

# Ueber die Polar-Hexaeder bei den Flächen dritter Ordnung.

Von

L. CREMONA in Rom.

(Am 19. September 1877 der Naturforscherversammlung in München vorgelegt.)

Wenn

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

so folgt aus der Identität:

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) [(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_4 + x_5 + x_6)^2 \\ & \quad - (x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)] \\ & = (x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_4 + x_5 + x_6)^3 \\ & = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 \\ & \quad + 3(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + 3(x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4), \end{aligned}$$

dass man die Gleichung:

$$(2) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0$$

in jede der *zehn* Formen setzen kann:

$$(3) \quad (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + (x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4) = 0,$$

.....  
 .....

welche den Combinationen (123) (456) etc. entsprechen.

Die Fläche dritter Ordnung also, welche durch die Gleichung (2) dargestellt ist, besitzt als dreifache Tangentenebenen folgende *fünfzehn*:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0, \quad \dots, \quad x_5 + x_6 = 0.$$

Dieselben lassen sich zu *zehn* Paaren conjugirter Trieder gruppiren und schneiden sich in den *fünfzehn* Geraden:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = 0,$$

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_5 = 0, \quad x_4 + x_6 = 0,$$

.....  
 .....

von denen jedesmal drei in einer der *fünfzehn* Ebenen liegen.

## Die sechs Ebenen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

bilden ein vollständiges *Hexaeder*, dessen paarweis gegenüberstehende *zwanzig* Ecken die Scheitel der soeben genannten *zwanzig* Trieder sind. Diese *zwanzig* Scheitel sind also zu vier und vier auf *fünfzehn* Geraden gelegen (den Kanten des Hexaeders), und durch jede dieser Geraden geht eine der dreifachen Tangentialebenen. Durch die nämlichen Kanten verlaufen noch *fünfzehn* weitere Ebenen:

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0, \quad \dots, \quad x_5 - x_6 = 0,$$

welche, zusammen mit den dreifachen Tangentenebenen, die von den Flächen des Hexaeders eingeschlossenen Winkel harmonisch theilen. Diese *fünfzehn* neuen Ebenen verlaufen zu drei und drei durch *zwanzig*, paarweise conjugirte, gerade Linien und schneiden sich überdies zu sechs und sechs in *fünfzehn* Punkten; diese *zwanzig* Geraden und diese *fünfzehn* Punkte sind den Ecken und den Kanten des Hexaeders einzeln zugeordnet\*).

Das Hexaeder ist *polar*, das heisst, es gehört zur Classe der *Polsechsfäche*, die Hr. Reye entdeckt und in einer Abhandlung: *Geometrischer Beweis des Sylvester'schen Satzes etc.*\*\* (Nr. 15), beschrieben hat. In der That, man weiss, dass von den Scheiteln zweier conjugirter Trieder jeder der Pol ist für einen Polarkegel, dessen Mittelpunkt der andere Scheitel ist. Aber unser Hexaeder besitzt überdies die Eigenschaft, dass man es unmittelbar construiren kann, wenn man von den 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung solche *fünfzehn* kennt, welche nach Ablösung einer *Doppelsechse* übrig bleiben.

Nun bilden die 27 Geraden *sechsendreissig* Doppelsechse. Daher existiren für eine allgemeine Fläche dritter Ordnung 36 Hexaeder, die dem von den Ebenen  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_6 = 0$  gebildeten analog sind, und jedes Hexaeder gehört zu einer Doppelsechse. Das heisst, die 36 Doppelsechse geben die Lösung des folgenden Problems: *man will die Gleichung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung unter der Bedingung (1) auf die Form (2) transformiren.*

Sind  $P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0, T = 0, U = 0$  die Ebenen zweier conjugirter Trieder, so dass also:

$$(4) \quad PQR + kSTU = 0$$

die Gleichung der Fläche ist, und will man das Polar-Hexaeder finden, dem die Scheitel der beiden Trieder angehören, so hat man einfach:

\*) Vgl. meine Abhandlung: *Teoremi stereometrici dai quali si deducano le proprietà dell'esagrammo di Pascal* (R. Accademia dei Lincei, Roma, 8. April 1877).

\*\*) Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 78.

$$P' = pP, \quad Q' = qQ, \quad R' = rR, \\ S' = sS, \quad T' = tT, \quad U' = uU,$$

zu setzen und nun  $p, q, \dots$  in der Art zu bestimmen, dass identisch

$$(5) \quad P' + Q' + R' + S' + T' + U' = 0$$

ist, während die Gleichung der Fläche folgende wird:

$$P'Q'R' + S'T'U' = 0.$$

Es sei zu dem Zwecke:

$$T = aP + bQ + cR + dS, \\ U = a'P + b'Q + c'R + d'S;$$

dann bestimmen sich die Coefficienten  $p, q, \dots$  durch die Gleichungen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p + ta + ua' = 0, \\ q + tb + ub' = 0, \\ r + tc + uc' = 0, \\ s + td + ud' = 0, \\ k p q r + s t u = 0, \end{array} \right.$$

Eliminirt man hier  $p, q, r, s$ , so erhält man eine cubische Gleichung in  $\frac{t}{u}$ , von deren Wurzeln jede eine Lösung des Problems liefert. Denn

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = Q' + R' - P', \quad x_2 = R' + P' - Q', \quad x_3 = P' + Q' - R', \\ x_4 = T' + U' - S', \quad x_5 = U' + S' - T', \quad x_6 = S' + T' - U' \end{array} \right.$$

wird eins der gesuchten Hexaeder sein.

Ein Paar conjugirter Trieder gehört also zu drei verschiedenen Hexaedern. In der That, zwei Doppelsechse haben entweder sechs oder vier gerade Linien gemein. Nennt man nun zwei Doppelsechse *associirt*, wenn sie sechs Gerade gemein haben, so ist jede Doppelsechse zu zwanzig Doppelsechsen associirt, die unter einander wieder paarweise associirt sind. Drei Doppelsechse, die paarweise associirt sind, enthalten zusammen 18 gerade Linien; die neun übrigen geraden Linien gehören einem Paar conjugirter Trieder an, und dieses findet sich also in drei Hexaedern, welche den drei associirten Doppelsechsen entsprechen. Man hat in dieser Weise 120 Tripel paarweise associirter Doppelsechse, welche zu den 120 Paaren conjugirter Trieder zugehören.

Die Formeln (7) zeigen, dass die Ebenen  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  den andern  $P, Q, R, S, T, U$  einzeln entsprechen und dass die Trieder  $x_1x_2x_3$  und  $PQR$  mit Bezug auf die Ebene  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  perspectivisch sind. Vermöge der Identität (5) oder (1) unterscheidet sich diese Ebene nicht von  $x_4 + x_5 + x_6 = 0$ ; man hat also nur zehn solche Ebenen etc. Es folgt also, dass bei zwei associirten Hexaedern, vermöge der gemeinsamen conjugirten Trieder, die Seitenflächen paar-

weise zusammengeordnet sind. Und aus den Gleichungen (6) schliesst man, dass die drei Ebenen:

$$q_1 Q + r_1 R - p_1 P = 0,$$

$$q_2 Q + r_2 R - p_2 P = 0,$$

$$q_3 Q + r_3 R - p_3 P = 0,$$

welche den drei Wurzeln der cubischen Gleichung für  $t : u$  entsprechen, ein Büschel bilden: eine Bemerkung, die selbstverständlich ebenso für die anderen Tripel zusammengehöriger Seitenflächen der drei associirten Hexaeder gilt.

Unsere Hexaeder führen jetzt für die allgemeine Fläche dritter Ordnung, auf der die 27 Geraden bekannt sein sollen, zu einer Construction des *Sylvester'schen Pentaeders*. In der That, betrachten wir zwei Hexaeder, die zwei beliebigen Doppelsechsen entsprechen. Die Developpable dritter Classe, welche die sechs Ebenen des ersten Hexaeders zu Tangentenebenen hat, und die analoge Developpable, welche die Ebenen des anderen Hexaeders berührt, haben nach einem Theorem des Hrn. Reye *fünf* gemeinsame Tangentenebenen, und diese eben sind die Seitenflächen des Sylvester'schen Pentaeders. Man führt die Construction dieser Ebenen auf diejenige der fünf isolirten Schnittpunkte zweier ebener Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt zurück, von denen jede durch den Doppelpunkt der anderen hindurchläuft.