalls $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ angenommen. Aber für die Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$ ist das Fundamentaltheorem oben bereits bewiesen worden. Die Seite $t_1 = 0$ des t -Quadrates ist eindeutig stetig auf die Seite $\lambda_1 = 0$ des λ -Quadrates bezogen, und zwar so, daß dem Endpunkte $t_2 = 0$ der Endpunkt $\lambda_2 = 0$ zugehört, dem Endpunkte $t_2 = 1$ aber der Endpunkt $\lambda_2 = 1$. In genau

*) Die Grenzfälle $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 1$, welche sogleich ausführlich zu betrachten sind, gelten zunächst als ausgeschlossen.

derselben Weise findet man, daß sich die Seite $t_2 = 0$ des t -Quadrates auf die Seite $\lambda_2 = 0$, welche ihr im anderen Quadrate homolog ist, überträgt.

Man wird diese Betrachtung leicht für die dritte und vierte Seite des Quadrates der t -Ebene weiterführen. Den Übergang zur Seite $t_1 = 1$ vollzogen wir durch Zusammenschieben von ε_1 und ε_2 ; es entsprang ein Kontinuum hyperbolischer Diedergruppen. Man gelangt zu $\lambda_1 = 1$. Das Fundamentaltheorem für dieses Kontinuum ist zwar oben nicht erwähnt, jedoch geht die Richtigkeit desselben bereits aus der Theorie der elliptischen Funktionen hervor. Die durch $t_1 = 1$ dargestellte Seite des Quadrates der t -Ebene überträgt sich eindeutig stetig auf die homologe Seite des λ -Quadrates. Die gleiche Beziehung stellt man auf dieselbe Weise für die Seiten $t_2 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ fest.

An der Ecke $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ wird man analoge Verhältnisse erwarten, wie bei $t_1 = 1, t_2 = 1$. In der Tat findet auch bei den algebraischen Gebilden hier kein kontinuierlicher Zusammenschluß statt, falls man sich der fraglichen Ecke einmal längs der Seite $t_1 = 1$, sodann längs $t_2 = 1$ annähert. Um sogleich zu einem anschaulichen Bilde zu gelangen, wie es der Fig. 13 entspricht, führen wir das dritte Doppelverhältnis:

$$\lambda_3 = - \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_5)}{(e_1 - e_3)(e_5 - e_2)}$$

ein. Alsdann gilt:

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 \lambda_2 - 1},$$

so daß λ_3 im allgemeinen eindeutig in λ_1 und λ_2 ist. Nur an der fraglichen Stelle $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ ist λ_3 stetig vieldeutig und nimmt, falls wir uns dieser Ecke aus dem Innern des Quadrates in bestimmter Richtung annähern, einen gewissen zwischen 0 und 1 gelegenen Grenzwert an. Deuten wir λ_3 als dritte Koordinate, so liefert die Relation:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 + 1 = 0$$

eine Fläche dritter Ordnung, auf welcher das in Fig. 15 gezeichnete windschiefe

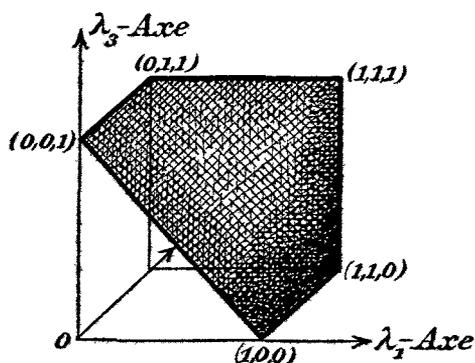


Fig. 15.

geradlinige Fünfeck gelegen ist. Das in dieses Fünfeck eingespannte Stück der Fläche tritt jetzt an die Stelle des λ -Quadrates.

Die über dem Punkte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ stehende Seite des Fünfecks ist nun eindeutig stetig auf die homologe Seite des Fünfecks im Raume der t bezogen. Zum Beweise dessen brauchen wir nicht auf ein vorausgehendes Fundamentaltheorem zurückzugehen, vielmehr genügt hier das

Existenztheorem der automorphen Funktionen. Die fragliche Seite des t -Fünfecks können wir entweder in der oben (pag. 461 u. f.) befolgten Weise oder auch (was projektiv auf dasselbe hinauskommt) im Anschluß an Fig. 10 dadurch beschreiben, daß wir die Verschwindungsstelle des Kreises $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ über das Segment $\varepsilon_2 \varepsilon_5$ der reellen ζ -Axe hinführen, während übrigens die Symmetriekreise des Polygons fest bleiben. Der bei diesem Prozeß festbleibende Grenzfall der elliptischen Diedergruppe $(0, 3; 2, 2, l_1)$ gibt als Abbild des Polygons eine mit e_1, e_2, e_5 signierte z -Ebene, wobei die Strecke $e_2 e_5$ eindeutig stetig auf das Segment $\varepsilon_2 \varepsilon_5$ bezogen ist. Beschreibt somit die Verschwindungsstelle von $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ dieses Segment, so beschreibt die Koinzidenzstelle der Punkte e_3 und e_4 die von e_2 bis e_5 reichende Strecke der reellen z -Achse, d. h. aber λ_3 wandert längs der fraglichen Fünfecksseite von 1 bis 0.

Um die gewonnenen Prämissen für den Kontinuitätsbeweis zusammenzufassen, so gilt folgendes: Jedem Punkte im Innern oder auf dem Rande des fünfeckigen Bereiches im t -Raume entspricht eindeutig ein Punkt des Bereiches im λ -Raume, der sich überall (d. i. auch unter Einschluß des Randes) stetig ändert, falls der Punkt l selbst eine stetige Änderung erfährt. Diese Beziehung ist umgekehrt höchstens eindeutig, d. h. keinem Punkte λ können zwei verschiedene Punkte t entsprechen. *Im speziellen ist die Beziehung eine solche, daß der Rand des t -Fünfecks eineindeutig stetig auf den des λ -Fünfecks bezogen ist, wobei homologe Seiten und Ecken der Fünfecke einander korrespondieren.*

Man denke sich nun den Rand des t -Fünfecks kontinuierlich in das Innere desselben hineingezogen und lasse denselben schließlich zu einem Punkte zusammenschrumpfen, etwa zu dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$, welcher dem Bereiche angehört. Dieser Prozeß soll derart geschehen, daß jeder Punkt des Bereiches (abgesehen natürlich von dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ selbst) einmal und nur einmal von der sich zusammenziehenden Kurve überstrichen wird. Da der Bereich das Stück einer Fläche zweiten Grades darstellt, so hat es keine Schwierigkeit, die gegebene Vorschrift auf die eine oder andere Weise zu erfüllen. Wir gelangen zu einer den Bereich bedeckenden Kurvenschar, welche dargestellt sei durch:

$$T(t_1, t_2, t_3; \sigma) = 0.$$

Hierbei sei σ ein Parameter, der zur Gewinnung unserer Kurvenschar das Intervall von 0 bis 1 beschreiben möge. Durch den einzelnen Punkt des Bereiches läuft eine und nur eine Kurve der Schar hindurch, ihm gehört also ein und nur ein Wert σ an. Dem Fünfeckrande gehöre $\sigma = 0$ zu, dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ aber $\sigma = 1$.

Man betrachte nun das Abbild dieser Kurvenschar auf dem λ -Fünfecke. Wir gewinnen daselbst eine entsprechende Schar, welche dargestellt sei durch:

$$\Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \sigma) = 0.$$

Für $\sigma = 0$ erhalten wir den Rand des λ -Bereiches, für $\sigma = 1$ denjenigen inneren Punkt, welcher dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ eindeutig zugeordnet ist. Sind σ_1 und σ_2 zwei verschiedene Werte des Parameters, so können die beiden zugehörigen λ -Kurven einander weder schneiden noch berühren. Jedem gemeinsamen Punkte beider Kurven würden nämlich notwendig zwei getrennte Punkte des t -Bereiches entsprechen; das aber würde dem Unitätssatze widersprechen.

Man hat nun folgende Alternative: Entweder bedecken die λ -Kurven den fraglichen Bereich überall dicht, oder man kann mindestens einen Bereich B von *endlicher* Flächenausdehnung im Innern unseres λ -Bereiches nachweisen, durch welchen überall keine λ -Kurve hindurchzieht. Zur Erleichterung der Ausdrucksweise bei der weiterfolgenden Überlegung projiziere man B auf die $\lambda_1 \lambda_2$ -Ebene, wo man als Projektion den gleichfalls endlich ausgedehnten Bereich B_0 erhalte. Innerhalb B_0 denke man einen Kreis K gezeichnet, dessen Durchmesser δ als eine bestimmte von 0 verschiedene Zahl angenommen werden kann.

Die einzelne λ -Kurve ist nun, wie ihr Original, eine einfach geschlossene, von Spaltungsstellen überall freie Kurve. Von jeder vorgelegten λ -Kurve muß man demgemäß in eindeutig bestimmter Weise die Frage beantworten können, ob sie den frei bleibenden Bereich B umschließt oder nicht. In bekannter Schlußweise gewinnen wir eine bestimmte „Zahl“ σ_0 , so daß für $\sigma < \sigma_0$ die zugehörige λ -Kurve den Bereich B umschließt, während für jede zu $\sigma > \sigma_0$ gehörende λ -Kurve B außerhalb liegt.

Sei nun ε eine kleine Zahl > 0 , über deren Auswahl wir uns sogleich noch schlüssig machen. Man konstruiere dann zunächst die beiden Kurven:

$$T(t_1, t_2, t_3; \sigma_0 - \varepsilon) = 0, \quad T(t_1, t_2, t_3; \sigma_0 + \varepsilon) = 0.$$

Man wolle nun diese beiden Kurven in irgend einer Weise eindeutig stetig aufeinander beziehen und zwar kann man dies derart ausführen, daß die Entfernung je zweier einander zugeordneten Punkte für $\lim \varepsilon = 0$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Die gleiche Zuordnung der Punkte begründe man für die korrespondierenden λ -Kurven. Da es sich beim Übergang zur λ -Kurve um eine gleichmäßig stetige Abbildung handelt, so können wir ε so klein annehmen, daß die Entfernung zweier zugeordneten Punkte der λ -Kurven stets $< \delta$ ist, wo δ die vorhin so bezeichnete Zahl ist.

Dies aber ist ein Widerspruch mit obiger Annahme. Denkt man sich nämlich, der leichteren Anschaulichkeit halber, die λ -Kurven auf die $\lambda_1 \lambda_2$ -Ebene projiziert, so umschließt zwar die zu $\sigma_0 - \varepsilon$ gehörige den Kreis K , aber nicht die zu $\sigma_0 + \varepsilon$ gehörige. Beschreibt man die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte beider Kurven, so werden diese sich notwendig über den Kreis K hinwegziehen, also sicher einmal $\geq \delta$ werden.

Hiernach läßt sich die Annahme eines offen bleibenden Bereiches mit dem Stetigkeitssatze nicht vereinigen. Es ist demnach sicher, daß durch jeden Punkt des λ -Bereiches eine λ -Kurve hindurchläuft. Das Fundamentaltheorem ist damit im vorliegenden Falle bewiesen.

Die vorstehende Überlegung, welche in ihren Grundzügen einwurfsfrei sein dürfte, kann zweifellos auf Grund der scharfen Begriffe der Funktion, der Kurve, der Stetigkeit usw., wie sie insbesondere durch Eingreifen der Mengenlehre sich herausgebildet haben, hie und da eine Präzision erfahren. Dem gleichen Bedenken waren die Andeutungen und Überlegungen unterworfen, durch welche Klein und Poincaré anfänglich ihre Kontinuitätsbetrachtungen stützten. In der Tat ist denn auch bereits von mengentheoretischer Seite unternommen worden, dem Kontinuitätsbeweise der Fundamentaltheoreme nach der fraglichen Richtung hin Ergänzung und Präzision zu verleihen. So beweist A. Schönflies*) auf Grund mengentheoretischer Betrachtungen den Satz, daß das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der Fläche eines Quadrates wieder ein einfach zusammenhängendes Flächenstück ist, ein Satz, dessen Anwendbarkeit auf unsere hier vorliegende Untersuchung unmittelbar einleuchtet. Vereinfachte Beweise dieses Schönfliesschen Satzes haben W. F. Osgood**) sowie F. Bernstein***) gegeben.

Das Hauptziel der vorliegenden Abhandlung besteht nun nicht etwa darin, eine auch für den Standpunkt der Mengenlehre in jeder Beziehung abgeschlossene Darstellung des Kontinuitätsbeweises zu liefern, vielmehr ist das vornehmliche Ziel, die Gruppenkontinua und die ihnen gegenüberstehenden Kontinua algebraischer Gebilde insoweit einer Durchforschung und Darstellung zu unterwerfen, daß die Durchführung einer Betrachtung, die ihrem Wesen nach der Mengentheorie angehört, dann keine erhebliche Schwierigkeit mehr finden dürfte. Bei den Kontinuis, welche im folgenden zur Behandlung kommen, habe ich mich darauf beschränkt, jeweils eine Betrachtung durchzuführen, welche an der soeben (pag. 466 u. f.) gegebenen, ihr genaues Modell findet. Die Analogie wird eine so unmittel-

*) Göttinger Nachr. 1899, Heft 3.

**) Göttinger Nachr. 1900, Heft 1.

***) Göttinger Nachr. 1900, Heft 1.

bare sein, daß es nicht nötig erscheinen wird, die Einzelheiten der Überlegung in jedem Falle zu wiederholen.

Die Betrachtung der Gebilde $(0, 3; l_1)$ möge durch Ausspruch des Fundamentaltheorems im Anschluß an das vollständige in Fig. 10 gezeichnete Polygon beendet werden: *Es sei eine zweiblättrige Riemannsche Fläche über der z -Ebene mit vier reellen Verzweigungspunkten e_2, e_3, e_4, e_5 vorgelegt; dieselbe sei mit zwei übereinander liegenden Punkten e_1, e_1' der reellen z -Achse, denen eine beliebige ganze Zahl $l_1 > 1$ (oder $l_1 = \infty$) zugeordnet sei, signiert (cf. Fig. 16). Auf dieser Fläche gibt es stets eine*

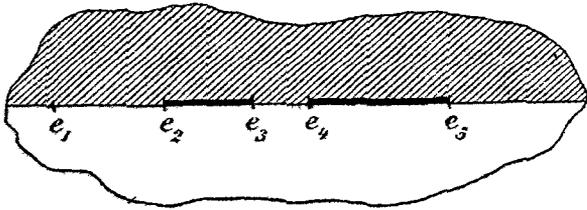


Fig. 16.

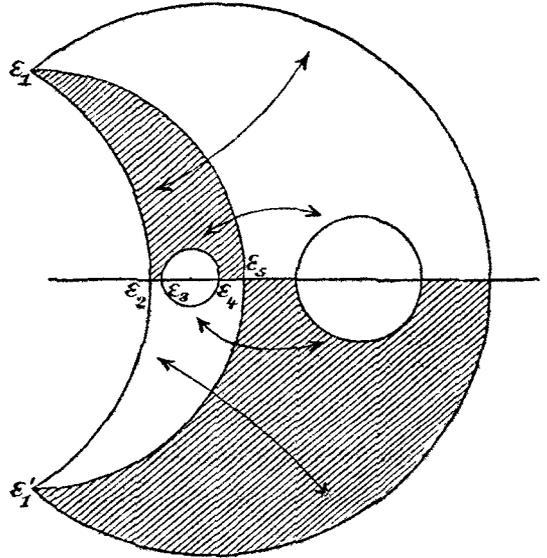


Fig. 17.

und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\xi = f(z)$, welche die Fläche konform auf ein Kreisbogenpolygon des in Fig. 17 dargestellten Typus abbildet; an den Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$, welche den Punkten e_1, e_1' entsprechen, finden die Winkel $\frac{2\pi}{l_1}$ statt, den Verzweigungspunkten e_2, \dots entsprechen die Schnittpunkte ε_2, \dots der Symmetriekreise mit der reellen ξ -Achse.

Gebilde der Signatur $(0, 3)$.

Das Polygonkontinuum der Signatur $(0, 3)$, welches wieder mit dem Gruppenkontinuum identisch ist, ist dreidimensional. Zur invarianten Darstellung dienen die drei Moduln j_1, j_2, j_3 , die wir indessen wieder durch:

$$t_1 = \frac{j_1 - 2}{j_1}, \quad t_2 = \frac{j_2 - 2}{j_2}, \quad t_3 = \frac{j_3 - 2}{j_3}$$

ersetzen. Die t_1, t_2, t_3 sind voneinander unabhängig in den Intervallen $0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1, 0 \leq t_3 \leq 1$ variabel. Deuten wir die t_1, t_2, t_3 als rechtwinklige Raumkoordinaten, so ist unser Gruppenkontinuum durch die Punkte (t_1, t_2, t_3) des durch die angegebenen Ungleichungen charakterisierten Hexaeders dargestellt.

Die typische Gestalt eines dem Innern des Kontinuums angehörenden Polygons ist in Fig. 18 dargestellt. Die zugehörigen algebraischen Gebilde sind hyperelliptisch vom Geschlechte $p = 2$. Das einzelne Gebilde gestattet zwei symmetrische Umformungen in sich, deren jede drei Symmetrielinien besitzt. Erweitert man durch die elliptischen Substitutionen

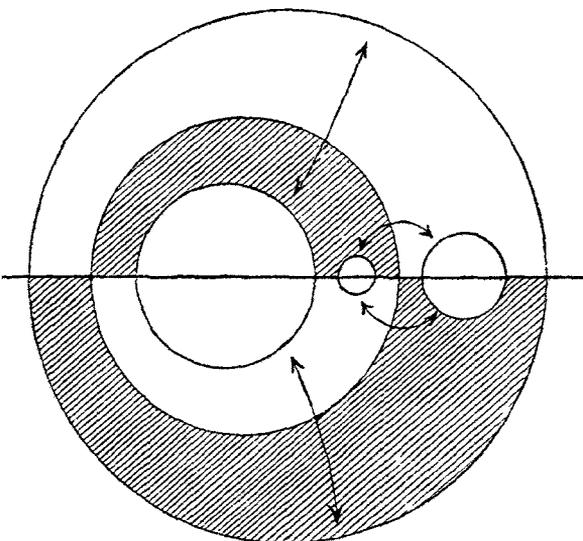


Fig. 18.

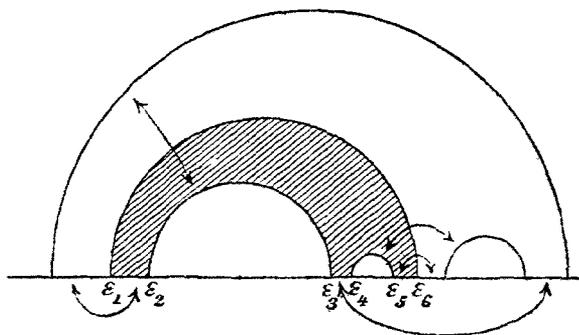


Fig. 19.

der Periode 2, deren Fixpunkte die Schnittstellen der Symmetriekreise mit der reellen ξ -Achse sind, so entspringt eine Gruppe des Geschlechtes $p = 0$, deren DB in Fig. 19 dargestellt ist. Die Invarianten t_1, t_2, t_3 können wir in leicht ersichtlicher Art den Halbkreispaaren der schraffierten Polygonhälfte zuordnen; und zwar gehöre t_1 zum Paare $\varepsilon_1 \varepsilon_6, \varepsilon_2 \varepsilon_3$, weiter t_2 zum Paare $\varepsilon_3 \varepsilon_2, \varepsilon_4 \varepsilon_5$, endlich t_3 zum Paare $\varepsilon_4 \varepsilon_5, \varepsilon_1 \varepsilon_6$,

Das gegenüberstehende Kontinuum algebraischer Gebilde stellen wir am zweckmäßigsten wieder mittels einer Hauptfunktion $z = \varphi(\xi)$ des DB der Fig. 19 dar. Die schraffierte Polygonhälfte werde auf die positive z -Halbebene abgebildet; die den Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6$ entsprechenden Werte $z = e_1, e_2, \dots, e_6$ sind dann sämtlich reell, und man darf $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_6$ annehmen, wobei das Zutreffen der Gleichheitszeichen Grenzfälle andeutet. Zur invarianten Darstellung ziehe man die folgenden drei Doppelverhältnisse heran:

$$\lambda_1 = -\frac{(e_1 - e_2)(e_5 - e_6)}{(e_1 - e_3)(e_6 - e_2)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(e_3 - e_4)(e_5 - e_2)}{(e_3 - e_5)(e_2 - e_4)},$$

$$\lambda_3 = -\frac{(e_5 - e_6)(e_1 - e_4)}{(e_5 - e_1)(e_4 - e_6)}.$$

Die Werte der λ sind auf das Intervall von 0 bis 1 eingeschränkt. Man darf dem „Innern“ dieses Intervalls drei Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ voneinander unabhängig und willkürlich entnehmen, um auf diese Weise ein einzelnes, nicht an der Grenze des Kontinuums liegendes Gebilde eindeutig zu be-

stimmen. Setzt man nämlich, was erlaubt ist, $e_1 = 0$, $e_3 = 1$, $e_6 = \infty$, so folgt:

$$e_2 = \lambda_1, \quad e_5 = e_4 \cdot \lambda_3^{-1},$$

während für e_4 die Gleichung gilt:

$$e_4^2(1 - \lambda_2) + e_4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1 - 1) + \lambda_1\lambda_3(1 - \lambda_2) = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine Wurzel, die > 1 ist; diese Wurzel ist e_4 . Deutet man auch die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als rechtwinklige Raumkoordinaten, so liefern die Bedingungen $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $0 \leq \lambda_2 \leq 1$, $0 \leq \lambda_3 \leq 1$ wieder ein reguläres Hexaeder, dessen Punkte unser Kontinuum darstellen. Dem Rande des Hexaeders entsprechen die Grenzgebilde mit koinzidierenden Punkten e .

Die Untersuchung der Beziehung des t -Hexaeders auf das λ -Hexaeder erfordert wieder ein Eingehen auf die Grenzgebilde. Für $t_3 = 0$ gewinnen wir die Grundfläche des t -Hexaeders, d. i. das Quadrat

$$t_3 = 0, \quad 0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq 1.$$

Hier gelangen wir zum Kontinuum der Gebilde von der Signatur $(0, 3; \infty)$, die bereits im vorigen Falle ihre Erledigung gefunden haben.

Die Doppelverhältnisse λ_1, λ_2 sind hier gerade in derselben Bedeutung gebraucht wie oben, während $\lambda_3 = 0$ zutrifft. Nach dem Fundamentaltheorem für Signatur $(0, 3; \infty)$ ist das Quadrat:

$$t_3 = 0, \quad 0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq 1$$

eindeutig stetig auf das Quadrat:

$$\lambda_3 = 0, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1$$

bezogen, wobei homologe Seiten und Ecken einander zugeordnet sind. Homolog heißen dabei die Seiten $t_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$ usw. In gleicher Weise findet man die Seitenflächen $t_2 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ unserer Hexaeder aufeinander bezogen, sowie drittens die Seitenflächen $t_3 = 0$ und $\lambda_3 = 0$.

Wir wollen uns jetzt irgend einem Punkte $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, t_3 = 1$ der Seitenfläche $t_3 = 1$, $0 \leq t_1 \leq 1$, $0 \leq t_2 \leq 1$ in der Art annähern, daß wir $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}$ festhalten und t_3 bis 1 anwachsen lassen; wir beschreiben somit im t -Hexaeder eine zur Grundfläche senkrecht stehende Gerade. Dieser Grenzübergang soll in zwei Weisen zur Ausführung gelangen. Wir werden dabei von dem Prinzip Gebrauch machen, daß der korrespondierende Weg im λ -Hexaeder in beiden Fällen ein und derselbe ist, was aus der Eindeutigkeit der Abbildung des t -Hexaeders auf das λ -Hexaeder und dem Stetigkeitssatze sofort hervorgeht.

Zur Erklärung der fraglichen Grenzübergänge gehen wir auf Fig. 19 zurück und verstehen unter V irgend eine hyperbolische Substitution, welche ε_2 und ε_3 zu Fixpunkten und also den Halbkreis $\varepsilon_2\varepsilon_3$ zur Bahn-

kurve hat; durch V möge die ξ -Ebene von ε_2 nach ε_3 hin verschoben werden. Lassen wir nun in Fig. 19 die Halbkreise $\varepsilon_1\varepsilon_6$ und $\varepsilon_2\varepsilon_3$ an Ort und Stelle, während wir $\varepsilon_4\varepsilon_5$ durch eine beliebige Potenz V^s von V verschieben, so behalten die Moduln t_1, t_2 ihre anfänglichen Werte $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}$, während sich t_3 als stetige Größe dem Werte 1 annähert, falls sich s als stetige Variable dem Grenzwerte $+\infty$ nähert. Dieser erste Grenzübergang liefert Koinzidenz von $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ und damit als nicht-zerfallendes Grenzgebilde die hyperbolische Diedergruppe der Invariante $t_1 = t_1^{(0)}$. In der z -Ebene bewegen sich die Punkte e_1, \dots, e_6 stetig in der Art, daß schließlich e_3, e_4, e_5 koinzidieren. Somit wird $\lambda_3 = 1, \lambda_2$ kleidet sich in eine unbestimmte Gestalt, und λ_1 ist das Doppelverhältnis des zur obigen Diedergruppe gehörenden algebraischen Gebildes. Nun gilt das Fundamentaltheorem für das Kontinuum dieser Gruppen. Es ist somit der erhaltene Grenzwert λ_1 eine Funktion $\lambda_1 = h(t_1)$, welche das Intervall $0 \leqq t_1 \leqq 1$ eineindeutig stetig (unter Einschluß der Endpunkte) auf das Intervall $0 \leqq \lambda_1 \leqq 1$ abbildet. Den erhaltenen Grenzwert des ersten Doppelverhältnisses bezeichnen wir durch $\lambda_1^{(0)} = h(t_1^{(0)})$.

Um zu untersuchen, ob sich λ_2 einem bestimmten Grenzwerte annähert, führen wir auf Grund des obengenannten Prinzips einen zweiten Grenzübergang aus, indem wir bei festbleibenden Kreisen $\varepsilon_2\varepsilon_3$ und $\varepsilon_4\varepsilon_5$ den Kreis $\varepsilon_6\varepsilon_1$ durch V^{-s} transformieren und wieder s als stetige Größe der Grenze $+\infty$ nähern. Das Grenzgebilde wird nun die hyperbolische Diedergruppe des Moduls $t_2^{(0)}$. Von den Doppelverhältnissen kleidet sich λ_1 in unbestimmte Gestalt, λ_3 wird $= 1$, und λ_2 nimmt den Grenzwert $\lambda_2^{(0)} = h(t_2^{(0)})$ an, unter $h(t)$ die eben so bezeichnete Funktion verstanden.

Wir sind so zu dem Ergebnis geführt: *Die Seitenfläche $t_3 = 1, 0 \leqq t_1 \leqq 1, 0 \leqq t_2 \leqq 1$ des t -Hexaeders ist eineindeutig stetig auf die homologe Seitenfläche $\lambda_3 = 1, 0 \leqq \lambda_1 \leqq 1, 0 \leqq \lambda_2 \leqq 1$ des λ -Hexaeders bezogen. Die Abbildung hat insofern einen besonders elementaren Charakter, als sie durch zwei Gleichungen:*

$$\lambda_1 = h(t_1), \quad \lambda_2 = h(t_2)$$

darstellbar ist. Die beiden zu den Seiten des t -Quadrates parallelen Geradenscharen übertragen sich auf die entsprechenden Geradenscharen des λ -Quadrates.

Genau dieselben Verhältnisse treffen wir bei den Seitenflächen $t_3 = 1$ und $t_1 = 1$ an.

Man betrachte nun einen ebenen Horizontalschnitt des t -Hexaeders, der ein durch $0 \leqq t_1 \leqq 1, 0 \leqq t_2 \leqq 1, t_3 = t_3^{(0)}$ gegebenes Quadrat darstellt. Auf das durch dieses Quadrat dargestellte Gruppenkontinuum lassen sich genau dieselben Überlegungen anwenden, welche wir oben für das einzelne Kontinuum der Signatur $(0, 3; l_1)$ ausführten. Dem Rande des

Quadrates können wir ein ringförmig geschlossenes Kontinuum von Grenzgebilden zuordnen, wenn wir nur an der Ecke $t_1 = 1, t_2 = 1$ zur Herstellung der vollständigen Kontinuität die einfach unendlich vielen Richtungen aus dem Innern des Quadrates nach dem Eckpunkte unterscheiden. Wir können alsdann für dieses Quadrat im speziellen den Kontinuitätsbeweis ausführen. Die den Flächen $t_1 = 1$ und $t_2 = 1$ angehörenden Quadratseiten übertragen sich auf zwei Gerade in den homologen Ebenen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$; und zwar sind es die Geraden $\lambda_3 = h(t_3^{(0)})$. Die beiden anderen Geraden übertragen sich auf zwei den Ebenen $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ angehörende Kurven, welche mit den beiden vorgenannten Geraden $\lambda_3 = h(t_3^{(0)})$ ein geschlossenes Viereck bilden. In dieses Viereck ist das Abbild der Fläche des durch $t_3 = t_3^{(0)}$ gegebenen Quadrates eingespannt, und zwar beweist man wie oben, daß es sich hier um eine (unter Einschluß der Ränder) eineindeutige stetige Beziehung handelt.

Man lege jetzt durch das t -Hexaeder $(n + 1)$ Horizontalschnitte in gleichen Abständen hindurch; der unterste Schnitt falle mit der Grundfläche $t_3 = 0$ zusammen, der oberste mit der gegenüberliegenden Seitenfläche $t_3 = 0$. Zugleich führe man das zu diesem Ebenensystem senkrecht stehende Geradenbüschel ein. Beide Gebilde übertrage man auf das λ -Hexaeder und diskutiere die entspringenden Abbildungen auf Grund des Unitäts- und des Stetigkeitssatzes; zum Zwecke der Anwendung des letzteren Satzes wird man vorschreiben, daß die Zahl n beliebig groß gewählt werden darf. Die Abbilder der Horizontalschnitte werden bei ausreichend groß gewähltem n beliebig nahe aneinander heranrücken; die Entfernungen zweier benachbarten Abbilder an irgend welchen Stellen mag man dabei mittelst der Abbilder der vertikalen Geraden messen. Man sieht, daß sich hier eine Betrachtung analog der beim Kontinuitätsbeweise für die Signatur $(0, 3; l_1)$ durchführen läßt. Man findet, daß die beiden Hexaeder (unter Einschluß ihrer Oberflächen) eineindeutig stetig aufeinander bezogen sind.

Das Fundamentaltheorem für die Gebilde der Signatur $(0, 3)$ können wir so formulieren: Gegeben sei eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit sechs auf der reellen Achse liegenden Verzweigungspunkten e_1, e_2, \dots, e_6 . Man lege einen ersten Rückkehrschnitt in bekannter Weise um e_1 und e_2 , einen zweiten um e_2 und e_3 usw. So entspringen im ganzen sechs Rückkehrschnitte, die wie die Glieder einer geschlossenen Kette ineinandergreifen. Man denke die Rückkehrschnitte jetzt um ihre jeweiligen Punkte e zusammengezogen, sodaß der einzelne Schnitt nur noch aus zwei koinzidierenden Segmenten der reellen Achse und aus zwei dieselben verbindenden unendlich kleinen Halbkreisen um die betreffenden Punkte e besteht. Alsdann gilt der Satz: *Auf der fraglichen Riemannschen Fläche*

gibt es zwei und nur zwei wesentlich verschiedene polymorphe Funktionen $\xi = f(z)$, welche die Fläche auf Hauptkreispolymone vom Typus der Fig. 18 abbilden. Bei der einen Funktion $\xi = f(z)$ gehen der erste, dritte und fünfte Rückkehrschnitt in Segmente der reellen ξ -Achse über, bei der anderen aber der zweite, vierte und sechste. —

III. Die Gebilde des Charakters $p = 1, n = 1$.

Die Transformationstheorie der Polygone vom Charakter $(1, 1)$ ist in A. F. I pag. 320 ff. dargestellt, die entsprechenden birationalen Transformationen der Moduln sind a. a. O. pag. 397 besprochen. Einige weitere vorläufige Angaben über die hier eintretende automorphe Modulgruppe und ihren DB sind in der Note „Über die Theorie der automorphen Modulgruppen“*) gemacht. Wir müssen jetzt ausführlich auf diesen DB eingehen und bedienen uns dabei, einem allgemeinen Prinzipie folgend, der Theorie der Normalpolygone.

DB der automorphen Modulgruppe bei $p = 1, n = 1$.

Nach A. F. I pag. 265 gibt es bei den Normalpolygone der Gattung $p = 1, n = 1$ nur einen „allgemeinen Typus“, nämlich das Zehneck der Fig. 20 mit einer festen Ecke e_1 und drei Zyklen zufälliger Ecken. Man bewege nun das Polygonzentrum C und halte gerade in dem Augenblicke

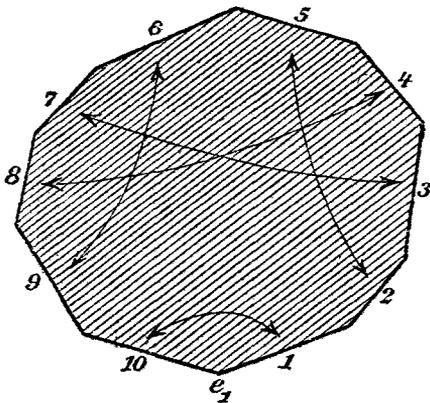


Fig. 20.

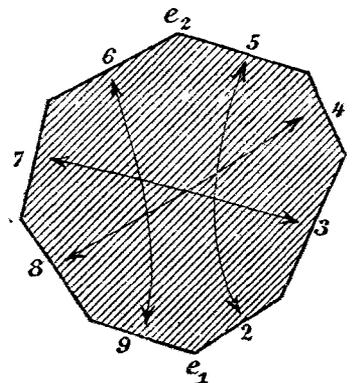


Fig. 21.

an, daß die feste Ecke e_1 im Begriffe steht, dem Polygon verloren zu gehen. Die Seiten 1 und 10 haben sich auf Punkte zusammengezogen, das Polygon ist zu dem Achteck der Fig. 21 mit zwei festen Ecken e_1, e_2 geworden, die einen Zyklus bilden. Das Zentrum C liegt jetzt auf dem Mittellote der Verbindungsgeraden der beiden festen Ecken e_1, e_2 . Man verschiebe C auf diesem Mittellote nach rechts, bis e_1 und e_2 gleichzeitig

*) Göttinger Nachrichten von 1896 Heft 2.

im Begriffe sind, dem Polygone verloren zu gehen. In diesem Augenblicke haben sich die Seiten 6 und 9 auf Punkte zusammengezogen; das Polygon ist zu einem Sechseck geworden, dessen Gegenseiten einander zugeordnet sind (cf. Fig. 22). Die drei festen Ecken e_1, e_2, e_3 bilden einen Zyklus, ebenso die drei zufälligen Ecken.

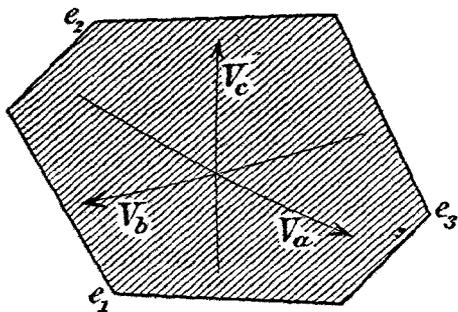


Fig. 22.

Das gewonnene Normalsechseck liefere die Gruppenerzeugenden V_a, V_b, V_c , wie in Fig. 22 angezeigt ist. Welche unter den erzeugenden Substitutionen V_a sein soll, möge einstweilen dahingestellt bleiben; später wird darüber zu entscheiden sein.

Die erzeugenden Substitutionen sind verbunden durch die Relation:

$$V_a V_b V_c = 1.$$

Die drei zu den festen Ecken gehörenden gleichberechtigten Substitutionen $V_{e_1}, V_{e_2}, V_{e_3}$, welche sowohl elliptisch als parabolisch als auch hyperbolisch sein mögen, sind gegeben durch:

$$V_{e_1} = V_b V_a V_c, \quad V_{e_2} = V_c V_b V_a, \quad V_{e_3} = V_a V_c V_b.$$

Die gemeinsame Invariante j_e dieser Substitutionen ist nach A. F. I pag. 360 negativ anzunehmen.

Jede Gruppe unserer Art ist bekanntlich eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 in einer Gruppe vom Charakter $(0, 4)$ und zwar handelt es sich hierbei um die Signatur $(0, 4; 2, 2, 2)$ für $j_e < -2$ (hyperbolischer Fall) oder um die Signatur $(0, 4; 2, 2, 2, \infty)$ für $j_e = -2$ (parabolischer Fall) oder endlich um $(0, 4; 2, 2, 2, 2l_1)$ für $j_e > -2$ (elliptischer Fall). Einen DB dieser erweiterten Gruppe hat man in dem (in Fig. 23 schraffierten) Dreiecke e_1, e_2, e_3 . Das Zentrum C gehört diesem Dreiecke an. Die Fixpunkte der drei elliptischen Erzeugenden der Periode 2 gewinnt man, indem man von C Lote auf die Seiten des Dreiecks fällt. In Fig. 23 sind diese Punkte mit e'_1, e'_2, e'_3 bezeichnet; ist $j_e \geq -2$, so sind sie die

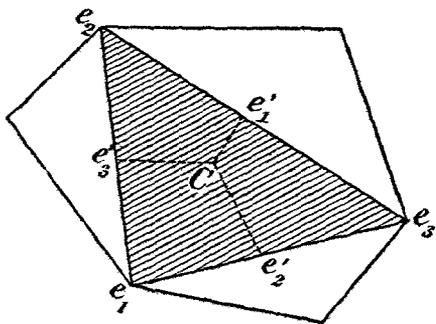


Fig. 23.

Seitenmitten des Dreiecks. Im parabolischen Fall ($j_e = -2$) würde diese Bemerkung unstatthaft sein, weil die Punkte e_1, e_2, e_3 im Sinne der zugrundeliegenden projektiven Maßbestimmung unendlich fern sind.

Man erkennt nun sofort im schraffierten Dreieck der Fig. 23 das zum Zentrum C gehörende Normalpolygon der erweiterten Gruppe. Weiter

folgt: Für die Gruppe $(0, 4)$ ist der Normalbereich in Gestalt des fraglichen Dreiecks eindeutig bestimmt. Dies folgt unmittelbar aus der Theorie der Normalpolygone (siehe z. B. den „Reziprozitätssatz“ der Normalpolygone in A. F. I pag. 260). In der Tat erinnere man sich, daß man bereits die gesamten Normalpolygone einer vorgelegten Gruppe gewinnt, falls man mit dem Zentrum einen DB der Gruppe beschreibt. Liegt aber das Zentrum im Innern des Vierecks $e_1 e_2' C e_3'$ der Fig. 23, so ragt das zugehörige Polygon nur an e_1 , aber an keinen weiteren mit e_1 äquivalenten Punkt heran. Ist das Zentrum auf der Geraden $e_2' C$, aber nicht im Endpunkt C selbst, gelegen, so ragt das Polygon an e_1 und e_3 , aber nicht an einen dritten mit jenen äquivalenten Punkt heran. Durch Fortsetzung der Betrachtung erkennt man die Richtigkeit der Behauptung.

Einen DB der ursprünglichen Gruppe $(1, 1)$ kann man auch dadurch gewinnen, daß man das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ etwa längs der Seite $e_1 e_2$ zum „Parallelogramm“*) ergänzt. Letzteres wird alsdann durch die zum Fixpunkte e_3' gehörende Substitution V_{e_3} , der Periode 2 in sich transformiert. Der Punkt C gehe hierbei über in C' . Für die einzelne Gruppe des Charakters $(1, 1)$ gibt es zwei und nur zwei Normalsechsecke unserer Art; beide sind miteinander kongruent und liefern demnach dieselben Invarianten. In der Tat erkennt man sofort, daß außer C nur noch der Punkt C' des Parallelogramms ein Sechseck liefert, welches letztere aber aus dem ersteren durch V_{e_3} hervorgeht. —

Bei der Umkehrung der durchlaufenen Entwicklung knüpfen wir an ein beliebiges Dreieck $e_1 e_2 e_3$, dessen Ecken zugleich entweder innerhalb oder auf oder außerhalb der die Maßbestimmung begründenden Ellipse gelegen sind. Im ersten Fall soll die Winkelsumme des Dreiecks $\frac{\pi}{l_1}$ sein, wo l_1 eine gegebene ganze Zahl > 1 ist. Im ersten und dritten Falle wird ferner gefordert, daß der Mittelpunkt C des umgeschriebenen Kreises, der durch das Dreieck eindeutig bestimmt ist, dem Innern des Dreiecks oder einer Seite desselben angehört. Im zweiten Falle werde ein von einer Ecke verschiedener Punkt im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks willkürlich gewählt und als Punkt C bezeichnet. Die Lote von C auf die Seiten mögen e_1' , e_2' , e_3' heißen; im ersten und dritten Falle handelt es sich um die Seitenmitten. Die zu e_1' , e_2' , e_3' als Fixpunkten gehörenden elliptischen Substitutionen der Periode 2 seien $V_{e_1'}$, $V_{e_2'}$, $V_{e_3'}$. Man erkennt ohne weiteres: Das so ausgestattete Dreieck ist der DB einer aus $V_{e_1'}$, $V_{e_2'}$, $V_{e_3'}$ zu erzeugenden Gruppe vom Charakter $(0, 4)$, und zwar haben wir im Dreieck das zum Punkte C als Zentrum gehörende Normalpolygon vor uns.

*) Im Sinne der zugrundeliegenden projektiven Maßbestimmung heißt „Parallelogramm“ soviel wie „Viereck mit gleichen Gegenseiten“.

Der Übergang zum Sechseck der Untergruppe vom Charakter (1, 1) ist nun sofort vollzogen. Wir merken als Hauptergebnis an: *Das im wesentlichen eindeutig bestimmte Normalsechseck einer Gruppe vom Charakter (1, 1) ist durch die Eigenschaft als charakterisiert anzusehen, daß das Zentrum C dem Innern oder dem Rande des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ angehört.* —

Zur Darstellung der Polygonkontinua, welche bei der Gattung $p = 1$, $n = 1$ auftreten, dienen nach A. F. I pag. 360 die Invarianten j_a, j_b, j_c der Erzeugenden V_a, V_b, V_c^* , denen wir jedoch hier sogleich die vorhin mit j_e bezeichnete Invariante der gleichberechtigten Substitutionen $V_{e_1}, V_{e_2}, V_{e_3}$ hinzufügen. Zwischen diesen Invarianten besteht die Relation:

$$j_a^2 + j_b^2 + j_c^2 - j_a j_b j_c = j_e + 2.$$

Zur Einführung einer geometrischen Deutung setzen wir:

$$j_a : j_b : j_c : 1 = x : y : z : t$$

und interpretieren x, y, z, t als homogene Raumkoordinaten. Die angegebene Relation nimmt alsdann die Gestalt an:

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz - (j_e + 2)t^3 = 0.$$

Für den Einzelwert j_e sehen wir uns hiernach auf eine bestimmte Fläche dritter Ordnung F_3 eingeschränkt. Was diese Werte j_e angeht, so haben wir die dreifache Fallunterscheidung, daß entweder $j_e > -2$ und dann gleich $-2 \cos \frac{\pi}{4}$ ist (elliptischer Fall) oder $j_e = -2$ zutrifft (parabolischer Fall) oder endlich $j_e < -2$ gilt (hyperbolischer Fall).

Für jeden hiernach zulässigen speziellen Wert j_e besitzt die zugehörige F_3 ein längs der Ebene $t=0$ in das Koordinatendreieck $xyz=0$ eingespanntes Flächenstück, welches sackartig im Innern des Koordinatentetraeders hängt und einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt. Für $\lim j_e = -\infty$ ist die Fläche des eben genannten Dreiecks selbst die Grenzlage der gedachten Flächenstücke F_3 . Für $j_e = -2 \cos \frac{\pi}{4}$ ist dieses einfach zusammenhängende Flächenstück F_3 direkt das Bild des Polygonkontinuums, von dem man weiß, daß es einen einfach zusammenhängenden zweidimensionalen Bereich darstellt. Alle für $j_e < -2$ eintretenden Flächenstücke füllen den Raum zwischen der besonderen F_3 :

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz = 0$$

und der Fläche des wiederholt genannten Dreiecks in der Ebene $t=0$ einfach und vollständig aus. *Der so entspringende einfach zusammenhängende dreidimensionale Bereich ist uns das Gegenbild des einen im*

*) In A. F. I pag. 360 war $j_c = j_{ab}$ als Simultaninvariante des Paares V_a, V_b aufgefaßt.

hyperbolischen Falle eintretenden Polygonkontinuums. Die Fälle $j_c = -2$ kann man nach Belieben als Randgebilde des letzteren Kontinuums auffassen oder auch für sich behandeln und alsdann als Grenzlage den elliptischen Fällen anreihen.

Daß die einzelne F_3 durch die birationalen Modultransformationen in sich übergeführt wird, wurde bereits in A. F. I pag. 397 festgestellt. Es gilt nun das allgemeine Prinzip, daß, wenn ein *einfach* zusammenhängender Bereich durch eine Gruppe eindeutiger stetiger Transformationen in sich übergeführt wird, im Falle der eigentlichen Diskontinuität der Gruppe der DB derselben als solcher gleichfalls einen *einfach* zusammenhängenden Bereich darstellt. Bei unseren zwei- bzw. dreidimensionalen Bereichen, welche die Polygonkontinua darstellen, muß nun die Gestalt der einfach zusammenhängenden DB der Modulgruppen implizite in den obigen Entwicklungen über die Normalsechsecke enthalten sein. Nur darf man hierbei nicht übersehen, daß oben lediglich nur erst die Reihenfolge der Erzeugenden V_a, V_b, V_c am Sechseck festgesetzt wurde. Dagegen ist eine zyklische Permutation derselben und also der Invarianten j_a, j_b, j_c noch statthaft.

Da auch für $j_e < -2$ diese Invariante j_e gegenüber den Modultransformationen unverändert bleibt, so können wir auch im hyperbolischen Falle damit beginnen, den BD auf der einzelnen F_3 zu fixieren. Man knüpft nun am einfachsten an das oben betrachtete Dreieck $e_1 e_2 e_3$ an. Ist dasselbe gleichseitig, resp. ist im parabolischen Falle der Punkt C der Höhenschnittpunkt, so hat das Dreieck den Charakter eines Normalpolygons. Andererseits ist in diesem Falle $j_a = j_b = j_c$ und also $x = y = z$; dieser Punkt ist also auf der F_3 jedenfalls dem gesuchten DB angehörig. Von dieser Anfangsstelle aus werden wir den fraglichen Bereich auf der F_3 bekommen, falls wir das Dreieck unter Festhaltung seiner Winkelsumme allen solchen stetigen Abänderungen unterwerfen, bei welchen das Zentrum C , wie oben vorgeschrieben, dem Dreieck erhalten bleibt.

Hiernach gelangen wir an den Rand des zu konstruierenden Bereiches, wenn C auf eine der drei Seiten des Dreiecks rückt. Prüfen wir etwa den Fall, daß C auf die Seite $e_1 e_2$ rückt. Die Fig. 24, welche durch sich selber verständlich ist, deutet diesen Grenzübergang an. Man erkennt

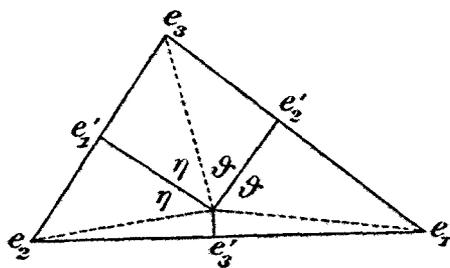


Fig. 24.

sofort, daß in der Grenzlage selbst die mit φ und η bezeichneten Winkel $\varphi + \eta = \frac{\pi}{2}$ geben. Führen wir demnach die Variable ξ derart ein, daß

der Hauptkreis die reelle ξ -Achse liefert, der Punkt C mit $\xi = i$ zusammenfällt und die Gerade $e_3'e_2'$ zur imaginären ξ -Achse wird, so liefert die Gerade $e_1'e_3'$ den Einheitskreis, und das längs e_1e_2 zum „Parallelogramm“ ergänzte Dreieck liefert den DB der Gruppe (1, 1) in Gestalt der Fig. 25*).

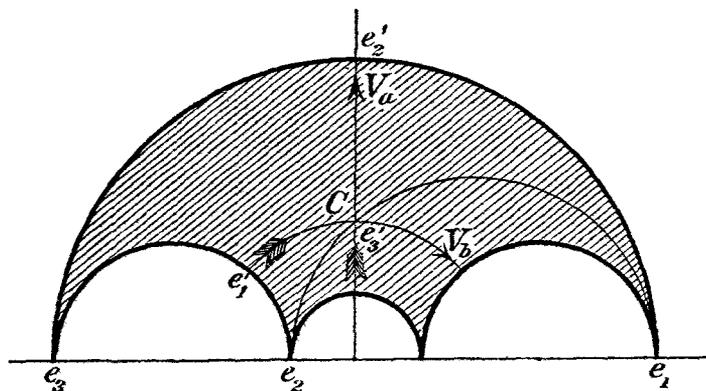


Fig. 25.

Man hat also hier mit einem symmetrischen Gebilde zu tun, und insbesondere läßt sich die zugehörige Gruppe (0, 4) durch Spiegelungen derart erweitern, daß die erweiterte Gruppe ein von

vier Symmetriekreisen eingegrenztes Viereck zum DB hat. Die Erzeugenden V_a, V_b der Gruppe (1, 1) haben die Gestalt:

$$V_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad V_b = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

wie aus der Lagerung des DB in Fig. 25 direkt hervorgeht. Die Invarianten haben die Werte:

$$j_a = \alpha_1 + \delta_1, \quad j_b = 2\alpha_2, \quad j_c = j_{ab} = \alpha_2(\alpha_1 + \delta_1);$$

zwischen ihnen besteht demnach die Relation:

$$j_a j_b - 2j_c = 0.$$

Umgekehrt folgt aus dieser Relation die hier vorliegende Gestalt des DB der Gruppe (1, 1). Nehmen wir nämlich, was uns freisteht, die Substitution V_a in der Gestalt $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$ an, so folgt für $V_b = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$ aus jener Relation:

$$(\alpha_1 + \delta_1)(\alpha_2 + \delta_2) = 2(\alpha_1\alpha_2 + \delta_1\delta_2),$$

$$(\alpha_1 - \delta_1)\delta_2 = (\alpha_1 - \delta_1)\alpha_2.$$

Nun ist $\alpha_1 \geq \delta_1$, und also folgt $\alpha_2 = \delta_2$. Die Gestalt von V_a , sowie die Gleichung $\alpha_2 = \delta_2$ bleiben erhalten, falls man jetzt nachträglich noch vermöge einer Substitution der Gestalt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ transformiert. Letztere kann man dann so wählen, daß nach der Transformation die Gleichung $\beta_2 = \gamma_2$ zutrifft. Es wird demnach jedes Gebilde mit $j_a j_b = 2j_c$ am Rande des DB der automorphen Modulgruppe liegen.

*) Als Beispiel ist in der Figur der parabolische Fall angenommen.

Die Fälle, daß C auf die zweite oder dritte Seite des Dreiecks rückt, behandelt man genau so. Man gelangt zu dem vorläufigen Ergebnis: Zur Gewinnung eines DB der automorphen Modulgruppe auf der einzelnen F_3 :

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz - t^3(j_e + 2) = 0$$

grenze man auf derselben einen dreieckigen Bereich ein, begrenzt durch drei Kurven, welche auf der F_3 durch die drei Flächen zweiten Grades F_2 :

$$yz - 2xt = 0, \quad zx - 2yt = 0, \quad xy - 2zt = 0$$

ausgeschnitten werden.

Die hier vorliegenden geometrischen Verhältnisse wird man sich leicht klar machen; einige Andeutungen mögen genügen. Man deute etwa hierbei x, y, z als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten, indem man $t = 1$ setzt. Dann beachte man erstlich, daß die F_3 gänzlich im Oktanten $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$ verläuft, wobei die Ebene $x = 2$ nur den unendlich fernen Punkt der Geraden $y = z$ mit der F_3 gemein hat, und wobei Entsprechendes von den Ebenen $y = 2, z = 2$ gilt. Die drei Geraden $x = 2, y = z; y = 2, z = x; z = 2, x = y$ stehen nun auch zu den F_2 in nächster Beziehung. Diese F_2 sind jetzt hyperbolische Paraboloiden; das erste von ihnen läuft durch die zweite und dritte Gerade hindurch, das zweite durch die dritte und erste, das dritte durch die erste und zweite.

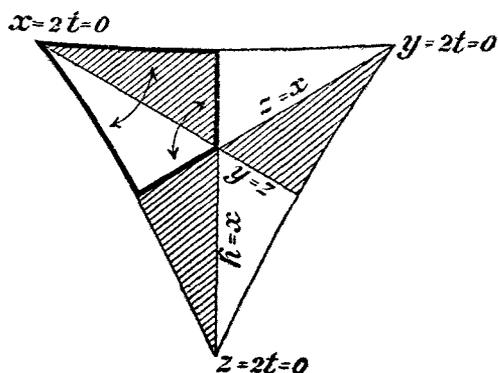


Fig. 26.

Mit Benutzung dieser Angaben wird man sich den Verlauf der fraglichen Flächen leicht weiter klar machen. Bei Ausspruch des Ergebnisses führen wir die vierte Variable und damit die projektive Denkweise wieder ein. Die drei F_2 schneiden auf der F_3 einen dreieckigen Bereich aus, dessen Eckpunkte der Ebene $t = 0$ als Seitenmitten des Koordinatendreiecks $x \cdot y \cdot z = 0$ angehören. Wie in der schematisch zu verstehenden Fig. 26 bereits angedeutet wurde, hat das gewonnene Dreieck die drei durch die Ebenen $y = z, z = x, x = y$ ausgeschnittenen Kurven zu Symmetrielinien.

Diese drei Symmetrielinien zerlegen das Dreieck in sechs abwechselnd symmetrische und kongruente kleinere Dreiecke. Zum DB der automorphen Modulgruppe gelangen wir nun unmittelbar durch die Festsetzung, daß die Invariante j_a weder größer als j_b , noch größer als j_c sein soll, daß also die Ungleichungen $x \leq y, x \leq z$ gelten sollen. Wir finden: Auf der F_3 ist das in Fig. 26 stark umrandete Doppeldreieck ein DB der

automorphen Modulgruppe; die Zuordnung der Seiten des Doppeldreiecks ist in der Figur angegeben.

Um daraufhin die Erzeugenden dieser Modulgruppe zu berechnen, bemerken wir, daß letztere offenbar durch Spiegelungen erweitert werden kann. Der DB der erweiterten Gruppe sei das schraffierte Dreieck des eben gewonnenen DB . Die Spiegelungen an den drei Seiten desselben sind:

$$(S_1) \quad x' : y' : z' : t' = xt : yt : (xy - zt) : t^2,$$

$$(S_2) \quad x' : y' : z' : t' = x : z : y : t,$$

$$(S_3) \quad x' : y' : z' : t' = y : x : z : t.$$

Um die geometrische Bedeutung von S_1 darzulegen, beachte man, daß die Tetraederecke $x = y = t = 0$ der F_3 angehört. Der von dieser Ecke an die F_3 gehende Tangentenkegel berührt, wie man leicht ausrechnet, längs der Symmetrielinie von S_1 , d. h. längs der Seite $xy - 2zt = 0$ unseres DB . Auf der einen Seite dieses Kegels laufen vom Scheitelpunkte lauter Strahlen aus, welche die F_3 in zwei weiteren, getrennt liegenden Punkten schneiden. Dann ist die Bedeutung von S_1 , daß diese Spiegelung jeweils zwei solche Schnittpunkte miteinander permutiert. Für die Spiegelungen S_2 und S_3 sind ganz entsprechende Bemerkungen gültig. Übrigens gelten vorstehende Angaben für alle F_3 , d. i. für jeden der bei uns in Betracht kommenden Werte von j_e .

Die Erzeugenden der ursprünglichen Modulgruppe berechnen sich nun so:

$$(T_1 = S_1 S_2), \quad x' : y' : z' : t' = xt : zt : (xz - yt) : t^2,$$

$$(T_2 = S_2 S_3), \quad x' : y' : z' : t' = y : z : x : t.$$

Diese Formeln sind in Übereinstimmung mit den bezüglichlichen Angaben in A. F. I, wo die Transformationen der Moduln aus den Abänderungen des kanonischen Schnittsystems auf der Riemannschen Fläche berechnet wurden.

Der ganzen hier vorliegenden automorphen Modulgruppe entspricht nun eine Einteilung der einzelnen Flächenschale F_3 in ein Netz unendlich vieler Dreiecke, welche diese Schale lückenlos und einfach bedecken, und welche gegen den Rand der Schale (das in der Ebene $t = 0$ gelegene Koordinatendreieck) unendlich klein werden. Eine besondere Betrachtung erfordert hierbei noch

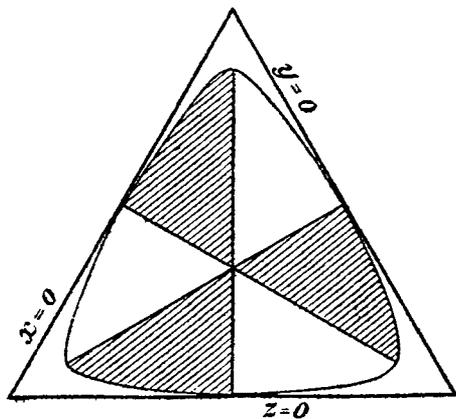


Fig. 27.

der Grenzübergang $\lim j_e = -\infty$, wo im Grenzfalle selbst die F_3 zur Fläche des öfter genannten Koordinatendreiecks geworden ist. Einen der Grenze nahe gelegenen Fall können wir am kürzesten durch die (schematisch zu verstehende) Fig. 27 beschreiben. Die Symmetrielinien von S_1, S_2, S_3 ziehen

sich immer mehr an die Ecken des fraglichen Koordinatendreiecks heran. Im Grenzfalle selber sind vom ganzen Dreiecksnetze nur die sechs den Punkt $x = y = z, t = 0$ rings umgebenden Dreiecke übrig geblieben, welche die Fläche des Koordinatendreiecks bereits vollständig füllen; das gesamte übrige Netz hat sich auf den Rand des Dreiecks zusammengezogen.

Um jetzt für $j_e \leq -2$ zur Darstellung des in diesem Falle dreidimensionalen Gruppenkontinuums zu gelangen, haben wir auf allen zugehörigen Schalen F_3 nach Maßgabe des in Fig. 26 stark umrandeten Doppeldreiecks den DB der automorphen Modulgruppe eingegrenzt zu denken. Diese kontinuierlich aufeinander folgenden Doppeldreiecke liefern als Gegenbild des fraglichen Gruppenkontinuums eine Hexaeder, welches durch drei Ebenen:

$$x - y = 0, \quad x - z = 0, \quad t = 0,$$

zwei Flächen zweiten Grades:

$$xy - 2zt = 0, \quad xz - 2yt = 0$$

und die Fläche dritter Ordnung:

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz = 0$$

eingegrenzt ist. Durch die Operation T_1 wird die eine F_2 in die andere transformiert, durch T_2 die Ebene $x = z$ in die durch $y = x$ dargestellte. —

Gebilde der Signatur $(1, 1; l_1)$.

Indem wir l_1 als ganze Zahl > 1 oder als ∞ gewählt denken, wenden wir uns zur Spezialbetrachtung des Gruppenkontinuums der Signatur $(1, 1; l_1)$, welches wir auf der zugehörigen F_3 durch die Punkte des in Fig. 26 stark umrandeten Doppeldreiecks darstellen. Letzteres ragt mit einer Spitze an die Grenzkurve der Flächenschale F_3 heran. Zur Vermeidung späterer Unterbrechungen müssen wir zunächst feststellen, zu welchen Grenzgebilden man geführt wird, falls man in dem ebengenannten DB der automorphen Modulgruppe oder auf dem Rande dieses DB an die fragliche Spitze herangeht.

Zu diesem Ende setzen wir den DB der Gruppe zunächst in die Gestalt eines „Parallelogramms“, dessen Gegenseiten durch V_a und V_b aufeinander bezogen sind (schraffierter Bereich der Fig. 28). Als dann gehe man durch „erlaubte Abänderung“ zu dem stark umrandeten Bereich, indem man das obere Stück des Parallelogramms längs der von e_2' ausziehenden Mittellinie abschneidet und unten anhängt. Der neue DB ist

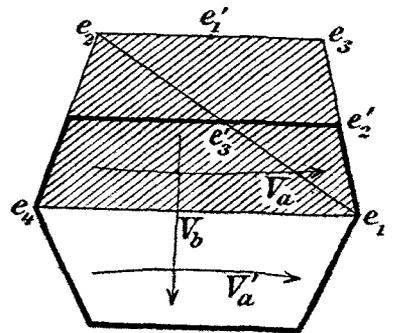


Fig. 28.

ein Sechseck, welches als Erzeugende die beiden gleichberechtigten Substitutionen V_a, V_a' und die Substitution V_b liefert.

Der Grenzübergang zur gekennzeichneten Spitze des auf der F_3 gelegenen Doppeldreiecks erfordert nun $\lim j_a = 2, \lim j_b = \infty$. Ein der Grenzlage nahegelegenes Sechseck ist in Fig. 29 dargestellt. Im Grenzfalle selbst ziehen sich die beiden durch V_b einander zugewiesenen Seiten auf Punkte der fundamentalen Ellipse der projektiven Maßbestimmung zusammen, die beiden gleichberechtigten Substitutionen V_a, V_a' werden parabolisch. Das entspringende Viereck hat somit zwei parabolische Spitzen, sowie zwei zu einem Zyklus gehörende elliptische Ecken (seitlich in der Fig. 29), wobei die beiden an diesen Ecken liegenden Winkel (wie auch schon an den Sechsecken) einander gleich und gleich $\frac{\pi}{l_1}$

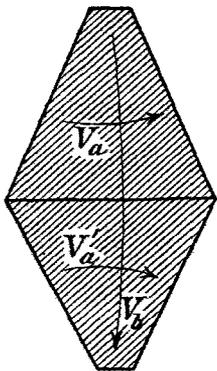


Fig. 29.

sind. Wir haben hiernach den DB der Gruppe von der Signatur $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$ gewonnen: Jeder Übergang aus dem Innern des DB der automorphen Modulgruppe nach der bei $x = 2t = 0$ gelegenen Spitze führt als Grenzgebilde zu der Gruppe von der Signatur $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$.

Unserem Gruppenkontinuum steht das Kontinuum der mit einem Punkte e signierten Riemannschen Flächen des Geschlechtes $p = 1$ gegenüber. Eine Riemannsche Fläche des Geschlechtes 1 läßt stets eine kontinuierliche Gruppe von Transformationen in sich zu, und unter letzteren kann man stets solche angeben, welche eine beliebige Stelle der Fläche in eine beliebige andere überführen. Die Signierung einer einzelnen Stelle e ist demnach hier ohne Bedeutung, so daß wir mit dem Kontinuum der algebraischen Gebilde mit $p = 1$ schlechthin zu operieren haben.

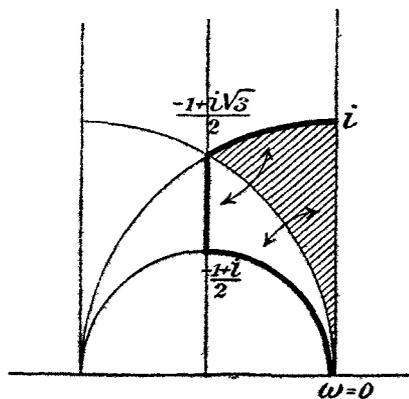


Fig. 30.

Die für den vorliegenden Zweck geeignetste Darstellung des fraglichen Kontinuums ist die durch die Punkte eines Doppeldreiecks des der Theorie der elliptischen Modulfunktionen zu Grunde liegenden Netzes der Dreieck ein der ω -Halbebene. Und zwar wählen wir am passendsten das in Fig. 30 skizzierte Doppeldreieck, das wir den in Fig. 26 stark umrandeten DB der automorphen Modul-

gruppe gegenüberstellen. Diese Auswahl des Doppeldreiecks setzt voraus, daß den Substitutionen V_a, V_b, V_c die folgenden Transformationen des dem elliptischen Gebilde angehörenden Integrals erster Gattung entsprechen:

$$(V_a) \quad u' = u + \omega_1,$$

$$(V_b) \quad u' = u + \omega_2,$$

$$(V_c) \quad u' = u - \omega_1 - \omega_2.$$

Wir untersuchen nunmehr die Abbildung des auf der F_3 gelegenen Doppeldreiecks auf das ω -Doppeldreieck und beginnen mit dem Rande des ersteren Bereiches. Betrachten wir zunächst die der Kurve $xy - 2zt = 0$ angehörende Seite des Bereiches! Die zugehörigen Gruppen- DB haben den in Fig. 25 dargestellten Typus, und da die hier vorliegenden Symmetrien bei Abbildung auf die Ebene des Integrales u erhalten bleiben, so ist das in der u -Ebene gelegene Periodenparallelogramm ein Rechteck. Speziell entspricht der Ecke $x = y, xy = 2zt$ ein Quadrat, während übrigens wegen $j_a < j_b$ notwendig $|\omega_1| < |\omega_2|$ folgt. Der Periodenquotient ω ist rein imaginär und absolut ≤ 1 ; der Ecke $x = y, xy = 2zt$ gehört $\omega = i$ zu. Dem anderen Endpunkte $x = 2t = 0$ gehört das Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$ zu. Es findet also Herabminderung des Geschlechtes auf $p = 0$ statt, und man hat $\omega = 0$ erreicht. Für die beiden hier vorliegenden linearen Kontinua bildet man sofort ein spezielles Fundamentaltheorem durch: Die in Rede stehende Seite des DB der Fig. 26 ist eineindeutig stetig auf die $\omega = i$ und $\omega = 0$ verbindende Seite des ω -Bereiches bezogen.

Wir beschreiben zweitens die der Kurve $x = y$ angehörende Seite vom Endpunkt $x = y, xy = 2zt$ zum anderen Endpunkt $x = y = z$. Ergänzen wir das Dreieck der Fig. 24 längs der Seite $e_1 e_2$ zum Parallelogramm, so korrespondieren die Gegenseiten durch V_a und V_b . Wegen $j_a = j_b$ hat man mit einem Rhombus zu tun, und da sich die Symmetrien desselben in der u -Ebene wiederfinden, so ist auch das Periodenparallelogramm ein Rhombus, und man findet, daß der Periodenquotient den absoluten Betrag 1 hat. Für $x = y = z$ ist das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ gleichseitig geworden (im parabolischen Falle ist C der Höhenschnittpunkt); hier stellt man leicht fest, daß $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ geworden ist. Indem man für die beiden jetzt vorliegenden Kontinua rhombischer Gebilde unsere Kontinuitätsbetrachtung durchführt, findet man die durch $x = y$ zu charakterisierende Seite auf die $\omega = i$ und $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ verbindende, dem Einheitskreise der ω -Ebene angehörende Seite des Doppeldreiecks eineindeutig stetig bezogen.

Man wird die so eingeleitete Betrachtung leicht weiterführen und demnächst wieder zu rhombischen Gebilden mit $x = z$ und also $j_a = j_c$ gehen usw. Haben wir längs der Seite $xz = 2yt$ die Spitze $x = 2t = 0$ wieder erreicht, so sind wir zum Gebilde $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$ und damit

längs der vierten Seite des ω -Doppeldreiecks zu $\omega = 0$ zurückgekehrt. Wir merken als vorläufiges Resultat an: *Der Rand des DB der automorphen Modulgruppe auf der F_3 ist eineindeutig stetig auf den Rand des korrespondierenden ω -Doppeldreiecks bezogen; dem Rande des ersten DB haben wir dabei ein ringförmig geschlossenes Kontinuum von automorphen Gebilden zuordnen können, d. h. auch am Grenzpunkte $x = 2t = 0$ findet kontinuierlicher Zusammenschluß der Randgebilde statt.*

Hiermit ist der Boden geebnet, um eine Betrachtung durchzuführen genau analog derjenigen von pag. 465 ff. Wir überdecken die Fläche des Doppeldreiecks der F_3 mit einem Systeme von geeignet gestalteten Kurven, wobei je zwei benachbarte Kurven einander so nahe gewählt werden können, als man will. Bei dem einfachen Charakter des fraglichen Bereiches hat die Ausführung dieser Vorschrift keine Schwierigkeit. Wir bilden sodann dieses Kurvensystem auf das Doppeldreieck der ω -Halbebene ab und diskutieren die Abbildung wie oben unter Benutzung des Stetigkeits- und des Unitätssatzes. Das Ergebnis ist, daß beide Bereiche eineindeutig stetig aufeinander bezogen sind*). So vollenden wir auch im vorliegenden Falle den Beweis des Fundamentaltheorems: *Eine beliebig gegebene Riemannsche Fläche des Geschlechtes $p = 1$ sei mit einem Punkte e signiert, dem eine ganze Zahl $l_1 > 1$ (∞ eingeschlossen) zugeordnet sei. Dann gibt es stets eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\xi = f(z)$ auf der Fläche, welche die zerschnittene Fläche auf ein Grenzkreispolygon unserer Art der Signatur $(1, 1; l_1)$ abbildet, in dem die feste Polygonecke der Stelle e der Fläche entspricht. —*

Gebilde der Signatur $(1, 1)$.

Das Gruppenkontinuum des Charakters $(1, 1)$ ist dreidimensional; wir stellten dasselbe oben (pag. 481), durch die Punkte eines Hexaeders dar, welches durch drei ebenda angegebene Ebenen, zwei F_2 und eine F_3 begrenzt war. Wir konnten das Hexaeder durch eine kontinuierliche Schar von Flächenstücken F_3 ausfüllen, bei deren Darstellung der „Parameter“ j , von -2 bis $-\infty$ abzunehmen hat.

Es fragt sich jetzt zunächst, ob wir der Gesamtoberfläche des Hexaeders ein überall geschlossenes zweidimensionales Kontinuum von Grenzgebilden zuordnen können. Man betrachte erstlich eine einzelne der eben gemeinten F_3 , welche als dem Hexaeder angehörig ein Doppeldreieck trägt. Auf letzteres können wir Schritt für Schritt die Betrachtung übertragen,

*) Wie aus der oben beschriebenen Zuordnung der Berandungen hervorgeht, handelt es sich hier um eine Abbildung, bei welcher der Drehungssinn der Winkel invertiert erscheint.

welche wir im vorigen Falle $(1, 1; l_1)$ für die entsprechenden Doppeldreiecke ausführten. Dem Rande des Doppeldreiecks gehört ein Kontinuum von Grenzgebilden zu, welches selbst im Grenzpunkte $x = 2t = 0$ geschlossen erscheint. An dieser Stelle haben wir mit dem Gebilde $(0, 3; \infty, \infty)$ der Invariante j_e zu tun.

Ändern wir j_e stetig, so reihen sich die gewonnenen Grenzgebilde stetig aneinander an. Das gewünschte Kontinuum der Grenzgebilde würde damit für die das Hexaeder berandende F_3 , für die beiden F_2 , sowie für zwei unter den Ebenen bereits gewonnen sein. Nur tritt, was man beachten wolle, die Besonderheit ein, daß dem Punkte $x = 0, y = z, t = 0$ bereits jetzt ein ganzes Kontinuum von Grenzgebilden zugehört, nämlich jene Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$ mit alle in Betracht kommenden Werten j_e . Wir scheiden die einzelne Gruppe aus, indem wir vorschreiben, längs welcher F_3 wir uns jener Stelle annähern. Alle diese F_3 berühren dabei die Ebene $x = 2t$.

Nähern wir uns jetzt einem Punkte der Ebene $t = 0$, der jedoch nicht der Kante $x = 0, t = 0$ angehören soll, so werden j_a, j_b, j_c gleichzeitig unendlich groß. In der ξ -Ebene können wir die DB unserer Gruppen, falls nicht $j_e = -2$ zutrifft, stets in die durch Fig. 31 dargestellte Gestalt setzen. Den Grenzübergang

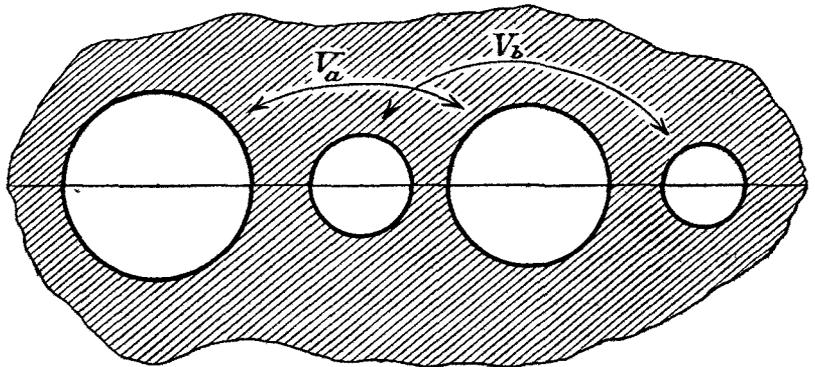


Fig. 31.

$$\lim j_a = \infty,$$

$$\lim j_b = \infty$$

kann man dann so einrichten, daß gleichzeitig alle vier Randkreise dieses DB sich auf Punkte zusammenziehen. Der bezeichnete Grenzübergang zu einem Punkte der Ebene $t = 0$ führt zu einem nicht zerfallenden Grenzgebilde, dem die denkbar einfachste, nämlich nur aus der Identität 1 bestehende, Gruppe zugrunde liegt.

Wir haben jetzt allerdings allen Randpunkten des Hexaeders Grenzgebilde zugeordnet; indessen zeigt sich, daß längs der Kante $x = 0, t = 0$ des Hexaeders keine Kontinuität stattfindet. Zur näheren Untersuchung der hier eintretenden Verhältnisse greifen wir zunächst einen Punkt y_0, z_0 im „Innern“ derjenigen Hälfte der fraglichen Kante auf, welche durch $y_0 < z_0$ charakterisiert ist. Dann gilt:

$$\frac{2z_0}{y_0} = j_a^{(0)} > 2.$$

Für die Annäherung an den in Rede stehenden Punkt schreiben wir nun die geradlinige Bahn:

$$x = j_a^{(0)} \cdot t, \quad y \cdot j_a^{(0)} = 2z$$

vor, welche die Gleichung $xy = 2zt$ befriedigt und also derjenigen das Hexaeder berandenden F_2 angehört, welche mit der Ebene $t=0$ die vorhin gewählte Hälfte der Kante $x=0$, $t=0$ gemein hat. Längs jener geradlinigen Bahn ist nun $\frac{x}{t} = j_a$ konstant gleich $j_a^{(0)}$, und man hat insgesamt:

$$j_a = j_a^{(0)}, \quad j_b = \frac{2}{t}, \quad j_c = \frac{j_a^{(0)}}{t}.$$

Beim Grenzübergang zum Kantenpunkte selbst wird $\lim t = 0$, also hat man bei konstantem $j_a = j_a^{(0)}$, $\lim j_b = \infty$. Als Grenzgebilde entspricht (cf. Fig. 31) die zyklische hyperbolische Gruppe der Invariante $j_a^{(0)}$. Nähert man sich dem gleichen Kantenpunkte in der Ebene $t=0$ an, so kommt, wie oben gezeigt wurde, das Grenzgebilde, dessen Gruppe aus der Identität allein besteht.

Um nun die Kontinuität zwischen diesen beiden Grenzfällen herzustellen, haben wir zwischen den beiden Richtungen, welche eben benutzt wurden, etwa in der Ebene $y \cdot j_a^{(0)} = 2z$ die gesamten, dem Hexaeder angehörenden Annäherungsrichtungen an den markierten Kantenpunkt einzuschalten. Um die einzelne dieser Richtungen auszuzeichnen, setzen wir j_a gleich irgend einem positiven Werte $\geq j_a^{(0)}$ und beschreiben die Gerade:

$$x = j_a \cdot t, \quad y \cdot j_a^{(0)} = 2z.$$

Nun entspringt die zyklische hyperbolische Gruppe der Invariante j_a . Vermöge der Grenzübergänge $\lim j_a = j_a^{(0)}$ und $\lim j_a = \infty$ stellen wir nun in der Tat den kontinuierlichen Zusammenhang zwischen den beiden oben gewonnenen Grenzfällen her.

Für die Hexaederecke $x=0$, $y=0$, $t=0$ findet man gleichfalls volle Kontinuität der Grenzgebilde. Hier tangiert nämlich die durch $xy = 2zt$ gegebene Seitenfläche des Hexaeders die Ebene $t=0$. Jede Annäherung an diese Ecke liefert somit als Grenzgebilde die aus der Identität allein bestehende Gruppe.

Für die andere Hälfte der Kante $x=0$, $t=0$, für welche $y > z$ zutrifft, sowie für die Ecke $x=0$, $t=0$, $z=0$ gelten analoge Ausführungen. Eine besondere Bemerkung erfordert nun noch der Punkt $x=0$, $y=z$, $t=0$. Nähern wir uns diesem Punkte etwa in der Ebene $y=z$ in einer Bahn an, bei welcher

$$\lim \frac{x}{t} = j_a > 2$$

ist, so durchschreiten wir sämtliche F_3 , mit denen wir das Hexaeder aus-

füllten, und gewinnen die zyklische hyperbolische Gruppe der Invariante j_a . Die Invariante j_e ist für diese Gruppen durchweg gleich $-\infty$. Bei denjenigen Bahnen nach dem fraglichen Punkte, welche tangential zur Ebene $x = 2t$ einmünden, hat man noch weiter zu unterscheiden, in welcher F_3 sie verlaufen, oder (was auf dasselbe hinausläuft) welches der Grenzwert des Krümmungsradius ist. Dem hier in Betracht kommenden linearen Kontinuum dieser Grenzwerte entsprechen die oben schon genannten Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$, an welche sich für $\lim j_e = -\infty$ die an der fraglichen Stelle schon gefundenen zyklischen hyperbolischen Gruppen ohne Unterbrechung der Kontinuität anschließen.

Indem wir zusammenfassen, haben wir folgendes Ergebnis auszusprechen: *Der Oberfläche des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe haben wir ein überall geschlossenes Kontinuum von Grenzgebilden zugeordnet, wobei im allgemeinen dem einzelnen Punkte der Oberfläche auch nur ein Gebilde zugehört. Nur entspricht dem einzelnen Punkte der Kante $x = 0, t = 0$ stets ein ganzes Kontinuum von einfach unendlich vielen Gebilden, abgesehen von den beiden Ecken $y = 0$ und $z = 0$. Das einzelne Gebilde jedes solchen Kontinuums bestimmt man durch die Schlußrichtung der nach jenem Kantenpunkte zurückgelegten Bahn, bezw. bei den an dem Punkte $x = 0, y = z, t = 0$ tangential gegen die Ebene $x = 2t$ einmündenden Bahnen durch den Schlußwert des Krümmungsradius.*

Die Gruppen des betrachteten Kontinuums liefern algebraische Gebilde des Geschlechtes $p = 2$, die orthosymmetrisch sind. Zur Gewinnung einer zweiwertigen Funktion $z = \varphi(\xi)$ erweitere man im Einzelfalle die Gruppe, wie oben ausführlich beschrieben wurde, zu einer Gruppe der Signatur $(0, 3; 2, 2, 2)$, indem man aus dem Normalsechseck das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ ausschneidet und die Seitenmitten e'_1, e'_2, e'_3 zu Fixpunkten elliptischer Substitutionen $V_{e'_1}, V_{e'_2}, V_{e'_3}$ der Periode 2 macht. In ihnen stellen sich dann die Erzeugenden der ursprünglichen Gruppe wie folgt dar:

$$\begin{aligned} V_a &= V_{e'_2} \cdot V_{e'_3}, & V_b &= V_{e'_2} \cdot V_{e'_1}, \\ V_c &= V_{e'_1} \cdot V_{e'_2}. \end{aligned}$$

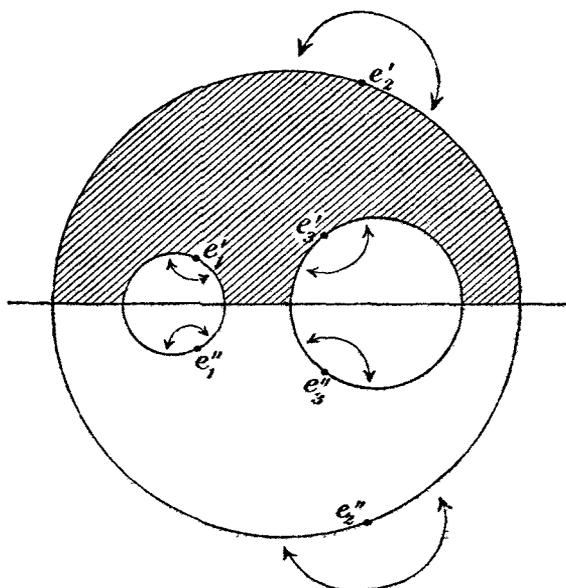


Fig. 32.

Bei Fortgang zur ξ -Ebene gehen die hyperbolischen Ecken e_1, e_2, e_3 des Dreiecks verloren. Der DB der Gruppe von der Signatur $(0, 3; 2, 2, 2)$ hat die in Fig. 32 dargestellte Gestalt. Die Hauptfunktion $z = \varphi(\xi)$ können

wir so einführen, daß sie den schraffierten Teil des eben angegebenen DB auf die positive z -Halbebene abbildet, den freien Teil auf die negative Halbebene. Die den Fixpunkten e_1', \dots, e_3'' entsprechenden Stellen z mögen die gleichen Bezeichnungen tragen. Um alsdann zu dem algebraischen Gebilde zu gelangen, das der ursprünglichen Gruppe zugehört, haben wir die z -Ebene doppelt zu überdecken und an den paarweise einander bezüglich der reellen z -Achse symmetrisch liegenden Punkten $e_1', e_1'', e_2', e_2'', e_3', e_3''$ Verzweigungen beider Blätter anzubringen.

Das gewonnene algebraische Gebilde können wir offenbar durch das der positiven z -Halbebene angehörende Tripel der Punkte e_1', e_2', e_3' vollständig und eindeutig charakterisieren. Man beachte andererseits, daß die Auswahl von z noch die Willkür offen läßt, daß wir durch eine beliebige reelle Substitution:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc > 0$$

transformieren dürfen. Alle Punktetripel, welche aus e_1', e_2', e_3' durch solche Transformationen hervorgehen, stellen ein und dasselbe Gebilde dar und sollen demnach als nicht wesentlich verschieden gelten.

Um jetzt zum Kontinuum algebraischer Gebilde, welches unserem Gruppenkontinuum gegenübersteht, zu gelangen, müssen wir alle im angegebenen Sinne wesentlich verschiedenen Punktetripel zusammenfassen. Zur invarianten Darstellung des Kontinuums eignen sich hier Doppelverhältnisse nicht recht; vielmehr dienen wir den vorliegenden Zwecken mehr, wenn wir auf die z -Halbebene dieselbe hyperbolische Maßbestimmung wie auf die ξ -Halbebene beziehen, das Kreisbogendreieck der Ecken e_1', e_2', e_3' einführen und auf dieses die in A. F. I, pag. 348 ff. entwickelte invariante Darstellung anwenden. Von den a. a. O. angegebenen Bedingungen kommt hier natürlich die in Fortfall, daß die Winkel des Dreiecks aliquote Teile von π sein sollen. Die Winkel können hier vielmehr irgend welche Größen zwischen 0 und π haben, die Grenzen selbst eingeschlossen; nur muß natürlich die Winkelsumme $\leq \pi$ sein.

Nach Vorschrift der a. a. O. gegebenen Regeln stellen wir nunmehr unser Dreieck und damit unser Kontinuum algebraischer Gebilde durch drei Invarianten j_1, j_2, j_3 dar, für welche wir zuvörderst folgende Bedingungen anzumerken haben:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 \geq 4, \\ -2 \leq j_1 \leq +2, \quad -2 \leq j_2 \leq +2, \quad -2 \leq j_3 \leq +2.$$

Um ein anschauliches Bild des fraglichen Kontinuums zu gewinnen, deuten wir die j_1, j_2, j_3 als rechtwinklige Koordinaten und untersuchen den durch

die vorstehenden Ungleichungen charakterisierten Bereich. Letzterer ist das durch Fig. 33 dargestellte Tetraeder, welches von drei ebenen, geradlinig begrenzten Dreiecken und einem Stück der durch:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 = 4$$

dargestellte F_3 eingeschlossen wird. Dieses Tetraeder hat die drei Ebenen $j_2 = j_3$, $j_3 = j_1$, $j_1 = j_2$ zu Symmetrieebenen und geht in sich selbst über, wenn man es um die Achse $j_1 = j_2 = j_3$ durch den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ dreht. Je drei hierbei ineinander übergehende Punkte stellen dasselbe algebraische Gebilde dar. Wir kommen hier zu analogen Verhältnissen, wie oben bei der Darstellung des Gruppenkontinuums. Um jedes algebraische Gebilde nur einmal darzustellen, müssen wir uns auf ein Drittel des Tetraeders beschränken. Die nähere Untersuchung zeigt, daß den oben getroffenen Festsetzungen $j_a \leq j_b$, $j_a \leq j_c$ die folgende Forderung parallel geht:

$$j_1 \geq j_2, \quad j_1 \geq j_3.$$

Das entsprechende Drittel des Tetraeders ist dasjenige kleinere Tetraeder, dessen Kanten in Fig. 33 stark markiert sind.

Bei der Untersuchung der Beziehung dieses Tetraeders auf den DB der automorphen Modulgruppe stellen sich nun Umständlichkeiten ein, die man am besten dadurch überwindet, daß man den Raum der j_1, j_2, j_3 vorab einer bestimmten Transformation unterwirft. Letztere ist den Rechnungen entnommen, welche sich beim Studium der fraglichen Beziehung darboten; sie ist gegeben durch:

$$u = \frac{2j_2 + 2j_3}{j_2 j_3 + 4}, \quad v = \frac{2j_3 + 2j_1}{j_3 j_1 + 4}, \quad w = \frac{2j_1 + 2j_2}{j_1 j_2 + 4}.$$

Deuten wir auch die u, v, w als rechtwinklige Koordinaten, so handelt es sich, wie man leicht erkennt, hier um eine 1-2-deutige Beziehung beider Räume aufeinander; und zwar entsprechen dem einzelnen Punkte (u, v, w) immer zwei Punkte (j_1, j_2, j_3) und $(\frac{4}{j_1}, \frac{4}{j_2}, \frac{4}{j_3})$.

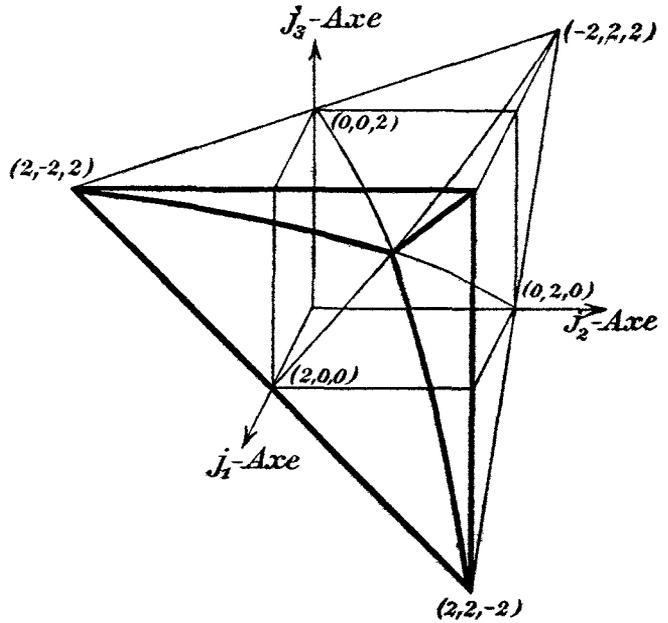


Fig. 33.

Die Funktionaldeterminante der $u(j_1, j_2, j_3), \dots$ ist, abgesehen von einem numerischen Faktor:

$$\frac{(4 - j_1^2)(4 - j_2^2)(4 - j_3^2)}{(j_2 j_3 + 4)^2 (j_3 j_1 + 4)^2 (j_1 j_2 + 4)^2}.$$

Dieselbe verschwindet längs der drei ebenen Seitenflächen des Tetraeders. Letztere, ebenso wie die Tetraederecken, erfordern demnach eine besondere Untersuchung. Dem „Innern“ des Tetraeders kann von zwei Punkten $(j_1, j_2, j_3), \left(\frac{4}{j_1}, \frac{4}{j_2}, \frac{4}{j_3}\right)$ höchstens einer angehören. Für das „Innere“ des Tetraeders und den entsprechenden Bereich im Raume der u, v, w ist somit die angegebene Beziehung eine umkehrbar eindeutige.

Wir wenden uns zur Untersuchung der ebenen Seitenflächen des Tetraeders und betrachten als Beispiel $j_3 = 2$; die Fläche besteht aus dem in Fig. 34 stark umrandeten Dreieck. Für $j_3 = 2$ findet man nun $u = v = 1$, so daß sich alle Punkte der Dreiecksfläche auf die Gerade $u = v = 1$ übertragen. Des näheren hat man:

$$w(j_1 j_2 + 4) = 2j_1 + 2j_2.$$

Faßt man hier w als Parameter, der alle Werte von 0 bis 1 durchlaufen soll, und deutet j_1, j_2 als Koordinaten in der Ebene $j_3 = 2$, so gewinnt man eine Schar von Hyperbeln, welche die Fläche des Dreiecks in der in

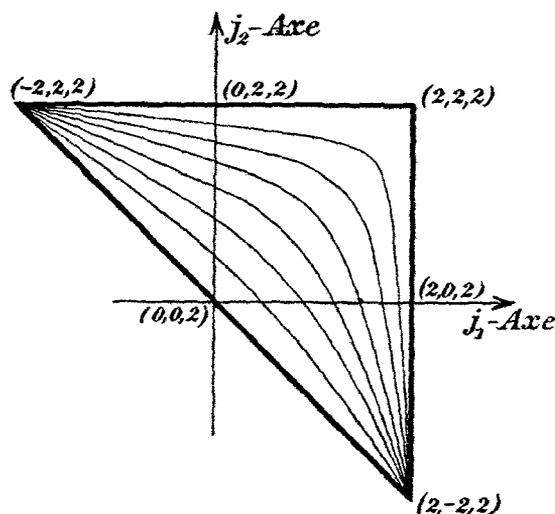


Fig. 34.

Fig. 34 skizzierten Art bedecken. Die Punkte des einzelnen solchen Hyperbelstücks ziehen sich vermöge unserer Transformation auf den einen Punkt $u = v = 1, w$ zusammen, wo w der zugehörige Wert des Parameters ist. Die ganze Dreiecksfläche bildet sich solchergestalt auf das von $w = 0$ bis $w = 1$ reichende Stück der Geraden $u = v = 1$ ab; die Hypotenuse des Dreiecks liefert den Punkt $w = 0$, die beiden Katheten ziehen sich auf den Punkt $w = 1$ zusammen.

Ganz analoge Bemerkungen gelten natürlich von den beiden anderen ebenen Seitenflächen des j -Tetraeders.

Man nähere sich jetzt der Ecke $(2, 2, -2)$ des Tetraeders an. Hier ist $w = 1$, während u und v stetig vieldeutig werden. Um die Art dieser Vieldeutigkeit darzulegen, denken wir von der fraglichen Ecke aus Wegdifferentiale beschrieben und untersuchen die Grenzwerte u, v , welche dem einzelnen Wegdifferentiale entsprechen. Zuerst untersuchen

wir die Differentiale, welche den drei aus der fraglichen Ecke zusammenlaufenden Seitenflächen des Tetraeders angehören. Wir beginnen mit der Ebene $j_2 = 2$, reihen daran $j_1 = 2$ und dann die F_3 ; d. h. wir durchlaufen die Differentiale, wie es die drei Pfeile der Fig. 35 vorschreiben.

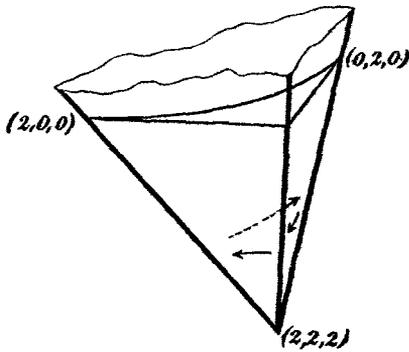


Fig. 35.

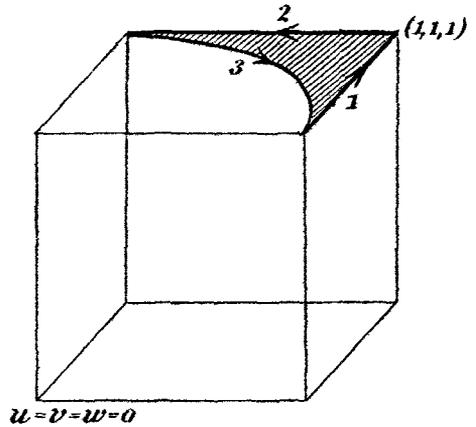


Fig. 36.

Diesen drei Scharen von Wegdifferentialen entsprechen in der Ebene $w = 1$ die drei in Fig. 36 mit den Nummern 1, 2 und 3 versehenen Linien, und die zugefügten Pfeile entsprechen denen in Fig. 35. Das Auftreten der beiden mit 1 und 2 bezeichneten Geraden ist aus den bisherigen Entwicklungen bereits evident. Die Linie 3, welche den auf der F_3 :

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 - 4 = 0$$

gelegenen Differentialen entspricht, ist ein Stück einer gewissen Kurve vierter Ordnung C_4 . Wenn wir nämlich die Koordinaten der Endpunkte jener Differentiale $2 + dj_1$, $2 + dj_2$, $-2 + dj_3$ nennen, so folgt aus der Gleichung der F_3 , welche in der fraglichen Ecke einen Knotenpunkt aufweist, nach leichter Rechnung:

$$(dj_1 + dj_2 + dj_3)^2 - 4dj_1 \cdot dj_2 = 0.$$

Nun entspricht dem Punkte $(2 + dj_1, 2 + dj_2, -2 + dj_3)$ im Raume der u, v, w der Punkt:

$$u = \frac{dj_3 + dj_2}{dj_3 - dj_2}, \quad v = \frac{dj_3 + dj_1}{dj_3 - dj_1}, \quad w = 1,$$

woraus sich umgekehrt ergibt:

$$dj_1 : dj_2 : dj_3 = (u + 1)(v - 1) : (u - 1)(v + 1) : (u + 1)(v + 1).$$

Die Eintragung dieser Werte in die zwischen den Differentialen bestehende Relation ergibt als Gleichung der C_4 :

$$5u^2v^2 + 6uv(u + v) + 5(u^2 + v^2) - 4uv - 2u - 2v - 3 = 0.$$

Die hierdurch dargestellte Kurve verläuft ganz im Bereiche

$$-1 \leq u \leq +1, \quad -1 \leq v \leq +1$$

und hat die in Fig. 37 dargestellte Gestalt. Der stärker ausgezogene Teil der Kurve kommt bei der Abbildung unserer Tetraederecke zur Benutzung. Indem man sich der in Rede stehenden Ecke jetzt in allen Richtungen vom Tetraeder aus annähert, findet man als Abbild der Ecke den in Fig. 36 schraffierten der Ebene $w=1$ angehörigen dreieckigen Bereich.

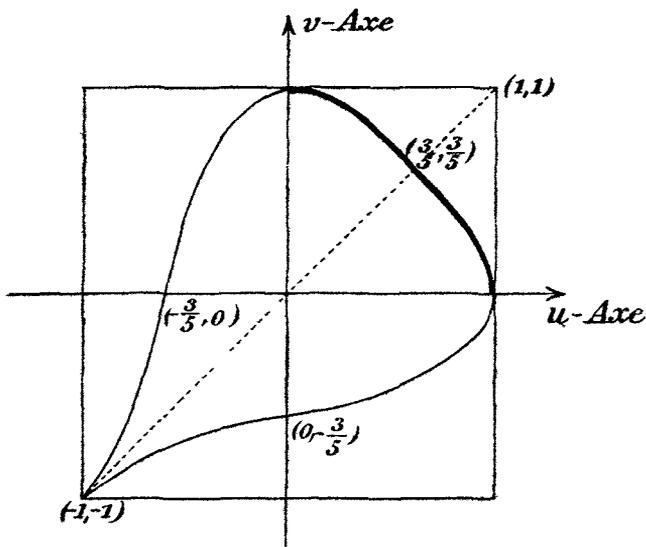


Fig. 37.

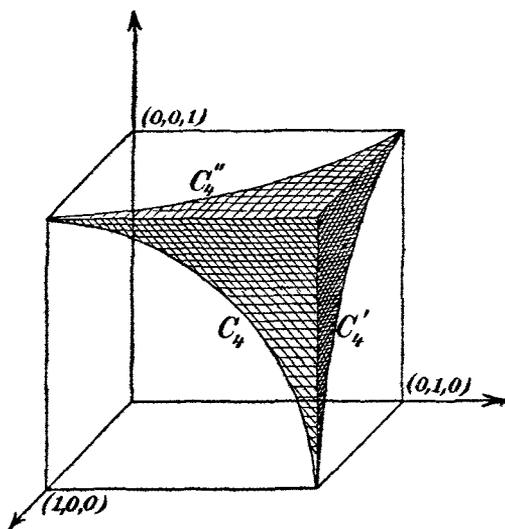


Fig. 38.

Für die beiden Ecken $(2, -2, 2)$ und $(-2, 2, 2)$ kommt man selbstverständlich zu ganz analogen Ergebnissen. Die Abbilder der drei Ecken sind in Fig. 38 zusammengestellt; es handelt sich um die drei, in den Ebenen $u = 1, v = 1, w = 1$ gelegenen schraffierten dreieckigen Bereiche, welche von je zwei Geraden und je einer Kurve vierter Ordnung begrenzt sind. Die oben in der Ebene $w = 1$ speziell betrachtete Kurve ist in der Figur durch C_4'' bezeichnet.

Es restiert die Abbildung des Flächenstückes dritter Ordnung, welches das j -Tetraeder, neben den vier ebenen Dreiecken, berandet. Die Gleichung des Abbildes im Raume der u, v, w gewinnt man durch Elimination von j_1, j_2, j_3 aus den vier Gleichungen:

$$u = \frac{2j_2 + 2j_3}{j_2 j_3 + 4}, \quad v = \frac{2j_3 + 2j_1}{j_3 j_1 + 4}, \quad w = \frac{2j_1 + 2j_2}{j_1 j_2 + 4},$$

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 - 4 = 0.$$

Die etwas umständliche Rechnung liefert als Resultat:

$$\{(uvw - u - v - w)^2 + 2(u+1)(v+1)(w+1)(uv + uw + vw - 1) - 4(uv + uw + vw) - 8uvw\}^2 = 4\{(u+1)(v+1)(w+1)\}^3 \cdot (1-u)(1-v)(1-w).$$

Für $w = 1$ wird die rechte Seite dieser Gleichung 0, die linke aber liefert das Quadrat der linken Seite der oben für die C_4'' ausgerechneten Gleichung. Die im Raume der u, v, w gewonnene F_{12} berührt die drei Ebenen $u = 1, v = 1, w = 1$ längs der Kurven C_4, C_4', C_4'' . Ein in diese drei Kurven eingespanntes Stück der F_{12} gewinnen wir als gesuchtes Abbild des Flächenstücks F_3 .

Endlich beachte man noch, daß die Symmetrieebenen $j_1 = j_2, j_2 = j_3, j_3 = j_1$ sich bezw. übertragen auf die Ebenen $u = v, v = w, w = u$, welche gleichfalls den Charakter von Symmetrieebenen bekommen. Auch überlege man noch, wie sich die vorhin schon besprochene Ungleichung $j_1 \geq j_2, j_1 \geq j_3$ auf die u, v, w überträgt. Wir finden als Schlußergebnis:

Das j -Tetraeder überträgt sich auf ein Tetraeder im Raume der u, v, w ; und zwar liefert die Seite F_3 des ersten Tetraeders die Seite F_{12} des zweiten, die Ecken $(2, 2, -2), (2, -2, 2)$ und $(-2, 2, 2)$ des j -Tetraeders gehen in die drei ebenen Seitenflächen des neuen Tetraeders über, die drei ebenen Seitenflächen des j -Tetraeders ergeben die drei geradlinigen Kanten des zweiten Tetraeders, endlich ziehen sich die drei in der Ecke $(2, 2, 2)$ zusammenlaufenden Kanten auf die Ecke $u = v = w = 1$ zusammen. Für die Darstellung unseres Kontinuums algebraischer Gebilde aber gilt: Wir stellen das fragliche Kontinuum gerade erschöpfend dar, indem wir aus dem gewonnenen Bereiche dasjenige, ein Pentaeder bildende, Drittel aussondern, welches den Ungleichungen $u \leq v, u \leq w$ entspricht.

Wir haben nunmehr die Abbildung des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe auf das eben zuletzt gewonnene, den Ungleichungen $u \leq v, u \leq w$ entsprechende Pentaeder näher zu untersuchen und beginnen in üblicher Weise mit der Betrachtung der Oberflächen beider Bereiche.

In dieser Hinsicht konstatieren wir zunächst, daß die Seitenfläche F_3 des Hexaeders auf die F_{12} des Pentaeders eineindeutig stetig bezogen ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem oben bereits bewiesenen Fundamentalsatz für die Gebilde der Signatur $(1, 1; \infty)$. Zu bemerken ist hierbei nur, daß das Kreisbogendreieck $e_1'e_2'e_3'$ der positiven z -Halbebene, welches uns die Grundlage für die invariante Darstellung des Kontinuums der algebraischen Gebilde abgab, bei der oben vorgeschriebenen Auswahl der Hauptfunktion z gegenwärtig unendlich klein wird. Damit das Dreieck endlich ausgedehnt bleibt, hat man die reelle ξ -Achse auf die Peripherie eines Kreises der z -Ebene mit *endlichem* Radius abzubilden und muß alsdann diesen Kreis beim Übergange zum parabolischen Grenzfalle auf einen Punkt zusammenziehen.

Man nähere sich jetzt einem Punkte der Seitenfläche $t = 0$ des Hexaeders an, und zwar tangential zu dieser Fläche, falls es sich um einen Kantenpunkt $x = 0, t = 0$ handeln sollte. Hier wird $\lim j_a = \infty, \lim j_b = \infty$.

Wählen wir somit den DB der Gruppe als Parallelogramm des Zentrums e_3' , so werden im Grenzfalle die Punkte e_1' , e_2' an zwei getrennte Stellen der Ellipse rücken. Da die Gruppe T schließlich nur noch aus der Identität besteht, so wird im Grenzfalle die ζ -Ebene mit der z -Ebene identisch sein, und also folgt $j_1 = 2$, $j_2 = 2$, d. h. wir gelangen zu einem Kantenpunkt des j -Tetraeders, der einer der drei von der Ecke $(2, 2, 2)$ ausziehenden Kanten angehört. Aber beim Übergange zum Raume der u, v, w ziehen sich diese Kanten auf die Ecke $u = v = w = 1$ zusammen. Die Folge ist, daß sich bei der Abbildung des Hexaeders auf das Pentaeder die Seitenfläche $t = 0$ des ersteren auf den Eckpunkt $u = v = w = 1$ des letzteren zusammenzieht.

Wir haben nun am Hexaeder noch vier weitere Seitenflächen, nämlich zwei Dreiecke, welche auf den F_2 :

$$xy - 2zt = 0, \quad zx - 2yt = 0$$

gelegen sind, und zwei Vierecke, den Ebenen $x = y$, $z = x$ angehörig. Die beiden ersten Flächen stehen koordiniert, und was von der einen gilt, überträgt sich sofort auf die andere; in demselben Sinne sind die

beiden letzten Flächen koordiniert. Wir brauchen demnach von jedem Paare nur eine Fläche in Betracht zu ziehen.

Gehen wir erstlich zum Dreieck der Fläche

$$xy - 2zt = 0,$$

so haben wir mit den DB der in Fig. 39 angegebenen symmetrischen Gestalt zu tun. Bei der Abbildung auf die z -Ebene werden die Punkte e_1' , e_2' , e_3' auf einen zur reellen z -Achse orthogonalen Halbkreis rücken, und zwar liegt auf diesem Halbkreise e_3' zwischen e_1' und e_2' . Wir haben somit

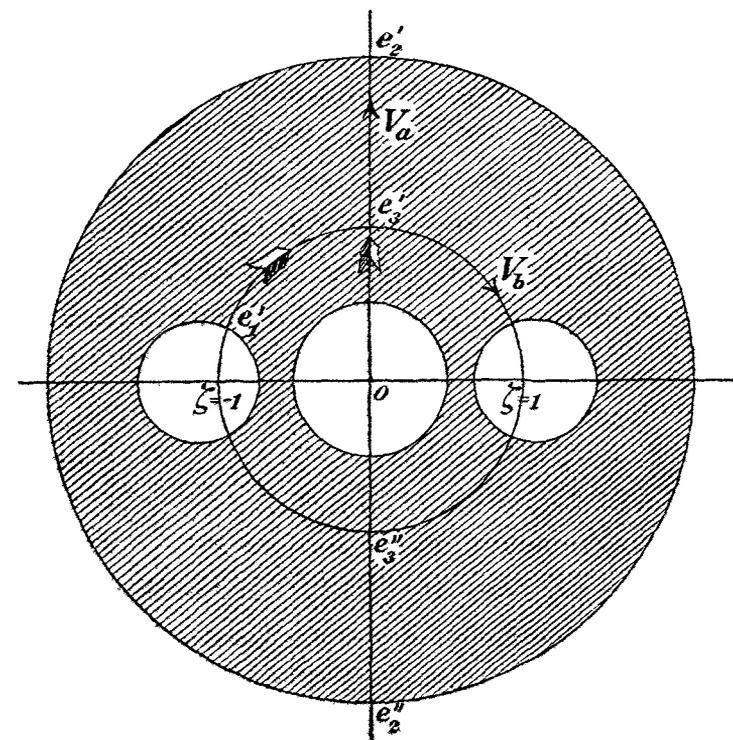


Fig. 39.

$j_1 = 2$, $j_2 = 2$, $j_3 = -2$ und gelangen im Raume der u, v, w zur Seitenfläche $w = 1$ des Pentaeders, welche die Gestalt eines ebenen Dreiecks besitzt.

Man muß nun für die beiden solchergestalt in Korrespondenz gesetzten

dreieckigen Flächen ein besonderes Fundamentaltheorem aufstellen, was in der üblichen Weise geschieht. Eine erste Seite hat das Hexaederdreieck mit der F_3 der parabolischen Gebilde gemein. Diese Seite ist, wie wir bereits wissen, stetig eindeutig auf die von der C_4'' gelieferten Seite des anderen Dreiecks bezogen. Als zweite Seite ersteren Dreiecks reihen wir hieran die durch $x = y$ gegebene. Hier haben wir $j_a = j_b$, so daß der DB der Fig. 39 als neue Symmetriekreise diejenigen gewinnt, welche die imaginäre ζ -Achse bei $\zeta = \pm i$, d. h. an den Stellen e_3', e_3'' , unter 45° schneiden. Da die neue Symmetrie bei Abbildung auf die z -Ebene erhalten bleibt, so werden in der z -Halbebene die Abstände $e_1'e_3'$ und $e_2'e_3'$ im Sinne der projektiven Maßbestimmung einander gleich. Wir gelangen somit zur Geraden $u = v$, d. i. zur zweiten Seite des Dreiecks in der Ebene $w = 1$. Für $\lim t = 0$ werden wir dabei notwendig zur Ecke $u = v = 1$ geführt; wir finden daraufhin in üblicher Schlußweise, daß die beiden in Rede stehenden Seiten eineindeutig stetig aufeinander bezogen sind.

Etwas mehr Umstände verursacht das letzte Seitenpaar unserer beiden Dreiecke. Nähern wir uns auf dem Hexaederdreieck der Seite $x = 0$, so gewinnen wir zyklische hyperbolische Gruppen der Invariante j_a ; und zwar sind die Werte $j_a = 2$ bis $j_a = +\infty$ stetig auf die Punkte jener Seite vom Endpunkt $y = z$ beginnend bis zum andern Endpunkte bezogen. Diese zyklischen hyperbolischen Gruppen führen nun in der z -Halbebene auf Dreiecke, bei denen, wie Fig. 40

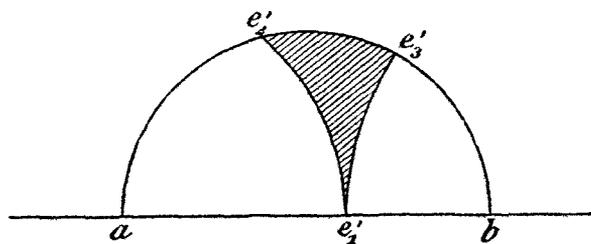


Fig. 40

zeigt, der Punkt e_1' auf die reelle Achse rückt. Verschiebt man e_1' bei festgehaltenen Punkten e_2', e_3' längs des Segmentes ab der reellen z -Achse etwa im Sinne des Pfeiles, so bleibt erstlich das algebraische Gebilde unverändert; andererseits beschreibt hierbei, wie die nähere

Untersuchung zeigt, der Punkt (j_1, j_2, j_3) in dem das j -Tetraeder begrenzende Dreieck $j_1 = 2$ ein bestimmtes unter den in Fig. 34 dargestellten Hyperbelstücken von der Ecke $(2, -2, 2)$ zur Ecke $(2, 2, -2)$. Der Parameter dieser Hyperbelschar ist u , und es sind (Fundamentaltheorem der zyklischen hyperbolischen Gruppen) die hier in Betracht kommenden Parameterwerte von $u = 0$ bis $u = 1$ stetig eindeutig auf die Werte $j_a = 2$ bis $j_a = \infty$ bezogen. Für unsere in Betracht kommende Seite $xy - 2zt = 0$ des Hexaeders liegt nun in Fig. 40 der Punkt e_1' allemal an der Stelle b , d. h. es handelt sich, den unterschiedenen Werten j_a entsprechend, um die in der Seitenfläche $j_1 = 2$ des j -Tetraeders an der Ecke $(2, 2, -2)$

errichteten Wegdifferentiale. Letztere aber bezogen wir oben bereits auf die Punkte der durch $v = 1, w = 1$ gegebenen Kante des Tetraeders der Fig. 38.

Hiernach sind in der Tat die beiden noch fehlenden Seiten unserer beiden dreieckigen Bereiche eineindeutig stetig einander zugeordnet, und wir beweisen in üblicher Weise die gleiche Art der Beziehung für diese gesamten Bereiche.

In ganz analoger Art zeigt man, daß sich die auf der Fläche zweiten Grades $zx - 2yt = 0$ gelegene Seitenfläche des Hexaeders eineindeutig stetig auf diejenige dreieckige Seitenfläche des Pentaeders überträgt, welche der Ebene $v = 1$ angehört.

Es restieren endlich noch die beiden viereckigen Grenzflächen des Hexaeders, welche in den Ebenen $x = y$ bzw. $z = x$ gelegen sind. Beginnen wir mit der ersteren Fläche, so zieht sich die der Ebene $t = 0$ angehörende Seite im Raume der u, v, w , wie wir bereits wissen, auf den Eckpunkt $u = v = w = 1$ des Pentaeders zusammen. Auch das Abbild der durch $xy - 2zt = 0, x - y = 0$ dargestellten zweiten Seite haben wir schon aufgefunden; es ist die Gerade $u = v, w = 1$ in ihrem Verlauf von der Ecke $u = v = 1$ bis zur Kurve C_4'' . Endlich ergibt sich als Abbild der durch $x = y$ auf der F_3 ausgeschnittenen Seite des Vierecks die entsprechend durch $u = v$ auf der F_{12} ausgeschnittene Kurve, und zwar von der C_4'' aus bis zum Punkte $u = v = w$ der F_{12} . Dies folgt aus der oben bereits festgestellten Beziehung der F_3 auf die F_{12} .

Neu festzustellen ist hier nur das Abbild der Seite $x = y = z$. Es ist von vornherein selbstverständlich, daß sich dieselbe auf die Gerade $u = v = w$ überträgt; und es hat keine Schwierigkeit, für die hier in Betracht kommenden linearen Kontinua ein spezielles Fundamentalstheorem zu beweisen. Dem einen Endpunkte der Seite $x = y = z$, welche der F_3 angehört, entspricht der auf der F_{12} gelegene Endpunkt der Seite $u = v = w$; der andere, auf $t = 0$ gelegene, Endpunkt liefert den Endpunkt $u = v = w = 1$.

Da sich allgemein die Symmetrieen von der ζ -Ebene auf die z -Ebene übertragen, so folgt aus $x = y$ notwendig $u = v$. Das unser Hexaeder begrenzende, in die vier besprochenen Seiten eingespannte ebene Viereck wird somit sein Abbild in der Ebene $u = v$ finden. Auf Grund der schon gewonnenen Feststellungen erhalten wir durch übliche Fortsetzung der Kontinuitätsbetrachtung als Abbild jenes Vierecks ein der Ebene $u = v$ angehörendes Dreieck, das in die Seiten $w = 1, u = v = w$ und in eine dritte auf der F_{12} gelegene Seite eingespannt ist.

Die viereckige der Ebene $z = x$ angehörige Grenzfläche des Hexaeders überträgt sich entsprechend auf das in der Ebene $w = u$ gelegene Dreieck, welches das Pentaeder begrenzt.

Gehen wir jetzt auf das überall geschlossene Kontinuum der Grenzgebilde zurück, das wir oben den gesamten Oberflächenpunkten des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe zugeordnet fanden, so bleibt nur noch eine Bemerkung übrig betreffs derjenigen Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$ sowie derjenigen zyklischen hyperbolischen Gruppen, welche wir bei Annäherung an die Kante $x = 0, t = 0$ aus dem Innern des DB antrafen. Nun liefern die Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$ algebraische Gebilde mit $p = 0$; sie gehen aus den Riemannschen Flächen des Geschlechtes $p = 1$ hervor, wenn zwei Verzweigungspunkte zusammenrücken und eine Trennung der beiden Blätter an der Koinzidenzstelle eintritt, wobei dann die beiden Narben den parabolischen Spitzen des Polygons entsprechen. In unserem Falle werden die beiden Punkte e_2', e_3' koinzidieren, so daß wir $j_1 = 2, j_2 = -j_3$ gewinnen. Wir gelangen somit zu der durch diese Gleichungen dargestellten Kante des j -Tetraeders und damit zur Ecke $u = 0, v = 1, w = 1$ im Raume der u, v, w . Daß andererseits die hyperbolischen zyklischen Gruppen im letzteren Raume ihren Ort auf der Kante $v = 1, w = 1$ fanden, stellten wir bereits fest.

Indem wir die Ergebnisse zusammenfassen, haben wir folgenden Satz gewonnen: *Das überall geschlossene Kontinuum der Grenzgebilde, welches wir der Oberfläche des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe bei der Signatur $(1, 1)$ zugeordnet fanden, überträgt diese Oberfläche stetig auf die rings geschlossene Oberfläche des im Raume der u, v, w eingegrenzten pentaedrischen Bereiches.*

Hiermit ist der Grund für die Durchführung der schließlichen Kontinuitätsbetrachtung gelegt. Wir erfüllen das Hexaeder durch eine Schar ausreichend nahe zueinander verlaufender Flächen und untersuchen auf Grund des Stetigkeits- und des Unitätssatzes deren Abbildung auf das Pentaederinnere. Es ergibt sich, daß das Hexaederinnere eineindeutig stetig auf das Innere des Pentaeders bezogen ist: *Auf jeder Riemannschen zweiblättrigen Fläche mit sechs zur reellen Achse paarweise symmetrischen Verzweigungspunkten existiert eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\xi = f(z)$, welche die zerschnittene Fläche auf ein orthosymmetrisches Hauptkreispolygon vom Charakter $(1, 1)$ abbildet.* —

IV. Die Grenzkreisgebilde des Charakters $p = 0, n = 4$.

Unter den Gebilden des Charakters $(0, 4)$ sollen hier nur diejenigen mit Grenzkreis betrachtet werden. Ein paar Angaben über die hierbei eintretenden Erzeugenden der automorphen Modulgruppe sind in A. F. I, pag. 395 gemacht. Wir werden die fraglichen Formeln unten auf einem neuen Wege wieder finden.

DB der automorphen Modulgruppe bei $p = 0$, $n = 4$.

Die gesamte Gattung der Grenzkreisgebilde vom Charakter $(0, 4)$ zerfällt in unendlich viele Familien, deren einzelne durch ihre Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ eindeutig bestimmt ist. Signaturen, die sich nur durch die Reihenfolge der Zahlen l unterscheiden, liefern ein und dieselbe Familie. Die einzelne Familie bildet ein zweidimensionales Kontinuum automorpher Gebilde. Zur invarianten Darstellung dienen die Moduln:

$$j_1, j_2, j_3, j_4, \quad j_{12} = j_{34}, \quad j_{23} = j_{41}, \quad j_{13}, j_{24}.$$

Von diesen Moduln haben die ersten vier bei dem einzelnen Kontinuum die festen Werte:

$$j_1 = 2 \cos \frac{\pi}{l_1}, \quad j_2 = 2 \cos \frac{\pi}{l_2}, \quad \dots, \quad j_4 = 2 \cos \frac{\pi}{l_4}.$$

Wir wollen aus ihnen die drei Ausdrücke herstellen:

$$u = j_1 j_2 + j_3 j_4, \quad v = j_1 j_3 + j_4 j_2, \quad w = j_1 j_4 + j_2 j_3,$$

welche Zahlen des Intervalles $0 \leq u, v, w \leq 8$ sind. Die drei Werte $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ treten bei der Signatur $(0, 4; 2, 2, 2, l_4)$ ein. In diesem Falle muß $l_4 > 2$ sein. Ist $l_4 = 2m_4$ eine gerade Zahl, so kommen wir zu dem bereits unter III behandelten Gruppen, deren jede eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 von der Signatur $(1, 1; m_4)$ enthält. Die hier zu erwartenden Entwicklungen wird man demnach in manchem Betracht als Verallgemeinerungen derjenigen unter III anzusehen haben. Der entgegengesetzte Extremfall, daß nämlich $u = 8$, $v = 8$, $w = 8$ zutrifft, wird von der Signatur $(0, 3; \infty, \infty, \infty, \infty)$ geliefert.

Aus den Invarianten j_1, j_2, j_3, j_4 wollen wir gleich auch noch die Verbindung:

$$J = j_1 j_2 j_3 j_4 + j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_4^2 - 4$$

herstellen. Der Zahlwert von J ist im Intervall $-3 \leq J \leq 28$ enthalten. Die untere Grenze wird bei der Signatur $(0, 4; 2, 2, 2, 3)$ erreicht, die obere bei $(0, 4; \infty, \infty, \infty, \infty)$.

Zwischen den vier weiteren Moduln $j_{12}, j_{13}, j_{14}, j_{24}$ müssen zwei Relationen bestehen, damit wir zu einem zweidimensionalen Kontinuum kommen. Diese Relationen lauten nach A. F. I, pag. 394:

$$j_{12}^2 + j_{14}^2 - j_{13} j_{24} - u j_{12} - w j_{14} + J = 0,$$

$$j_{12} j_{14} + j_{13} + j_{24} - v = 0.$$

Zur Einführung einer geometrischen Sprechweise setzen wir:

$$j_{12} : j_{13} : j_{14} : -1 = x : y : z : t$$

und deuten x, y, z, t als homogene Raumkoordinaten. Die Invariante j_{24}

drücken wir vermöge der zweiten eben angegebenen Relation in den x, y, z, t aus und finden alsdann für die erste jener Relationen die neue Gestalt:

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz + t^2(ux + vy + wz) + Jt^3 = 0.$$

Diese eine noch bleibende Relation haben wir bei fest gegebenen u, v, w, J als *Fläche dritter Ordnung* F_3 zu deuten. In dem schon genannten Spezialfalle der Signatur $(0, 4; 2, 2, 2, 2m_4)$ kommen wir auf die in III zugrunde gelegte Fläche F_3 zurück.

Das Polygonkontinuum bei der einzelnen Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ ist zweidimensional und wurde in der Note „Über die in der Theorie der automorphen Funktionen auftretenden Polygonkontinua“ (Göttinger Nachr. 1903, Heft 5) als „einfach“ zusammenhängend erkannt. Die charakteristischen Ungleichungen sind hier $j_{12} < -2, j_{13} < -2, j_{14} < -2$ oder in den x, y, z, t geschrieben:

$$x > 2t, \quad y > 2t, \quad z > 2t.$$

Zur Darstellung des fraglichen Kontinuums haben wir somit denjenigen Teil der F_3 zu benutzen, welcher dem durch die vier Ebenen:

$$x - 2t = 0, \quad y - 2t = 0, \quad z - 2t = 0, \quad t = 0$$

eingegrenzten Tetraeder angehört.

Um den Verlauf der F_3 innerhalb dieses Tetraeders zu erkennen, setzen wir für einen Augenblick $t = 1$ und deuten der größeren Anschaulichkeit wegen x, y, z als rechtwinklige Koordinaten. Man schneide die F_3 mit einer Horizontalebene $z = 2k$, wo $k \geq 1$ gewählt werde. Der Schnitt ist die Hyperbel:

$$x^2 - 2kxy + y^2 + ux + vy + (4k^2 + 2kw + J) = 0$$

mit den Mittelpunktskoordinaten:

$$x_0 = \frac{u + vk}{2(k^2 - 1)}, \quad y_0 = \frac{v + uk}{2(k^2 - 1)}$$

und den durch:

$$y = x(k \pm \sqrt{k^2 - 1})$$

gegebenen Asymptotenrichtungen. Einer der beiden Zweige dieser Hyperbel gehört dem für uns in Betracht kommenden Quadranten $x > 2, y > 2$ der gewählten Horizontalebene an. Für $\lim k = 1$ zieht sich dieser Zweig auf den unendlich fernen Punkt der Winkelhalbierenden $x = y$ zusammen. Die Asymptotenrichtungen koinzidieren für $\lim k = 1$ mit dieser Richtung $x = y$. Wächst k von 1 bis ∞ , so entfernen sich die Asymptotenrichtungen mehr und mehr voneinander und werden schließlich für $\lim k = \infty$ die Richtungen der Achsen der x und y .

Durch Fortsetzung dieser elementaren Betrachtung stellt man unter Rückkehr zur projektiven Sprechweise folgendes Ergebnis fest: *Die Fläche F_3 ,*

d. h. der uns interessierende Teil derselben, welcher dem durch die Ebenen $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$, $t = 0$ eingegrenzten Tetraeder angehört, ist ein einfach zusammenhängendes, in den Rand der Tetraederseite $t = 0$ eingespanntes Flächenstück, welches übrigens sackartig in das Innere des Tetraeders hineinhängt. Die durch die Kante $z = 0$, $t = 0$ hindurchzulegenden Ebenen $z - 2kt = 0$ schneiden die F_3 außer in jener Kante noch in Kurven des 2^{ten} Grades, welche sich für $\lim k = 1$ auf den Punkt $x = y$, $z = t = 0$ zusammenziehen und für $\lim k = \infty$ in das Geradenpaar $x \cdot y = 0$ ausarten. Entsprechendes gilt natürlich für die Ebenen $x - 2kt = 0$ und $y - 2kt = 0$.

Ehe wir auf der F_3 den DB der automorphen Modulgruppe aufsuchen, sei folgende Betrachtung eingeschaltet. Unter den vier ganzen Zahlen l_i seien erstlich keine zwei einander gleich. Stellt alsdann (l'_1, l'_2, l'_3, l'_4) eine beliebige Permutation der (l_1, l_2, l_3, l_4) dar, so wird die Signatur $(0, 4; l'_1, l'_2, l'_3, l'_4)$ zwar, allgemein zu reden, neue Polygone liefern; aber dieselben können durch Transformation auf die oben bevorzugten Polygone zurückgeführt werden (cf. A. F. I, pag. 301) und liefern demnach dieselben automorphen Gebilde. Sind, wie einstweilen angenommen wurde, die l_1, l_2, l_3, l_4 durchaus voneinander verschieden, so gilt dasselbe von u, v, w . Gegenüber den 24 Permutationen der l_i erfahren die u, v, w ihre sechs Permutationen. Wir werden somit hier zu sechs verschiedenen Flächen F_3 geführt, deren Gleichungen durch Permutationen der u, v, w auseinander hervorgehen, und die somit selbst durch wiederholte Spiegelung an den Ebenen $y = z$, $z = x$, $x = y$ aus einer unter ihnen hergestellt werden können. Jede unter diesen sechs Flächen ist ebenso gut wie jede andere zur Darstellung des Polygonkontinuums geeignet; sie werden durch die oben erwähnten Modultransformationen ineinander übergeführt. Bei dieser Sachlage werden wir an der oben ausgesuchten F_3 festhalten.

Besonderheiten liegen vor, wenn zwei oder gar drei unter den Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 einander gleich werden. Im ersteren Falle sind zwei unter den u, v, w einander gleich, im letzteren sogar alle drei. Wir haben entsprechend nur drei verschiedene Flächen F_3 oder gar nur eine einzige F_3 . Dies hat zur Folge, daß in den fraglichen besonderen Fällen die automorphen Modulgruppen Erweiterungen durch Spiegelungen gestatten, denen alsdann entsprechende Verkleinerungen der DB parallel gehen. Wir kommen darauf unten zurück.

Eine weitere Bemerkung erfordert die oben befolgte unsymmetrische Behandlung der vier Invarianten $j_{12}, j_{13}, j_{14}, j_{24}$. Halten wir an der Anordnung (l_1, l_2, l_3, l_4) fest, so sind doch die Invarianten j_{13} und j_{24} völlig koordiniert. Statt also j_{24} zu eliminieren, können wir auch mit j_{13} so verfahren. Wir haben alsdann zu schreiben:

$$j_{12} : j_{24} : j_{14} : -1 = x' : y' : z' : t'$$

und finden, wie man sofort feststellt:

$$t'(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'y'z' + t'^2(ux' + vy' + wz') + Jt'^3 = 0.$$

Wir gelangen somit zu derselben Fläche F_3 wie vorhin; das oben durch den Punkt (x, y, z, t) dargestellte Polygon wird jetzt durch (x', y', z', t') geliefert; und es gilt, wie man leicht aus der zweiten Relation zwischen den Invarianten j_{12}, \dots abliest:

$$x' : y' : z' : t' = xt : (xz - yt - vt^2) : zt : t^2.$$

Durch diese Transformation muß somit unsere F_3 in sich selbst übergeführt werden, was man in der Tat durch direkte Rechnung leicht beweist. *Die geometrische Bedeutung der fraglichen Transformation ist die, daß sie eine symmetrische Umformung der F_3 in sich ist, deren Symmetrie- oder Übergangslinie auf der F_3 durch die Fläche zweiten Grades:*

$$xz - 2yt - vt^2 = 0$$

ausgeschnitten wird. Diese Fläche heiße F_0 , die Symmetrielinie C_0 und die symmetrische Umformung selbst werde durch das Symbol \bar{V} bezeichnet.

Aus der analytischen Gestalt von \bar{V} folgt $x' : z' : t' = x : z : t$. Je zwei einander durch \bar{V} zugeordnete Punkte liegen hiernach mit der Tetraederecke $x = z = t = 0$ auf einer Geraden. Beachtet man, daß diese Ecke selbst der F_3 angehört, und daß somit jeder von ihr ausziehende Strahl die F_3 entweder gar nicht oder in zwei weiteren Punkten schneidet, so ist die Transformation \bar{V} , welche diese beiden Punkte permutiert, in ihrer einfachsten Bedeutung erkannt. *Zugleich erkennen wir in C_0 den geometrischen Ort aller Berührungspunkte der von der fraglichen Tetraederecke an die F_3 laufenden Tangenten.* Setzen wir wie oben $t = 1$ und deuten die x, y, z als rechtwinklige Koordinaten, so handelt es sich um die zur y -Achse parallelen Tangenten. Zieht man die hyperbolischen Horizontalschnitte der F_3 mit den Ebenen $z = 2k$ wieder heran, so gewinnt man leicht weitere Aufschlüsse über den Verlauf von C_0 . Insbesondere erinnere man sich des Grenzübergangs $\lim k = 1$, wo sich die Hyperbel auf den unendlich fernen Punkt der Winkelhalbierenden $x = y$ zusammenzieht. Unter Rückkehr zur projektiven Darstellung finden wir: *Die C_0 ist eine über die F_3 hinziehende Kurve, welche den Mittelpunkt $x = y$ der Tetraederkante $z = 0, t = 0$ mit dem Mittelpunkte $y = z$ der Kante $x = 0, t = 0$ verbindet.*

Wir gehen nun gleich noch einen Schritt weiter: \bar{V} ist eine unter drei koordiniert stehenden symmetrischen Umformungen der F_3 in sich:

$$(\bar{U}) \quad x' : y' : z' : t' = (yz - xt - ut^2) : yt : zt : t^2,$$

$$(\bar{V}) \quad x' : y' : z' : t' = xt : (zx - yt - vt^2) : zt : t^2,$$

$$(\bar{W}) \quad x' : y' : z' : t' = xt : yt : (xy - zt - wt^2) : t^2,$$

von denen offenbar ganz entsprechende Bemerkungen gelten wie von \bar{V} . Die Übergangslinien C_u, C_v, C_w werden auf der F_3 durch die drei Flächen zweiten Grades:

$$(F_u) \quad yz - 2xt - ut^2 = 0,$$

$$(F_v) \quad zx - 2yt - vt^2 = 0,$$

$$(F_w) \quad xy - 2zt - wt^2 = 0$$

ausgeschnitten. Die drei Kurven C_u, C_v, C_w grenzen auf der F_3 einen Bereich ein, von dem Fig. 41 ein schematisches Bild liefert: *Es handelt sich um einen dreieckigen Bereich, und zwar ragt dieser Bereich mit seinen drei Ecken an die Ebene $t=0$ heran, welche er in den Mittelpunkten der Tetraederkanten erreicht.* Wir werden diesen Bereich alsbald von anderer Seite her wieder finden. —

Auf Grundlage der vorstehenden Ergebnisse gehen wir jetzt daran, den DB der automorphen Modulgruppe auf der einzelnen F_3 auszusondern.

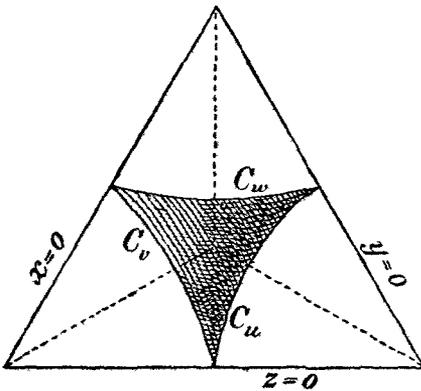


Fig. 41.

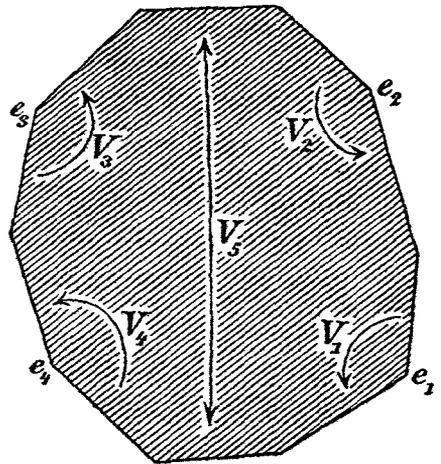


Fig. 42.

Nach allgemeinen Prinzipien soll uns hierzu die Theorie der Normalpolygone wieder die Grundlage liefern. Zufolge A. F. I, pag. 263 ist das Normalpolygon bei der Gattung $p=0, n=4$ im allgemeinen ein Zehneck mit vier festen Ecken und zwei Zyklen zufälliger Ecken. Die Gestalt des Zehnecks ist in Fig. 42 gegeben; doch könnte es auch sein, daß die hyperbolische Erzeugende V_5 die Ecken e_1, e_4 von e_2, e_3 trennt. Bewegen wir jetzt das Polygonzentrum C so, daß das Polygon gerade in Begriff steht die Ecke e_1 zu verlassen, so haben sich die durch V_1 einander zugewiesenen Seiten auf Punkte zusammengezogen, und das Polygon hat die Gestalt des in Fig. 43 (folg. Seite) skizzierten Achtecks angenommen. C liegt nun auf dem Mittellote der Verbindungsgeraden $e_1 e_1'$ bzw. für $l_1 = \infty$ auf einem Lote zu dieser Geraden. Man bewege jetzt C auf diesem Lote weiter, bis das Polygon im Begriffe steht, die Punkte e_1, e_1'

zu verlassen. In diesem Augenblick haben sich die durch V_5 einander zugeordneten Seiten auf Punkte zusammengezogen, und das Polygon ist zum Sechseck der Fig. 44 geworden.

Man könnte an der Allgemeingültigkeit der vorstehenden Überlegung zweifeln und tatsächlich gibt es auch Fälle, in denen die Herstellung eines Normalsechsecks bezeichneter Art auf dem vorgeschriebenen Wege

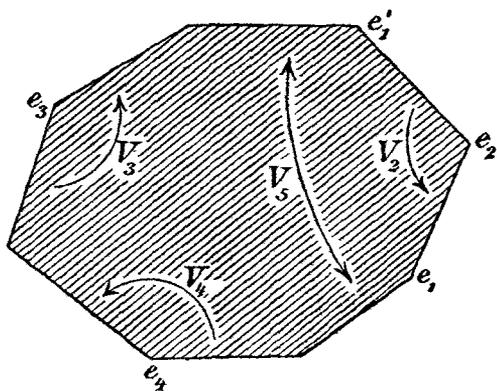


Fig. 43.

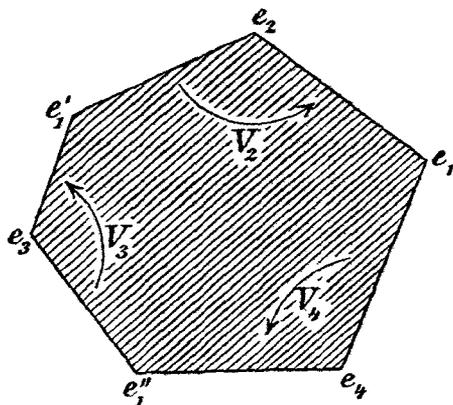


Fig. 44.

nicht durchführbar ist. Um eine einwurfsfreie Überlegung zu begründen, knüpfen wir an die Ausartung der Normalpolygone an, welche man gewinnt, falls das Zentrum C in den Punkt e_1 hineinrückt. Man gelangt so zu einem Netze von Bereichen, deren einzelner aus l_1 (also im Falle einer parabolischen Substitution V_1 aus unendlich vielen) DB der Gruppe besteht. Zuzufolge des „Reziprozitätssatzes“ der Normalpolygone umfaßt der zu e_1 gehörige Bereich alle die Punkte, welche als Zentren C gewählt Normalpolygone liefern, die eben an diesen Punkt e_1 heranreichen. Der fragliche Bereich teilt insofern die Gestalt der Normalpolygone, als er geradlinig begrenzt ist und dreigliedrige zufällige Ecken mit konkaven Winkeln aufweist.

Wählen wir nun einen solchen dreigliedrigen Eckpunkt zum Zentrum C , so muß das zugehörige Normalpolygon an die drei zugehörigen Punkte e_1, e_1', e_1'' heranreichen und ein Sechseck darstellen. Aber man hat die zwei Fälle zu unterscheiden, daß die Reihenfolge der Ecken e_2, e_3, e_4 längs des Sechseckumfanges sowohl die in Fig. 44 gewählte, als auch die entgegengesetzte sein kann.

Wir legen nun erstlich die in Fig. 44 gewählte Eckenanordnung zu Grunde, verbinden das Zentrum C geradlinig mit den sechs Ecken und ziehen das Dreieck e_2, e_3, e_4 (cf. Fig. 45). Die drei Geraden von C nach e_1, e_1', e_1'' sind hier einander gleich; und

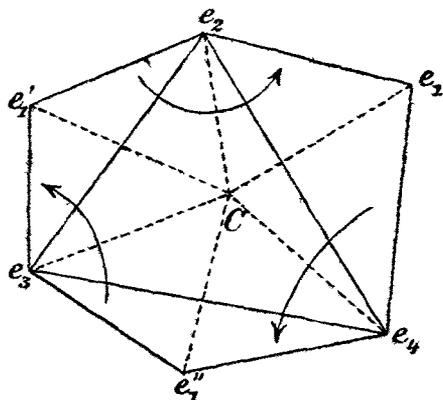


Fig. 45.

also sind die Dreiecke $e_1 e_2 C$ und $e_1' e_2 C$ einander kongruent, desgleichen die Dreiecke $e_1' e_3 C$ und $e_1'' e_3 C$, sowie endlich $e_1'' e_4 C$ und $e_1 e_4 C$. Denkt man die mit Ce_2, Ce_3, Ce_4 äquivalenten Geraden in allen Sechsecken des Netzes gezogen, zugleich aber alle übrigen Verbindungsgerade von Punkten e fortgenommen, so restiert die Ausartung des Polygonnetzes, welche wir oben durch Verschiebung von C in den Punkt e_1 erzielten. Wir erkennen: Das fragliche ausgeartete Polygonnetz weist erstens „feste“ mit e_2, e_3, e_4 äquivalente Ecken auf; alle weiteren Ecken sind mit dem Zentrum C des Normalsechsecks äquivalent. Daraus aber ergibt sich sofort: *Bei der einzelnen Gruppe Γ gibt es stets ein und nur ein Normalsechseck mit einem dreigliedrigen Zyklus fester Ecken e_1, e_1', e_1'' .*

Die bei dem ausgearteten Polygonnetze an den „zufälligen“ Ecken auftretenden drei Winkel liegen in Fig. 45 als Winkel zwischen den drei Geraden von C nach e_2, e_3, e_4 vor. Da diese Winkel nie konvex werden können, so merken wir als eine weitere Eigenschaft des Normalsechsecks an, *daß das Zentrum C notwendig dem Dreieck e_2, e_3, e_4 angehört.*

Die gegebene Entwicklung ist der Umkehrung fähig: Jedes Sechseck, welches die bislang genannten Eigenschaften besitzt, dessen Winkel an den Ecken e_2, e_3, e_4 bzw. dessen Winkelsumme am Zyklus e_1, e_1', e_1'' die vorgeschriebene Größe haben, ist ein Normalsechseck unserer Art. Erstlich nämlich stellt es offenbar den DB einer Gruppe der Signatur $(0, 4; l_1, \dots)$ dar; zweitens aber liefert der Punkt C als Zentrum notwendig gerade das vorgelegte Sechseck als Normalpolygon. Wir stellen somit jede Gruppe unseres „Gruppenkontinuums“ einmal und nur einmal dar, falls wir alle inkongruenten Sechsecke beschriebener Gestalt und zwar sowohl für die in Fig. 45 vorliegende Anordnung der Ecken e_2, e_3, e_4 als für die entgegengesetzte zulassen.

Der DB der automorphen Modulgruppe wird nun auf der F_3 durch alle diejenigen Punkte dargestellt, welche den vorbezeichneten Sechsecken korrespondieren. Um diesen DB einzugrenzen, müssen wir die Grenzfälle der Normalsechsecke untersuchen und beginnen wieder mit der in Fig. 45 zu Grunde gelegten Reihenfolge der Ecken e_2, e_3, e_4 . Wir gelangen nun zu einem Grenzfalle, wenn das Zentrum C entweder auf eine der Seiten oder in eine der Ecken des Dreiecks $e_2 e_3 e_4$ rückt.

Man nehme erstlich an, das Zentrum C sei ein Punkt der Seite $e_2 e_4$, jedoch weder e_2 noch e_4 selbst. In diesem Falle ist die Summe der beiden Winkel $\sphericalangle e_1 C e_2, \sphericalangle e_1 C e_4$ gleich π geworden; und da andererseits:

$$\sphericalangle e_1 C e_2 = \sphericalangle e_1' C e_2,$$

$$\sphericalangle e_1 C e_4 = \sphericalangle e_1'' C e_4$$

gilt, so sind die beiden einander gleichen Winkel $\sphericalangle e_1' C e_3$ und $\sphericalangle e_1'' C e_3$

zu 0 geworden: Die Ecken e_1', e_3, e_1'' sind auf der absoluten Ellipse der Maßbestimmung zur Koinzidenz gekommen und liefern zusammen mit e_1 einen Zyklus *parabolischer* Spitzen (cf. Fig. 46); die Gerade e_2e_4 ist zur Symmetrielinie geworden. Man wird ganz entsprechende Überlegungen für den Fall durchführen, daß C auf eine der beiden anderen Seiten des Dreiecks $e_2e_3e_4$ rückt. Indem wir zusammenfassen, erhalten wir das Resultat: *Rückt C auf eine der Seiten des Dreiecks $e_2e_3e_4$, jedoch nicht in*

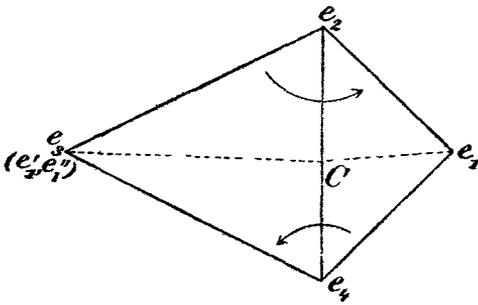


Fig. 46.

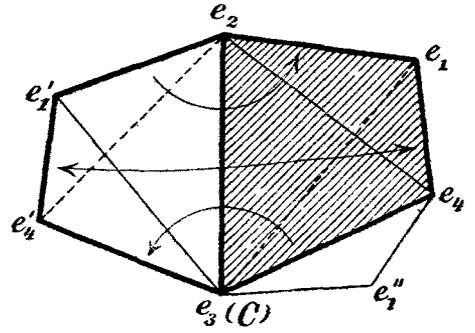


Fig. 47.

eine Ecke, so erhalten wir als Grenzgebilde dasjenige der Signatur $(0, 3; \infty, l_3, l_4)$ resp. $(0, 3; l_2, \infty, l_4)$, $(0, 3; l_2, l_3, \infty)$. Die drei zugehörigen Punkte der F_3 werden wir weiter unten angeben.

Es rücke jetzt zweitens C in die Ecke e_3 . Unter diesen Umständen nimmt das Seckseck die in Fig. 47 angegebene Gestalt an. Wir haben hier noch das Dreieck $e_1''e_3e_4$ abgetrennt und vermöge der Substitution V_3 verlegt. Der DB der Gruppe erscheint jetzt aus zwei „konjugierten Vierecken“ $e_1e_2e_3e_4$ und $e_1'e_2e_3e_4'$ zusammengesetzt (cf. A. F. I, pag. 304). Das Besondere ist aber hier, daß diese beiden Vierecke einander symmetrisch sind; denn aus den allgemeinen Winkelrelationen am Zentrum C und der Ecke e_2 des Sechsecks folgert man hier sofort:

$$\sphericalangle e_1e_2e_3 = \sphericalangle e_1'e_2e_3, \quad \sphericalangle e_2e_3e_4 = \sphericalangle e_2e_3e_4',$$

woraus die Symmetrie beider Vierecke hervorgeht.

Die Kreisbogenvierecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}, \frac{\pi}{l_4}$ in dieser Reihenfolge liefern nun, wie man sofort feststellt, ein *eindimensionales Kontinuum*. Um dieses Kontinuum invariant zu charakterisieren, bemerken wir, daß die zu den Punkten e_1', e_4' gehörenden Substitutionen:

$$V_1' = V_2^{-1}V_1V_2, \quad V_4' = V_3V_4V_3^{-1}$$

sind. Soll somit die Spiegelung S an der Seite e_2e_3 unseren DB in sich selbst transformieren, so werden die durch S transformierten Substitutionen V_1, V_2, V_3, V_4 mit $V_1'^{-1}, V_2^{-1}, V_3^{-1}, V_4'^{-1}$ gleich sein:

$$SV_1S = V_2^{-1}V_1^{-1}V_2, \quad SV_2S = V_2^{-1}, \quad SV_3S = V_3^{-1}, \quad SV_4S = V_3V_4^{-1}V_3^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$S V_1 S \cdot S V_3 S = V_2^{-1} V_1^{-1} V_2 \cdot V_3^{-1}.$$

Da aber $S^2 = 1$ und $V_3 V_4 = V_2^{-1} V_1^{-1}$ gilt, so folgt weiter:

$$S(V_1 V_3)S = V_3(V_4 V_2) V_3^{-1}.$$

$V_1 V_3$ und $V_4 V_2$ haben somit, als ineinander transformierbar, gleiche Invarianten, d. h. es gilt $j_{24} = j_{13}$ und also zufolge der zweiten Invariantenrelation:

$$j_{12} j_{14} + 2j_{13} - v = 0.$$

In den homogenen Koordinaten geschrieben lautet diese Relation:

$$xz - 2yt - vt^2 = 0,$$

so daß die zu unserem linearen Gruppenkontinuum gehörenden Punkte der F_3 auf der oben eingeführten Kurve C_o gelegen sind.

Man zeigt nun leicht durch das übliche Schlußverfahren weiter, daß das lineare Kontinuum der symmetrischen Gebilde gerade eineindeutig auf die C_o bezogen ist. In der Tat hat unser Kontinuum zwei Grenzfälle. Der erste wird erreicht, wenn e_3 und e_4 oder (was im projektiven Sinne auf dasselbe hinausläuft) e_1 und e_2 zu einem parabolischen Punkte verschmelzen. Wählen wir letztere Alternative, so kommt in der Grenze das Gebilde $(0, 3; \infty, l_3, l_4)$, das wir oben bereits für den Fall erreichten, daß C auf die Seite $e_3 e_4$ rückt. Ganz entsprechend finden wir als zweites Grenzgebilde dasjenige der Signatur $(0, 3; l_2, l_3, \infty)$, welches oben für ein auf der Geraden $e_2 e_3$ gelegenes Zentrum C eintrat. Der Grenzübergang zum Gebilde $(0, 3; \infty, l_3, l_4)$ erfordert $\lim j_{12} = -2$, der zum Gebilde $(0, 3; l_2, l_3, \infty)$ aber $\lim j_{14} = -2$. Im ersten Falle werden wir zu dem auf der Kante $x = 0, t = 0$ des Tetraeders gelegenen Endpunkte von C_o geführt, im zweiten Falle zum Endpunkte auf der Kante $z = 0, t = 0$.

Fragen wir jetzt weiter, wie viele Kontinua symmetrischer Gebilde in unserem Gruppenkontinuum überhaupt enthalten sind, so werden hierbei diejenigen Anordnungen der Punkte e , welche durch zyklische Permutationen ineinander übergehen, als nicht verschieden zu gelten haben. Unter den sechs restierenden Anordnungen werden dann noch je zwei solche, die einander entgegengesetzt sind, wie (e_1, e_2, e_3, e_4) und (e_4, e_3, e_2, e_1) , stets zu gleichen Kontinuis führen; in der Tat beachte man, daß z. B. in Fig. 47 die Anordnung e_4, e_3, e_2, e_1 am „konjugierten“ Vierecke vorliegt. Es bleiben somit im ganzen nur drei Kontinua symmetrischer Gebilde, welche den Anordnungen:

$$(e_1, e_2, e_3, e_4), (e_1, e_3, e_4, e_2), (e_1, e_4, e_2, e_3)$$

korrespondieren. Zu diesen drei Kontinuis werden wir geführt, falls das Polygonzentrum C resp. in die Ecken e_3, e_4, e_2 des Dreiecks $e_2 e_3 e_4$

hineinrückt. Auf der F_3 entsprechen diesen drei Kontinuis symmetrischer Gebilde die drei Kurven C_v, C_w, C_u ; das von diesen Kurven eingegrenzte in Fig. 41 schraffierte Dreieck stellt denjenigen Teil des DB der automorphen Modulgruppe dar, welcher unseren Normalsechsecken mit der in Fig. 45 gewählten Eckenanordnung $e_2 e_3 e_4$ entspricht.

Der Fall, daß die Reihenfolge der Punkte e_2, e_3, e_4 längs des Umfangs des Normalsechsecks nicht die bisher angenommene, sondern die entgegengesetzte ist, erledigt sich jetzt sehr leicht. In Fig. 48 ist ein Sechseck dieser Art stark umrandet; es hat die Ecken $e_1, e_2, e_1', e_4', e_1'', e_3$. Durch Verlegung des Dreiecks $e_3 e_4' e_1''$ vermöge V_3^{-1} entspringt das schraffierte Doppelviereck, welches aus zwei konjugierten Vierecken e_1, e_2, e_3, e_4 und e_1', e_2, e_3, e_4' besteht. Letztere sind gegenwärtig einander nicht symmetrisch; die Spiegelung S an $e_2 e_3$ liefert somit, ausgeübt auf Fig. 48, den DB einer neuen Gruppe. Dieser DB aber ist ein Sechseck, bei dem die Eckenfolge die oben zuerst zu Grunde gelegte ist.

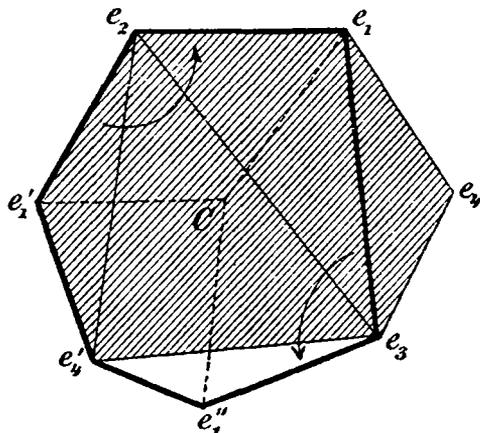


Fig. 48.

Rechnen wir somit die Transformation des DB durch die Spiegelung S auf die Invarianten j_{12}, j_{13}, j_{14} oder auf x, y, z, t um, so haben wir diejenige Transformation gewonnen, welche wir auf das von C_u, C_v, C_w eingegrenzte Dreieck ausüben müssen, um den uns noch fehlenden Teil des DB der automorphen Modulgruppe zu gewinnen.

Der invarianten Darstellung des Gebildes legten wir nun allemal die zu e_1, e_2, e_3, e_4 (cf. Fig. 48) gehörenden Substitutionen zu Grunde. Nach der vorgeschriebenen Transformation treten an Stelle dieser vier Substitutionen V_1, V_2, V_3, V_4 die folgenden vier:

$V_1' = S V_2^{-1} V_1^{-1} V_2 S, V_2' = S V_2^{-1} S, V_3' = S V_3^{-1} S, V_4' = S V_3 V_4^{-1} V_3^{-1} S,$
wie man ohne Mühe feststellen wird. Hieraus ergeben sich sofort die nachfolgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_1' V_2' &= S V_2^{-1} V_1^{-1} S = S (V_1 V_2)^{-1} S, \\ V_3' V_1' &= S V_3^{-1} V_2^{-1} V_1^{-1} V_2 S = S (V_4 V_2) S, \\ V_2' V_3' &= S V_2^{-1} V_3^{-1} S = S (V_3 V_2)^{-1} S. \end{aligned}$$

Es gelten somit für die Invarianten folgende Gleichungen:

$$\check{j}_{12} = j_{12}, \check{j}_{13} = j_{34} = -j_{12} j_{14} - j_{13} + v, \check{j}_{14} = j_{14}.$$

In x, y, z, t schreibt sich die gewonnene Transformation:

$$x' : y' : z' : t' = xt : (zx - yt - vt^2) : zt : t^2;$$

sie ist somit keine andere als die oben mit \bar{V} bezeichnete symmetrische Umformung der F_3 in sich mit der Übergangslinie C_v . Transformiert man das auf der F_3 durch die Kurven C_u, C_v, C_w eingegrenzte Dreieck durch \bar{V} , so ist das aus dem ursprünglichen und dem transformierten Dreieck

aufgebaute Doppeldreieck ein DB der automorphen Modulgruppe. Fig. 49 gibt ein schematisches Bild des Doppeldreiecks, welches die der Zeichnung zu Grunde liegende Ebene $t=0$ mit den vier Ecken erreicht. Als Erzeugende der automorphen Modulgruppe liefert der DB die beiden Transformationen:

$$U = \bar{W}\bar{V}, \quad W = \bar{V}\bar{U},$$

die den in der Figur angegebenen Pfeilrichtungen entsprechen. Statt durch

\bar{V} können wir das ursprüngliche durch C_u, C_v, C_w eingegrenzte Dreieck auch längs C_u oder C_w vermöge der Substitutionen \bar{U} resp. \bar{W} reproduzieren. Entsprechend werden wir im Interesse der Symmetrie die drei Transformationen:

$$U = \bar{W} \cdot \bar{V}, \quad V = \bar{U} \cdot \bar{W}, \quad W = \bar{V} \cdot \bar{U}$$

als Erzeugende der automorphen Modulgruppe bezeichnen, zwischen denen alsdann die Beziehung besteht:

$$W \cdot V \cdot U = 1.$$

Die einfachste ausführliche Gestalt dieser Transformationen ist:

$$(U) \quad \frac{x'}{t'} = \frac{x}{t}, \quad \frac{x}{t} \cdot \frac{z}{t} - \frac{y}{t} - \frac{y'}{t'} = v, \quad \frac{x'}{t'} \cdot \frac{y'}{t'} - \frac{z}{t} - \frac{z'}{t'} = w,$$

$$(V) \quad \frac{y'}{t'} \cdot \frac{z'}{t'} - \frac{x}{t} - \frac{x'}{t'} = u, \quad \frac{y'}{t'} = \frac{y}{t}, \quad \frac{x}{t} \cdot \frac{y}{t} - \frac{z}{t} - \frac{z'}{t'} = w,$$

$$(W) \quad \frac{y}{t} \cdot \frac{z}{t} - \frac{x}{t} - \frac{x'}{t'} = u, \quad \frac{x'}{t'} \cdot \frac{z'}{t'} - \frac{y}{t} - \frac{y'}{t'} = v, \quad \frac{z'}{t'} = \frac{z}{t}.$$

Die Invarianz der F_3 ist mit Hilfe dieser Gestalt der Erzeugenden besonders leicht zu zeigen. Der gesamten Modulgruppe entspricht ein Netz von Dreiecken, welches die F_3 lückenlos und einfach bedeckt: die Grenze des Netzes wird von den drei in der Ebene $t=0$ gelegenen Tetraederkanten gebildet, in welche die F_3 eingespannt ist. Die Transformationen U, V, W sind aperiodisch. Die vorliegende automorphe Modulgruppe erweist sich als isomorph mit der in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen auftretenden

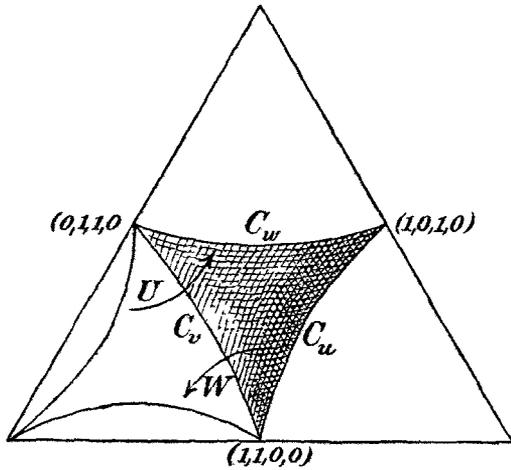


Fig. 49.

den Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe, d. i. mit der Gruppe der Signatur $(0, 3; \infty, \infty, \infty)$.

Die gewonnenen Ergebnisse sind in voller Übereinstimmung mit den vorläufigen Angaben über die Erzeugung der Modulgruppe in A. F. I, pag. 395. Die damals mit T_1 bezeichnete Transformation war durch Abänderung des kanonischen Querschnittsystems auf der Riemannschen Fläche berechnet und hatte die Gestalt:

$$\begin{aligned} \check{j}'_{12} &= j_{12}, & \check{j}'_{13} &= j_{14}, & \check{j}'_{14} &= -j_{12}j_{14} - j_{13} + v, \\ u' &= u, & v' &= w, & w' &= v. \end{aligned}$$

Es tritt also hier noch eine Permutation der u, v, w ein, d. h. ein Übergang zu einer anderen unter den oben erwähnten sechs Flächen F_3 . Dagegen transformiert T_1^2 unsere F_3 in sich:

$$(T_1^2) \quad \begin{cases} \check{j}'_{12} = j_{12}, & \check{j}'_{13} = -j_{12}j_{14} - j_{13} + v, \\ \check{j}'_{14} = j_{12}^2j_{14} + j_{12}j_{13} - vj_{12} - j_{14} + w. \end{cases}$$

Offenbar kann man diese Transformation T_1^2 auch so schreiben:

$$j'_{12} = j_{12}, \quad j_{12}j_{14} + j_{13} + j'_{13} - v = 0, \quad j'_{12}j'_{13} + j_{14} + j'_{14} - w = 0.$$

Damit aber haben wir unsere obige Transformation U erreicht.

Es sind jetzt nur noch die beiden Fälle zu betrachten, daß es unter den Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 entweder zwei oder gar noch mehr als zwei gleiche gibt. Im ersten Falle sind unter den u, v, w zwei einander gleich, im zweiten ist $u = v = w$.

Es gelte etwa zuerst $v = w \geq u$. Alsdann wird unsere F_3 samt dem auf ihr gelegenen Dreiecksnetze durch die Spiegelung:

$$(S_1) \quad x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y, \quad t' = t$$

in sich transformiert, so daß die Erweiterung der Modulgruppe durch diese Spiegelung statthaft ist. Der DB der erweiterten Gruppe, welche

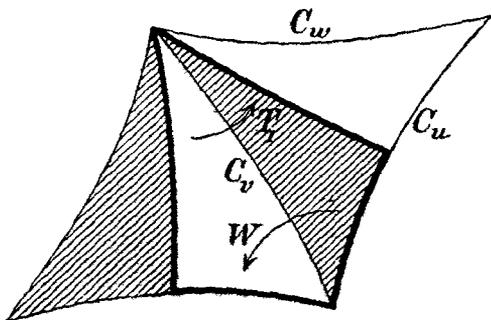


Fig. 50.

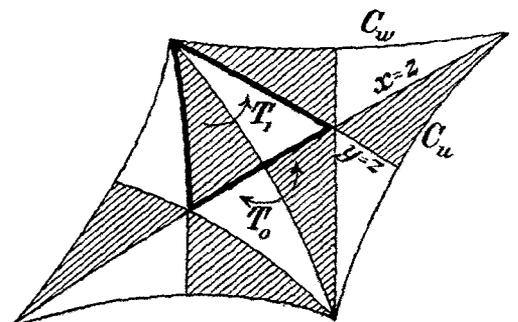


Fig. 51.

nunmehr mit der Gruppe der Signatur $(0, 3; 2, \infty, \infty)$ isomorph ausfällt, ist in Fig. 50 stark umrandet; die Erzeugenden sind W und:

$$(S_1 \bar{V} = T_1) \quad x' : y' : z' : t' = xt : zt : (xz - yt - vt^2) : t^2.$$

In der That ist diese letztere Substitution keine andere als die oben mit T_1 bezeichnete.

Sind endlich mindestens drei unter den Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 einander gleich, so gilt $u = v = w$. Dann ist die Erweiterung der Gruppe durch alle drei Spiegelungen S_1, S_2, S_3 an den Ebenen $y = z, z = x, x = y$ möglich. Der DB der so erweiterten Gruppe, welche sich mit der Gruppe der Signatur $(0, 3; 2, 3, \infty)$ isomorph erweist, ist jetzt das in Fig. 51 (s. pag. 509) stark umrandete Dreieck; die Erzeugenden sind T_1 und:

$$(S_2\bar{V} = T_0) \quad x':y':z':t' = zt:(xz-yt-ut^2):xt:t^2. \quad -$$

Durchführung des Kontinuitätsbeweises bei den Gebilden der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$.

Die Durchführung des Kontinuitätsbeweises für die Gebilde der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ gestaltet sich nun höchst einfach. Sei $z = \varphi(\xi)$ bei einem einzelnen Gebilde eine Hauptfunktion. Vermöge derselben wird das Polygon auf die Ebene der Variablen z abgebildet. In letzterer entsprechen den festen Polygonecken vier Punkte, deren Werte z wir gleich selbst wieder mit e_1, e_2, e_3, e_4 bezeichnen. Unserem Gruppenkontinuum steht demnach als *Kontinuum algebraischer Gebilde die Mannigfaltigkeit der mit vier Punkten signierten Ebenen gegenüber, wobei diesen vier Punkten e_1, e_2, e_3, e_4 vier ganze Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 zugeordnet sind.*

Natürlich sind zwei derart signierte Ebenen, welche durch lineare Transformation von z ineinander überführbar sind, als nicht wesentlich voneinander verschieden anzusehen. Um demnach zu einer invarianten Darstellung des Kontinuums der algebraischen Gebilde zu gelangen, haben wir das Doppelverhältnis:

$$\lambda = - \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_3)(e_4 - e_2)}$$

der vier Punkte e der z -Ebene einzuführen.

Wir nehmen zuvörderst wieder an, daß die sämtlichen Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 voneinander verschieden sind. Gegenüber den 24 Permutationen der e erfährt λ seine wohlbekannten sechs Substitutionen. In der That bleibt λ bei den Permutationen der Vierergruppe unverändert, da diese vier Permutationen, aber auch nur diese vier durch lineare Transformationen von z bewirkt werden können. Nehmen wir demnach irgend eine Permutation vor, bei der λ eine von der Identität verschiedene Substitution erfährt, so werden wir, da unter den Zahlen l keine zwei einander gleich sind, zu einem wesentlich neuen Gebilde gelangen. *Gegenwärtig müssen wir somit die ganze Ebene der komplexen Variablen λ heranziehen, um jedes algebraische Gebilde unseres Kontinuums, und jedes nur einmal zu gewinnen.*

Nun ist der in Fig. 49 dargestellte DB der automorphen Modulgruppe

eindeutig stetig auf die λ -Ebene abgebildet, und umgekehrt ist die Beziehung der λ -Ebene auf jenen DB „höchstens“ eindeutig, wobei man jedoch je zwei einander zugeordnete Randpunkte des DB als nicht wesentlich verschieden anzusehen hat. Wie ist des näheren diese Beziehung beschaffen?

Die Punkte der C_v liefern die symmetrischen Gebilde bei der Anordnung e_1, e_2, e_3, e_4 . Hier wird λ reell und gehört dem Intervall $0 \leq \lambda \leq 1$ an. Den Übergang zu dem auf der Kante $x = 0, t = 0$ gelegenen Endpunkte von C_v erzielen wir oben durch Verschmelzen der Polygonecken e_1, e_2 zu einer parabolischen Spitze. Diesem Grenzfalle gehört $\lambda = 0$ zu. Ebenso findet man dem anderen Endpunkte von C_v den Wert $\lambda = 1$ zugeordnet. Man wende auf die beiden uns soeben beschäftigenden linearen Kontinua unsere wohlbekannte Schlußweise des Kontinuitätsbeweises an und findet: Die Kurve C_v bildet sich eineindeutig stetig auf die von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1$ reichende Strecke der reellen λ -Achse ab. In genau derselben Weise finden wir die C_u auf die Strecke von $\lambda = 1$ bis $\lambda = \infty$, die C_w auf diejenigen von $\lambda = -\infty$ bis $\lambda = 0$ der reellen λ -Achse abgebildet, so daß der Rand des in Fig. 49 schraffierten Dreiecks gerade eineindeutig stetig auf die reelle λ -Achse bezogen ist.

Es fragt sich nun, ob das Innere jenes Dreiecks sich auf die positive oder die negative λ -Halbebene abbildet. Hierüber ist durch eine besondere Untersuchung zu entscheiden. Man kann zu diesem Zwecke z. B. so verfahren. Man transformiere einen Punkt der Kurve C_v durch $U = T_1^2$ und beschreibe einen Weg vom ersten zum transformierten Punkt; dieser Weg führt zunächst durch das schraffierte Dreieck. Die Bedeutung von T_1^2 als Transformation des Schnittsystems der Riemannschen Fläche (z -Ebene) ist in A. F. I, pag. 300ff. dargelegt. Die Beschreibung des eben genannten Weges auf der F_3 läuft hier darauf hinaus, daß wir den Übergang vom ersten zum zweiten Schnittsystem durch Umläufe der Punkte e herstellt. Am einfachsten ist es, $e_1 = 0, e_3 = 1, e_4 = \infty$ festzuhalten und $e_2 = \lambda$ allein laufen zu lassen. Im obigen Falle wird λ zunächst die positive Halbebene betreten, so daß das Abbild des schraffierten Dreiecks der Fig. 49 in der positiven Halbebene λ zu suchen ist.

Es ist jetzt alles vorbereitet, um das Kontinuitätsverfahren in der üblichen Gestalt zur Anwendung zu bringen. Wir werden finden, daß das schraffierte Dreieck auf die positive λ -Halbebene umkehrbar eindeutig stetig bezogen ist.

Die Operation \bar{V} bedeutete nun am Polygon der ζ -Halbebene eine Spiegelung desselben an einem Kreise. Beim Übergang zur z -Ebene bleibt der Charakter der Transformation als einer Spiegelung an einem Kreise gewahrt. Die Folge ist, daß λ bei Ausübung von \bar{V} in seinen konjugiert

komplexen Wert übergeht: Das nicht-schraffierte Dreieck der Fig. 49 liefert, auf die λ -Ebene übertragen, die negative Halbebene. Indem wir zusammenfassen, finden wir als Resultat: *Der DB der automorphen Modulgruppe ist im Falle lauter verschiedener Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 eineindeutig stetig auf die λ -Ebene bezogen.*

Sind zwei unter den Zahlen l einander gleich, ist etwa $l_1 = l_2$, während keine weiteren Gleichheiten auftreten, so gilt $v = w \geq u$, und der DB der Modulgruppe reduziert sich auf den in Fig. 50 stark umrandeten Bereich. Bei den algebraischen Gebilden liefert ein Austausch von e_1 und e_2 bei festen e_3, e_4 kein neues Gebilde. Bei diesem Austausch aber erfährt λ die Substitution

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1};$$

ihr ordnen wir als DB den in Fig. 52 stark umrandeten Kreis zu, welcher uns nunmehr das Kontinuum der algebraischen Gebilde eindeutig darstellt. Es kommen in diesem Falle neue symmetrische Gebilde hinzu, bei denen e_3 und e_4 auf der reellen

z -Achse liegen, während e_1 und e_2 konjugiert komplex sind. Indem man auf diese Gebilde unsere Kontinuitätsbetrachtung ausübt, findet man in gewohnter Art, daß sich die Seite $y = z$ des DB der automorphen Modul-

gruppe auf den der positiven λ -Halbebene angehörenden, von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2$ ziehenden Halbkreis abbildet, usw. In bekannter Fortsetzung des Verfahrens gelangen wir zu dem Schlusse, daß sich auch jetzt der DB der automorphen Modulgruppe eineindeutig stetig auf den das Kontinuum der algebraischen Gebilde darstellenden Bereich abbildet.

Endlich gelangen wir zum extremen Falle $u = v = w$, wo

der DB der automorphen Modulgruppe in Fig. 51 stark umrandet ist. Man wird ohne Mühe den Nachweis führen können, daß sich derselbe auf den in Fig. 53 stark umrandeten Bereich abbildet, welcher gegenwärtig das Kontinuum algebraischer Gebilde darstellt.

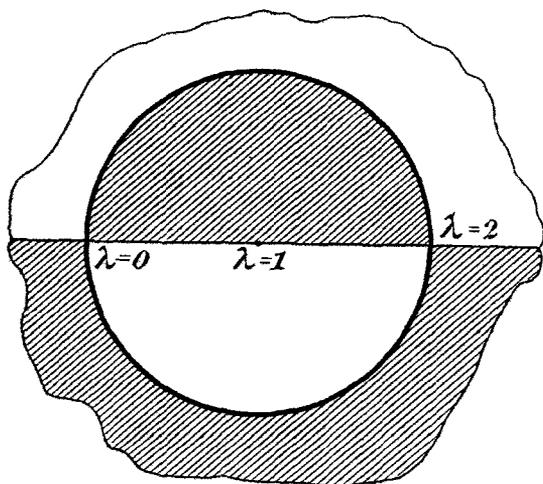


Fig. 52.

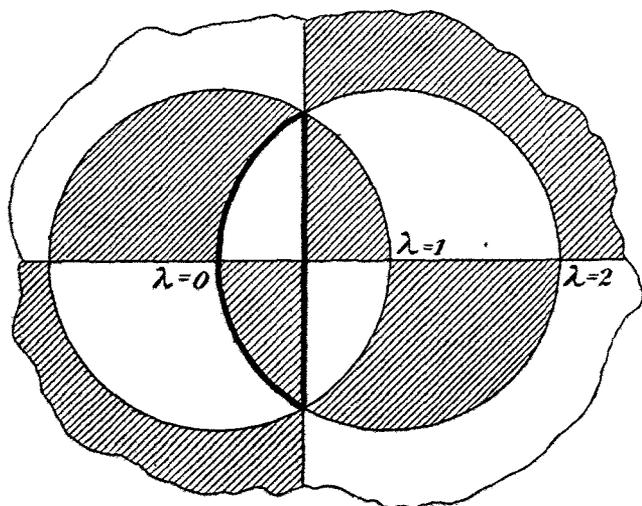


Fig. 53.

Als Schlußergebnis dürfen wir hiernach das Fundamentaltheorem für die Gebilde der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ in folgenden Worten zum Ausdruck bringen: *Die Ebene der Variablen z sei in irgend einer Art mit vier Punkten e_1, e_2, e_3, e_4 signiert, denen vier ganze Zahlen $l_i > 1$ (∞ eingeschlossen) zugeordnet seien. Es gibt alsdann auf dieser Ebene stets eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\xi = f(z)$, welche die geeignet zerschnittene Ebene auf ein Grenzkreispolygon der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ derart abbildet, daß die vier signierten Punkte die festen Ecken des Polygons liefern. —*

Braunschweig, Juli 1904.
