

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 68.

1. Ueber die Elasticitätszahlen und Elasticitätsmoduln des Glases; von R. Straubel.

Das Interesse, welches die Werthe des Verhältnisses von Quercontraction und Längsdilatation isotroper Substanzen früher besaßen, dürfte heute nicht mehr in dem Maasse vorhanden sein; denn es gilt heute nicht mehr, durch experimentelles Material für oder gegen die Zulässigkeit der Moleculartheorie der Elasticität von Navier und Poisson zu entscheiden. Durch eine Reihe von Untersuchungen scheint mir vielmehr die bekannte Folgerung der älteren Elasticitätstheorie, dass das obige Verhältniss — die Elasticitätszahl — für alle isotropen Substanzen den Werth 0,25 haben müsse, widerlegt zu sein.

Allerdings kann man gegen die meisten Untersuchungen und vor allem die von Metallen den Vorwurf erheben, die Isotropie des Materiales nicht mit genügender Sicherheit nachgewiesen zu haben; es bleiben aber einige, wie die von Voigt, bei denen dieser Punkt in sorgfältiger Weise berücksichtigt worden ist und gleichwohl der von der Theorie geforderte Werth sich nicht ergab. Ueberdies hat sich auch die theoretische Sachlage geändert; einerseits verlangt die neuere, *nicht* auf molecularer Grundlage aufgebaute Elasticitätstheorie keinen festen Werth für den Poisson'schen Coefficienten und andererseits ist eine einfache, *molecularare* Auffassung der Constitution isotroper Körper von Voigt entwickelt worden, die den gleichen Vorzug hat und in ihren Folgerungen sehr auffallend bestätigt worden ist.

Wenn aber auch das unmittelbare theoretische Interesse an Bestimmungen der Elasticitätszahl geringer geworden ist, so scheinen mir gleichwohl systematische Untersuchungen dieser Grösse wünschenswerth zu sein. In methodischer Beziehung ist unentschieden, ob die verschiedenen Bestimmungsverfahren für den gleichen Stoff den gleichen Werth liefern, und ob Iso-

tropiemangel und Materialverschiedenheit die grossen Unterschiede in den Werthen verschiedener Beobachter erklären; in sachlicher Beziehung ist unsere Kenntniss viel zu wenig ausgedehnt, um Gesetzmässigkeiten erkennen zu lassen oder vermuthete Beziehungen zu anderen Constanten prüfen zu können.

Die vorliegende Abhandlung soll in erster Linie unsere Kenntniss der Elasticitätszahlen erweitern; die Untersuchung der benutzten Methode hat dagegen nur innerhalb gewisser Grenzen und eine Vergleichung mit anderen Methoden überhaupt nicht stattgefunden. Aus diesem Grunde sind kleinere systematische Fehler in den absoluten Werthen nicht ausgeschlossen, wenn auch über geringe Beträge hinaus unwahrscheinlich.

Als Untersuchungsmaterial diente eine grössere Reihe der im Jenaer glastechnischen Laboratorium hergestellten, von Hrn. Dr. Schott freundlich zur Verfügung gestellten Gläser. Zu den Typen der fabrikatorisch hergestellten Arten wurden noch Gläser hinzugenommen, die aus dem einen oder anderen Grunde ein unmittelbares technisches Interesse nicht haben, sondern aus Versuchsschmelzungen stammen. Gerade diese letzteren liessen infolge ihrer oft sehr abnormen Zusammensetzung am ersten interessante Resultate erwarten.

Für die Wahl dieses Materiales sprachen verschiedene Gründe. Einmal sind diese Gläser gut definirte Stoffe, deren Zusammensetzung und Herstellungsweise eine, wenn auch nicht vollständig, so doch genügend gleichmässige Beschaffenheit garantirt. Es ist dies allerdings nicht für alle Gläser in gleichem Maasse der Fall; bei einigen Arten variiren die Eigenschaften verschiedener Schmelzungen sehr wenig, bei anderen relativ stark; für die vorliegende Untersuchung dürften aber die individuellen Unterschiede selbst der letzteren noch wenig ins Gewicht fallen.

Zweitens sind Gläser jedenfalls diejenigen Stoffe, bei denen die Isotropie am ersten sich constatiren lässt.¹⁾

1) Zwar hat W. Voigt (Wied. Ann. 15. p. 497. 1882) mit Recht Cornu gegenüber betont, dass eine nur in *einer* Richtung angestellte optische Untersuchung für das elastische Verhalten nicht entscheidend ist und bei einer directen Prüfung eines Glasblockes elastische Inhomogenität gefunden; es fehlt aber die Angabe, dass die optische Prüfung — correct angestellt — den Defect des Glasstückes nicht angezeigt hat.

Die meisten Gläser waren für optische Zwecke bestimmt. Da hierfür Freiheit von Spannungen sehr weitgehend erforderlich ist und bei der Vollkommenheit der heutigen Kühlmethoden auch thatsächlich erreicht wird, waren Spannungen von grösserem Betrage von vornherein kaum zu erwarten.

An den benutzten Glasprismen geringere Isotropiemängel zu entdecken, war aber noch weniger wahrscheinlich; denn abgesehen von dem Umstande, dass die Prismen nur auf einer Seite polirt waren und die Durchsicht nur durch Einbetten in Oel¹⁾ sich erreichen liess, ist die Untersuchung bei ungefähr 0,25 cm Dicke natürlich viel unvollkommener als die bei einer Schicht von 15—20 cm²⁾, wie sie an den Platten im glastechnischen Laboratorium gehandhabt werden kann.

In der That konnten nur bei dem infolge der hohen Erweichungstemperatur anfangs überhaupt nicht gekühlten Glase 665 Spannungen gefunden werden.

Ein dritter Grund für die Wahl des Materiales war der, dass andere an diesem vorgenommene Constantenbestimmungen in wünschenswerther Weise ergänzt werden konnten. Es gilt dies zunächst für die von Winkelmann und Schott³⁾ durch Biegungsbeobachtungen bestimmten Zugelasticitätsmoduln und die von Auerbach⁴⁾ bestimmten Eindringungsmoduln. Denn da das elastische Verhalten eines isotropen Körpers innerhalb der Grenzen der elastischen Vollkommenheit durch zwei Constanten charakterisirt ist, so genügt die Hinzunahme einer weiteren Grösse zu einer der beiden genannten, um sämtliche Elasticitätsmoduln, also insbesondere die beiden Hauptmoduln, nämlich den Volumen- oder Compressionsmodul und den

1) Die Prismen wurden mit der matt geschliffenen Seite auf spannungsfreie Glasplatten gelegt und je nach den Brechungsexponenten einige Tropfen Cedernholzöl oder Monobromnaphtalin zwischen die Platten gebracht.

2) Die benutzten Prismen sind fast ohne Ausnahme so aus den Platten herausgeschnitten, dass die Breite (Dimension senkrecht zur Biegungsebene) senkrecht zur Plattenfläche steht. Aus der Entstehung der Spannungen ist aber klar, dass für die Prüfung hauptsächlich Durchsicht längs der Plattenfläche in Betracht kommt.

3) A. Winkelmann u. O. Schott, Wied. Ann. **51**. p. 697. 1894; **61**. p. 105. 1897.

4) F. Auerbach, Wied. Ann. **53**. p. 1000. 1894.

Gestalts- oder Torsionsmoduln zu kennen.¹⁾ Dies ist um so wichtiger, als ja bekanntlich die directe Bestimmung des Volumenmoduls sehr schwierig ist.

Ferner hat man thermodynamisch eine Reihe von Beziehungen abgeleitet, die interessante thermische Grössen, wie die specifischen Wärmen bei constanter Deformation, die adiabatischen Elasticitätsmoduln und die Temperaturänderung bei adiabatischen Deformationen aus anderen, für die Mehrzahl der Jenaer Gläser vollständig bekannten, Daten ableiten lassen.

Frühere Bestimmungen.

Von früheren Bestimmungen der Elasticitätszahl des Glases sind zu erwähnen: die Untersuchungen von Everett, Cornu, Voigt, Cantone, Kowalski und Amagat.

Everett²⁾ beobachtete mit einer der Kirchhoff'schen ziemlich nahe stehenden Anordnung Biegung und Drillung und fand für zwei Flintgläser vom specifischen Gewichte 2,935 und 2,942 für den Poisson'schen Coefficienten die Werthe 0,224 und 0,258. Bei der damaligen Einförmigkeit der Gläser und dem nahezu gleichen specifischen Gewichte fällt die grosse Differenz dieser beiden Zahlen auf.

Cornu³⁾ wandte das Verfahren an, die Deformation der Flächen eines Prismas bei der Biegung durch Interferenzerscheinungen sichtbar zu machen und aus den letzteren die Elasticitätszahl zu bestimmen. Er nahm ein Prisma aus St. Gobain'schem Spiegelglas von rechteckigem Querschnitt, legte es horizontal auf zwei parallele Schneiden und bog es durch an den Enden angehängte Gewichte durch. Die horizontalen Flächen nehmen hierbei infolge des positiven Werthes der Elasticitätszahl sattelförmige Gestalt an und das Verhältniss ihrer Hauptkrümmungshalbmesser giebt direct den Poisson'schen Coefficienten. Dieses Verhältniss bestimmte Cornu

1) Dass die Combination der Bestimmungen von Winkelmann u. Schott und von Auerbach praktisch nicht ausreichend ist, liegt an der Form der Beziehung zwischen Elasticitätszahl, Eindringungs- und Zugmodul.

2) D. Everett, Phil. Trans. 157. p. 139. 1867; Proc. Roy. Soc. 15. p. 356. 1867; 16. p. 248. 1868; Rep. Brit. Ass. 2. p. 153. 1867.

3) M. A. Cornu, Compt. rend. 69. p. 333. 1869.

durch mikrometrische Messung der Abstände der Interferenzstreifen auf mit Magnesiumfunken hergestellten Photogrammen. Er hat leider nur die Mittelwerthe für die einzelnen Prismen angegeben; um ein Urtheil zu ermöglichen, gebe ich seine Zahlen wieder.

1,6 cm	500 g	0,138 cm	18,4	0,225
1,6	500	0,2037	12,3	0,226
1,6	500	0,1370	7,3	0,224
1,6	500	0,204	6,4	0,257
12,0	500	0,1554	8,7	0,236
12,0	1000	0,850	3,76	{ 0,243 0,250

Die Tabelle enthält in der ersten Columnne den Schneidenabstand, in der zweiten das Maximalgewicht, in der dritten die Dicke, in der vierten das Verhältniss der Querdimensionen des Prismas und in der letzten den Werth der Elasticitätszahl. Die Glasprismen waren bis auf eines von 60 cm, das bei der letzten Versuchsreihe benutzt wurde, 12 und 20 cm lang.

Aus den Zahlen lässt sich kein gesetzmässiger Einfluss der Dimensionen auf den Werth der Elasticitätszahl ableiten. Die Prismen 1 und 3, mit gleicher Dicke und sehr verschiedener Breite, liefern fast gleiche Werthe, die Prismen 2 und 4, mit ebenfalls gleicher Dicke und geringerem Breitenunterschied, ausserordentlich verschiedene Werthe, und ähnliche Resultate ergeben sich durch Vergleichung von 1 und 2 mit 4 und 5. Wenn Cornu seinen Mittelwerth 0,237 als Bestätigung der Navier-Poisson'schen Zahl auffasst, so darf man daraus wohl schliessen, dass er seinen Zahlen keine grosse Genauigkeit zutraut.

Zeitlich folgt dann die Arbeit von Voigt¹⁾, der die Elasticitätszahl aus sehr sorgfältig ausgeführten Biegungs- und Drillungsbeobachtungen bestimmte und durch sein Resultat nach meiner Meinung zum erstenmal einwurfsfrei die Unrichtigkeit des Navier-Poisson'schen Werthes nachgewiesen hat. Er untersuchte zwei Gläser, ein grünliches, muthmaasslich von Guinaud in Paris stammendes, und weisses rheinisches Spiegelglas und erhielt die Werthe 0,213 bez. 0,208.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 15. p. 497. 1882.

Cantone¹⁾ arbeitete mit Röhren aus thüringer Glas. Er bestimmte die Aenderung des inneren Volumens bei Aussendruck und die der Länge bei Innendruck und erhielt für die Poisson'schen Coefficienten von vier Röhren die Werthe 0,246, 0,261, 0,264, 0,256.

Kowalski²⁾ hat an gezogenen Glasstäbchen von J. F. Greiner in Stützerbach durch Biegungs- und Drillungsbeobachtungen in einer ersten Arbeit den Werth 0,226, in einer späteren 0,212 gefunden. Diese Werthe beziehen sich auf 0°; der Temperatureinfluss ergibt sich nach der zweiten Arbeit aus der Gleichung:

$$1 + \mu = (1 + \mu_0) \frac{1 - 0,00106 t}{1 - 0,00151 t},$$

worin μ die Elasticitätszahl und t die Temperatur bedeutet.

Amagat³⁾ arbeitete mit gezogenen Röhren; er maass die innere Volumenänderung bei Aussendruck und bei Längszug und erhielt aus sehr gut übereinstimmenden Werthen für das gewöhnliche Röhrenglas 0,2451, für Krystallglas 0,2499.

Beobachtungsmethoden.

Ich habe zwei verschiedene Methoden versucht, aber schliesslich nur die eine, im Princip mit der Cornu'schen übereinstimmende benutzt. Gemeinschaftlich war beiden, dass man erstrebte, durch entgegengesetzt gleiche, auf zwei Endflächen eines Prismas von rechteckigem Querschnitt wirkende Kräftepaare „kreisförmige Biegung“ herbeizuführen und aus der sattelförmigen Deformation einer Seitenfläche die Elasticitätszahl zu bestimmen.

Bei der ersten Methode wurden die beiden Hauptkrümmungen der Fläche durch die Veränderungen gemessen, die ein homocentrisches Büschel bei der Reflexion von dieser Fläche erfährt.⁴⁾ Die astigmatische Differenz der reflectirten Welle, d. h. die Differenz der Hauptkrümmungen, wurde durch eine Vorrichtung, die continuirliche Variation des Astigmatismus

1) M. Cantone, Rend. d. R. Aca. dei Lincei 4. p. 220 u. p. 292. 1888.

2) J. v. Kowalski. Wied. Ann. 36. p. 307. 1889; 39. p. 155. 1890.

3) E. H. Amagat, Ann. de Chimie et Physique (6) 22. p. 95. 1891; Compt. rend. 107. p. 618. 1888.

4) R. Straubel, Wied. Ann. 64. p. 794. 1898.

gestattete, compensirt und die hierbei unverändert gebliebene mittlere Krümmung der reflectirten Welle, d. h. die Summe der beiden Hauptkrümmungen, durch Verschiebung des Oculares des Beobachtungsfernrohres gemessen. Da die Methode zwar hinreichend empfindlich, aber in der Handhabung keineswegs einfacher war als die an zweiter Stelle benutzte und mehrere Vorzüge vor dieser — so vor allem mit einem Blicke über Oberflächendefecte und Justirung zu orientiren — nicht besass, habe ich bei den eigentlichen Messungen von ihrer Benutzung abgesehen.

Die zweite angewandte Methode war im wesentlichen die von Cornu angegebene, d. h. zwischen der Sattelfläche des Prismas und einer ebenen Fläche wurden Newton-Fizeau'sche Interferenzstreifen erzeugt und aus deren Form der Poisson'sche Coefficient bestimmt. Da dieser gleich dem Verhältniss der Hauptkrümmungsradien ist, gilt es dieses Verhältniss zu bestimmen.

Cornu hat, wie bereits oben bemerkt, dies dadurch gethan, dass er die relativen Werthe der Hauptkrümmungsradien durch mikrometrische Messung der Abstände der Interferenzstreifen parallel und senkrecht zur Biegungsebene ermittelte. Es giebt aber, wie übrigens auch Cornu bekannt war, noch einen zweiten, principiell einfacheren Weg. Setzen wir voraus, dass die der antiklastischen Fläche zum Zwecke der Interferenz gegenüber gestellte ebene Fläche parallel zur Tangentialebene des Mittelpunktes der ersteren liegt, so sind für senkrecht auffallendes Licht die Curven gleichen Gangunterschiedes parallel und senkrecht zur Biegungsebene symmetrische Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptotenrichtungen und der Winkel der beiden Richtungen giebt ein Maass für das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien der Fläche. Bezeichnen wir nämlich denjenigen der beiden Winkel, welcher die zur Biegungsebene Senkrechte enthält, mit 2α , so ist $\operatorname{tg}^2 \alpha$ gleich der Elasticitätszahl (μ).

Ich habe nun ausschliesslich Messungen der Asymptotenwinkel ausgeführt, deren Genauigkeit bereits nach kurzer Uebung für den vorliegenden Zweck nichts zu wünschen übrig liess. Ob man die Maxima oder Minima der Interferenzerscheinungen vorzieht, ist pincipiell gleichgültig; es ist aber

leicht einzusehen, dass die Minima wesentlich schärfer und infolge dessen für die Messung geeigneter sind. Natürlich wird man diejenige Hyperbel benutzen, bei der die Asymptotenrichtungen sich am besten beurtheilen lassen, und das ist eine der beiden, deren Scheitel dem Mittelpunkt der Interferenzerscheinungen am nächsten liegen. Um die Genauigkeit der Asymptotenwinkelmessung wesentlich zu steigern, habe ich — wenigstens bei allen subjectiven Versuchen — nur den Grenzfall benutzt, bei dem eine Hyperbel in zwei sich schneidende Gerade zerfallen war. Obwohl es sich nur um kleine Bruchtheile der Wellenlänge des angewandten Lichtes handelt, konnte man dies ohne grössere Schwierigkeit durch Aenderung der Durchbiegung erreichen.

Einzelheiten der Beobachtungsmethode.

Die Beobachtungen wurden theils an der Interferenzerscheinung direct, theils an Photogrammen derselben ausgeführt. Als Lichtquelle diente eine durch ein Inductorium erregte Wasserstoffröhre; zu den photographischen Aufnahmen wurde das Licht durch einen improvisirten Spectralapparat mit zwei Flintprismen zerlegt, und die grünblaue Linie (H_{β}) benutzt; für die subjectiven Versuche, bei denen H_{α} verwandt wurde, genügte es aber bei guten Wasserstoffröhren, die Einfarbigkeit durch ein rothes, unmittelbar vor das Auge gesetztes (Kupferoxydul) Glas zu bewirken.

Das parallel gemachte Licht fiel senkrecht auf die zu untersuchende Fläche des durchgebogenen Prismas, die zum Zwecke der Interferenz eine keilförmige (20°), in einem Aluminiumrahmen hängende Glasplatte trug, deren Stellung durch eine Reihe von Schrauben sorgfältig regulirt werden konnte. Durch die keilförmige Gestalt der Deckglasplatte konnte — nach dem Vorgange von Abbe — der eine der beiden unerwünschten Reflexe vermieden werden; die Beseitigung des von der Unterseite des Prismas kommenden Lichtes wurde einfach dadurch bewirkt, dass das Prisma auf der Unterseite matt gelassen wurde. Das diffus reflectirte Licht ist, wie man sich überzeugt, sowohl für die subjective Beobachtung, wie die photographische Aufnahme vollkommen unschädlich.

Von grosser Bedeutung ist die Art der Durchbiegung und der Lagerung des Prismas. Um dem Falle ungestörter „kreisförmiger Biegung“ möglichst nahe zu kommen, muss man die Angriffspunkte der Kräfte von den zur Messung benutzten Theilen entfernen und die Hindernisse für die Ausbildung der Querkrümmung beseitigen. Das Prisma wurde von einem, aus *einem* Stück gearbeiteten Schneidenpaare gegen ein zweites symmetrisch liegendes mit grösserem Schneidenabstande gedrückt.

Während Cornu die Durchbiegung des Prismas durch Gewichte herbeigeführt hatte, zog ich es bei der grösseren Ruhe der Interferenzcurven wegen vor, dieses durch eine Schraube zu thun. Dabei war es natürlich von Wichtigkeit, ein unsymmetrisches, der Theorie nicht entsprechendes Angreifen der Kräfte zu verhindern.

Um die ungestörte Ausbildung der Querkrümmung zu ermöglichen, waren die Schneiden auf ungefähr 0,1 cm Breite abgeschliffen und zwischen das durchzubiegende Prisma und die Schneiden dünne Gummistreifchen eingeschaltet. Letzteres ist von sehr grosser Wichtigkeit; wenigstens ist es mir ohne Zwischenlegung von Gummi oder einem ähnlich wirkenden Stoff (lockere Pappe) nie möglich gewesen, regelmässige Resultate zu erzielen.

Von dem Interferenzbilde aus kehrt dann das Licht zurück und gelangt entweder in die photographische Camera oder nach dem Durchsetzen der zur Winkelmessung dienenden Vorrichtung in das Beobachtungsfernrohr.

Die Messung der Photogramme geschah auf dem drehbaren und mit Gradtheilung versehenen Tische eines mineralogischen Mikroskopes dadurch, dass nach erfolgter Centrirung durch Drehung des Tisches die beiden Asymptotenrichtungen einem Ocularfaden parallel gestellt wurden. Für die Messungen an der Interferenzerscheinung selbst eignete sich der von Pulfrich¹⁾ construirte Interferenzmessapparat sehr gut, nachdem ich das ursprünglich nur für die Aufrichtung des Streifensystems bestimmte Dove'sche Prisma durch Hinzufügung von Theilkreis und Nonius zu Messzwecken hatte einrichten lassen. Die

1) C. Pulfrich, Zeitschr. für Instrumentenk. 18. p. 261. 1898.

Asymptotenrichtungen wurden durch Drehung des Dove'schen Prismas wiederum einem festen Ocularfaden parallel gestellt; da die Drehung des Bildes doppelt so rasch erfolgt wie die des Prismas, hat man natürlich die abgelesenen Winkelwerthe zu verdoppeln; da aber andererseits wegen der Beziehungen $\operatorname{tg}^2 \alpha = \mu$ nicht die ganzen, sondern die halben Asymptotenwinkel verlangt wurden, so ergaben die Ablesungsdifferenzen immer unmittelbar die verlangten Werthe.

Beschreibung der benutzten Apparate.

Ich wende mich nun zur Beschreibung der Instrumente und werde mich hierbei auf die schliesslichen Formen be-

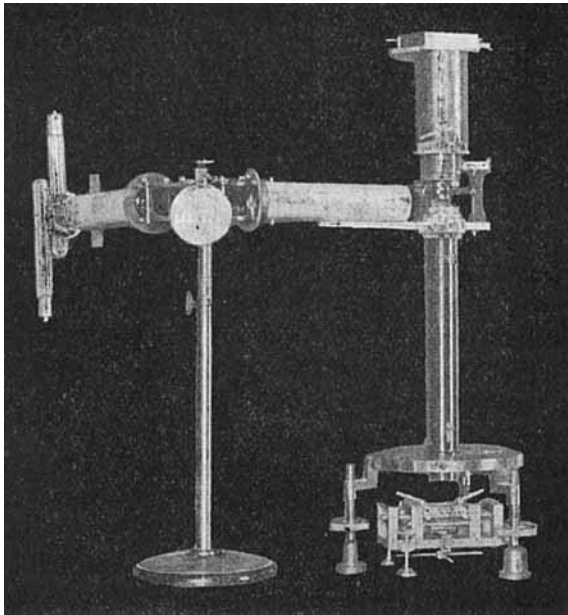


Fig. 1.

schränken. Der benutzte Apparat besteht naturgemäss aus zwei Theilen, nämlich einerseits den Vorrichtungen zur Lichtgebung und Beobachtung bez. photographischer Aufnahme und andererseits dem Durchbiegungsapparate mit Deckplatte.

Apparat für photographische Aufnahme. (Fig. 1.)

Zunächst wurde versucht den hier in Betracht kommenden Theil des Abbe'schen Dilatometers unter Ersetzung des Beobachtungsfernrohres durch eine kleine Camera für den vorliegenden Zweck zu benutzen; aus Gründen, die an anderer Stelle¹⁾ angegeben sind, wurde aber hiervon abgesehen. Versuchsanordnungen mit Prisma zwischen Interferenzfläche und Auge wurden vermieden und die Einfarbigkeit des Lichtes durch spectrale Zerlegung ausserhalb des Beobachtungsfernrohres bewirkt. Ein dem Dilatometer entnommenes Autocollimationsrohr mit Reflexionsprisma wurde in verticaler Stellung mit dem Objectivende in die Platte eines starken, auf Schrauben stehenden Dreifusses geschraubt, und der in Höhe und Neigung verstellte Spectralapparat daneben gestellt (Fig. 1). An die Stelle des kleinen Beobachtungsrohres des Abbe'schen Dilatometers trat eine kleine, ganz aus Metall gearbeitete Camera, die im wesentlichen aus zwei satt ineinander passenden Rohren (Messing und Aluminium) und einem das Objectiv (Satz-anastigmat, C. Zeiss. Serie VIa $f_1 = 16,8$; $f_2 = 12,8$ cm) in sich tragenden angeschraubten Trichter bestand. Die zugehörige Cassette war aus Aluminium und für ein Plattenformat $4 \times 4,5$ cm berechnet.

Apparat für die directen Messungen.

Bezüglich des für die directen Messungen benutzten, von Pulfrich²⁾ construirten Interferenzmessapparates weise ich auf die ausführliche Beschreibung von Pulfrich selbst hin und begnüge mich mit der Bemerkung, dass die zur Winkelmessung dienende Vorrichtung (das drehbar vor das Beobachtungsfernrohr gesetzte Dove'sche Prisma) trotz der starken Benutzung ausgezeichnet functionirt, aber zuerst in Bezug auf die Justirung Schwierigkeiten gemacht hat.

Durchbiegungsapparat. (Fig. 2.)

Auf einer mit drei Fusschrauben versehenen Messingplatte von $0,8 \times 5,0 \times 12,0$ cm erheben sich zwei Paare von Bügeln, die auf ihren der Platte zugewandten Seiten die

1) R. Straubel, Wied. Ann. 66. p. 346. 1898.

2) C. Pulfrich, l. c.

0,1 cm breiten und 4 cm langen Schneiden tragen. Die zusammengehörigen Schneiden haben Abstände von 10 und 7 cm. Wenn irgend möglich wurde das äussere Schneidenpaar benutzt; nur für diejenigen Glasarten, von denen ge-

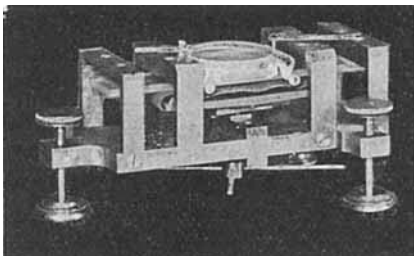


Fig. 2.

nügend grosse homogene Stücke nicht zu erlangen waren (es sind das nur zwei Gläser und die Borsäure), kamen die Schneiden mit kleinerem Abstände in Anwendung. Um aber bei den Beobachtungen mit grösserem Schneidenabstände nicht zu stören, war die Ent-

fernung des zweiten Schneidenpaares von der Messingplatte 0,1 cm grösser gewählt worden. Die Mitte der Messingplatte wurde von einer Schraube mit 0,03 cm Ganghöhe durchsetzt, die den Zweck hatte, durch Vermittelung der gleich zu beschreibenden, den äusseren gleichen, aber nach oben gerichteten Innenschneiden das Glasprisma gegen die Aussenschneiden zu drücken und so die Durchbiegung herbeizuführen. Die Schraube war auf der Unterseite der Grundplatte mit vier zu einander senkrechten, ungefähr 7 cm langen Armen versehen, mit denen es ohne Schwierigkeit möglich war, die Durchbiegung des Prismas bis auf kleine Bruchtheile einer Wellenlänge zu reguliren. — Die Innenschneiden sassen auf einer starken Messingplatte und waren durch Wegnahme des Materiales aus einer rechteckigen Platte entstanden.

Um einen gleichmässigen, der Theorie entsprechenden Kräfteangriff auf das Prisma herbeizuführen, war die folgende Einrichtung getroffen worden. Die Schraube wirkt zunächst auf einen fest geführten, vertical beweglichen Bügel, der durch eine versenkte Feder nach unten gezogen wird. Dieser Bügel hat auf der Oberseite eine der Längsrichtung des Durchbiegungsapparates parallele Schneide, die durch Vermittelung eines Zwischenstückes den Druck der Schrauben auf die Innenschneiden überträgt. Das Zwischenstück besteht aus einer 0,4 cm dicken quadratischen Platte, die auf den beiden Seiten

mit einer zur Aufnahme einer Schneide bestimmten Furche versehen war. In die untere griff die Mittelbügelschneide ein, in die obere, senkrecht zu der ersten stehende, eine auf der Unterseite der Innenschneidenplatte befindliche Schneide. Diese einfache, aber principiell keineswegs einwandfreie Vorrichtung hat so befriedigend functionirt, dass keine Veranlassung war, davon abzugehen.

Es erübrigt schliesslich, über die Vorrichtung zur Justirung der Deckplatte einige Worte zu sagen. Die runde

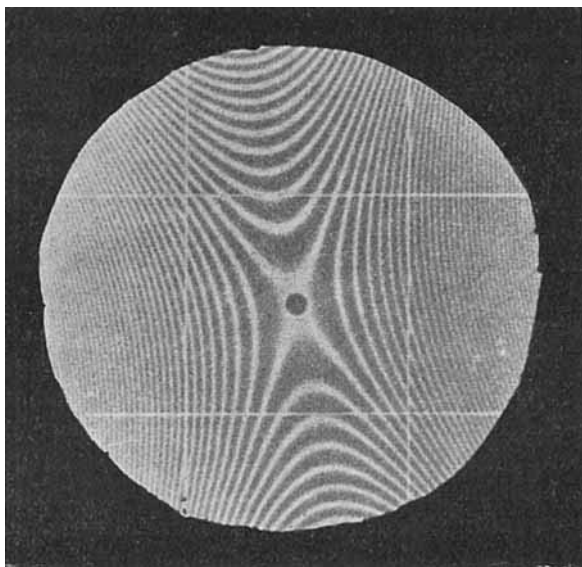


Fig. 3. Vergr.: 3.

Deckplatte von 3,6 cm Durchmesser war in einem leichten Aluminiumrahmen auf drei Punkten gelagert; der Rahmen stand mit drei feinen Fusschrauben, die für die Feinbewegung lange leichte Aluminiumarme trugen, direct auf dem durchgebogenen Prisma. Um ein seitliches Abgleiten und Verschieben in der Querrichtung zu vermeiden, waren vier umgebogene überhängende Theile des Rahmens horizontal von Schrauben durchsetzt, die die seitliche Verschiebung nach Belieben beschränken liessen. Das Gleiten in der Längsrichtung des Prismas wurde durch das zweite Bügelpaar verhindert.

Auf der Unterseite der schwach keilförmigen Deckplatte befand sich ein zur Bestimmung der Dimensionen der Interferenzerscheinungen dienendes eingezähtes Strichkreuz mit kleinen, 2 mm entfernten Querstrichen, die in und senkrecht zur Biegungsebene Längenmessungen auf 0,02 cm gestatteten.¹⁾

Beobachtung.

Man justirt zunächst den Apparat zur Lichtgebung und Beobachtung, bez. photographischer Aufnahme in sich, d. h. im wesentlichen, man regulirt die Beleuchtung und die Stellung des Beobachtungsfernrohres bez. der Camera. Da die Winkelmessung im Interferenzbilde am sichersten wird, wenn man den festen Ocularfaden mit den Schenkeln des zu messenden Winkels zur Deckung bringt, so soll im Gesichtsfelde ein markirter fester Drehungsmittelpunkt vorhanden sein, den man durch Veränderung der gegenseitigen Stellung von Interferenzmess- und Durchbiegungsapparat auf den gewünschten Scheitelpunkt im Interferenzbilde legen kann.

Soll der Schnittpunkt des Fadenkreuzes der Drehungsmittelpunkt für die Interferenzerscheinung sein, so muss, falls wir das Dove'sche Prisma exact und zur Drehungsaxe der Fassung richtig orientirt voraussetzen, die Visirlinie des Beobachtungsfernrohres der Drehungsaxe parallel sein. Aber sei es nun, dass das benutzte Prisma oder die Stellung desselben zur Drehungsaxe nicht exact war, es gab keinen festen Drehungspunkt im Gesichtsfelde, sondern die Bildpunkte beschrieben Curven, die aus zwei Schleifen bestanden. Dieser für die gewöhnliche Benutzung, bei der das Dove'sche Prisma nur zur Aufrichtung des Streifens dient, bedeutungslose Fehler wurde erst nach Austausch und sorgfältiger Justirung des Prismas auf einen weniger störenden Betrag herunter gebracht.

Nach der Justirung bringt man den Keilwinkel der Deckplatte in die geeignete Stellung zum Aluminiumrahmen. Es folgt dann die Justirung der Deckplatte in Bezug auf das Glasprisma, wobei es sich hauptsächlich um die nach Augenmaass übrigens sehr genau ausführbare Parallelstellung der Oberseite des Glasprismas und der Unterseite der Deckplatte handelt.

1) Fig. 3 ist mit einer anderen Deckplatte aufgenommen.

Die Entfernung beider wird natürlich nicht unnöthig gross gewählt, ist aber bei der guten Regulirung des Strahlenganges bis zu 0,05 cm von geringem Einfluss. Setzt man jetzt den ganzen Durchbiegungsapparat unter das Lichtgebungs- und Beobachtungsinstrument, und zwar so, dass der Schnittpunkt des Fadenkreuzes mit dem Mittelpunkte der Deckplatte bez. des Glasprismas zusammenfällt, so wird man in den meisten Fällen durch Drehen an den Fusschrauben des Durchbiegungsapparates in kurzer Zeit erreichen, dass im Gesichtsfelde feine Interferenzlinien erscheinen. Mit den Aluminiumhebeln des Deckplattenrahmens kann man dann leicht die Interferenzlinien verbreitern und schliesslich die Cornu'sche Erscheinung erhalten. Gelingt es nach kurzen Versuchen nicht, Interferenzlinien zu bekommen, so justirt man am besten systematisch in der beim Dilatometer üblichen Weise. Die genaue Justirung der Interferenzerscheinung gegenüber dem Drehungsmittelpunkte ist bei der Kleinheit der in Betracht kommenden Grössen und der aus anderen Gründen nöthigen leichten Beweglichkeit der Aluminiumarme zwar etwas schwierig, aber gleichwohl mit grosser Genauigkeit ausführbar. Darauf folgt die Winkelmessung, und zwar wurden zur Messung eines Winkels so viele Stellungen benutzt, dass das Dove'sche Prisma um volle 360° gedreht war, also auf jede der beiden Asymptotenrichtungen viermal eingestellt.

Prüfung der Methode.

Es handelt sich nun um die Frage, ob die benutzte Methode wirklich hinreichend constante und, wenn dies der Fall, ob sie richtige Werthe für den Poisson'schen Coefficienten liefert. Die Theorie verspricht bei Innehaltung gewisser Bedingungen Unabhängigkeit des Asymptotenwinkels von den Dimensionen und der Durchbiegung des Prismas. Schon die ersten Versuche zeigten aber bei fast allen Prismen mit wachsender Durchbiegung eine gesetzmässige Zu- oder Abnahme des Asymptotenwinkels von allerdings sehr verschiedenem Grade, und zwar waren am häufigsten und durchschnittlich am stärksten die Abnahme der Werthe. Es lag nahe, dies auf nicht vollständige Ebenheit der benutzten Prismenflächen im natürlichen Zustande zurückzuführen und der Versuch,

Unebenheiten in bekannter Weise mittels eines ebenen Probeglasses nachzuweisen, ergab in der That, dass die Oberflächen fast aller benutzten Glasflächen mehr oder weniger starke und mehr oder weniger regelmässige Abweichungen von der Ebenheit zeigten. Dabei waren die Flächen der Prismen mit grosser Sorgfalt hergestellt; es scheint also sehr schwierig, so dünne (ungefähr 0,25 cm) und relativ grosse Platten mit ebenen Politurflächen zu versehen. Leider habe ich erst später das — auch nicht ohne weiteres tadellose Resultate liefernde — Verfahren angewandt, die Flächen an *dicken* Platten schleifen und poliren und dann erst die Platten auf die verlangte Dicke bringen zu lassen. Jedenfalls geht aus diesen Versuchen hervor, dass auch bei einer mit grosser Sorgfalt und Sachkenntniss hergestellten Platte Fehler vorhanden sind, deren Einfluss auf das Resultat durch Versuch und Rechnung beseitigt werden muss.

Einige an Glasprismen mit besonders grossen Aenderungen des Asymptotenwinkels angestellten Versuche zeigten, dass die direct bestimmten Krümmungen die gesetzmässige Ab- oder Zunahme der Werthe in der That vollständig erklärten, dass also alle an *demselben* Prisma und mit *denselben* Schneidenabständen angestellten Messungen innerhalb der zulässigen Fehlergrenze dasselbe Resultat lieferten. Gleichwohl wurde das obige Verfahren, die im natürlichen Zustande vorhandene Krümmung zu bestimmen, bei den definitiven Messungen nicht angewandt; es erschien vielmehr zweckmässiger und für kleinere Krümmungen wesentlich genauer¹⁾ eine Reihe von Bestimmungen mit verschiedener Durchbiegung zu machen und aus dem Verlauf der Werthe auf den ohne Krümmung vorhandenen Werth (sowie die Krümmung im natürlichen Zustande) zu schliessen. Die Berechnung erfolgte nach der Methode der kleinsten Quadrate und liess ohne Complication auch den Umstand berücksichtigen, dass die Messung der Asymptotenwinkel mit wachsender Durchbiegung genauer wird

1) Nicht ohne Interesse erscheint mir, dass in der Bestimmung der Veränderung des Asymptotenwinkels ein ausserordentlich empfindliches Reagenz auf Krümmung liegt, welches möglicherweise für dünne Platten technischer Verwendung fähig ist.

Berechnungsverfahren.

Für die Berechnung machen wir zunächst die vereinfachende Voraussetzung, dass die Hauptkrümmungsebenen der betrachteten Oberfläche im natürlichen Zustande des Prismas parallel und senkrecht zur Durchbiegungsebene liegen. In der That ist ja bei einem sachgemäss ausgeführten Schleif- und Polirprocess diese Symmetrie näherungsweise zu erwarten und war bei den zahlreichen von mir untersuchten Prismen nur in wenigen (4) Fällen nicht vorhanden.

Die Anfangskrümmungen parallel und senkrecht zur Biegungsebene mögen ϱ' und ϱ'' , die im Falle ebener Flächen vorhandenen elastischen Krümmungen ϱ_1 und ϱ_2 heissen. Ferner seien die — im allgemeinen mit der Durchbiegung (n) veränderlichen — Asymptotenwinkel mit $2\alpha_n$ und die bei fehlender Anfangskrümmung unveränderlichen Werthe mit 2α bezeichnet; schliesslich sei $\operatorname{tg}^2 \alpha_n = \mu_n$ und $\operatorname{tg}^2 \alpha = \mu$ gesetzt, wo also μ den gesuchten Poisson'schen Coefficienten bedeutet.

Aus den für *kleine* Krümmungen gültigen Gleichungen

$$\mu_n = \operatorname{tg}^2 \alpha_n = -\frac{\varrho_2 + \varrho''}{\varrho_1 + \varrho'} \quad \text{und} \quad \mu = \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

folgt

$$\mu_n = \frac{\mu \varrho_1 - \varrho''}{\varrho_1 + \varrho'} = \mu - \frac{\varrho'' + \mu \varrho'}{\varrho_1 + \varrho'},$$

d. h. der ohne Berücksichtigung der Anfangskrümmung sich ergebende Fehler der Elasticitätszahl ist der Krümmung in der Biegungsebene umgekehrt oder dem Radius direct proportional.

Um die Formel der Untersuchungsmethode mehr anzupassen, wollen wir an Stelle der in der Biegungsebene vorhandenen Krümmung die Zahl der Interferenzstreifen (n) einführen, die auf der vom Mittelpunkte der Interferenzerscheinung aus gerechneten Strecke a liegen. Dies giebt, da $n\lambda = a^2(\varrho_1 + \varrho')$,

$$\mu_n = \mu - \frac{\varrho'' + \mu \varrho'}{n\lambda} \cdot a^2$$

oder,

$$- \frac{\varrho'' + \varrho' \mu}{\lambda} a^2 = \nu$$

gesetzt,

$$\mu_n = \mu + \frac{\nu}{n},$$

worin ν eine von der Durchbiegung unabhängige Grösse ist.

Haben die Hauptkrümmungen im natürlichen Zustande — die im Folgenden $\bar{\varrho}'$ und $\bar{\varrho}''$ heissen mögen — nicht die oben vorausgesetzte Lage, so bleibt trotzdem, wie sich zeigen lässt, die Formel

$$\mu_n = \mu + \frac{\nu}{n}$$

gültig. Bilden nämlich $\bar{\varrho}'$ und ϱ_1 den Winkel γ , ferner die in der Sattelfläche liegenden beiden Geraden mit ϱ_1 die Winkel δ_1 und δ_2 , so gelten für δ_1 und δ_2 Gleichungen von der Form:

$$\bar{\varrho}' \cos^2(\delta - \gamma) + \bar{\varrho}'' \sin^2(\delta - \gamma) + \varrho_1 \cos^2 \delta + \varrho_2 \sin^2 \delta = 0.$$

Aus diesen kann man leicht zwei Gleichungen mit den Grössen $\delta_1 + \delta_2$ und $\delta_1 - \delta_2$ bilden und durch Elimination der Grösse $\delta_1 + \delta_2$, welche die Lage der Indicatrixaxen bestimmt, $\delta_1 - \delta_2$, also den gesuchten (ganzen) Asymptotenwinkel erhalten. Es ergibt sich für

$$\mu_n = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \right)$$

der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(\varrho_1 - \varrho_2 + \bar{\varrho}' - \bar{\varrho}'')^2 \cos^2 \gamma + (\varrho_1 - \varrho_2 - \bar{\varrho}' + \bar{\varrho}'')^2 \sin^2 \gamma} - (\varrho_1 + \varrho_2 + \bar{\varrho}' + \bar{\varrho}'')}{\sqrt{(\varrho_1 - \varrho_2 + \bar{\varrho}' - \bar{\varrho}'')^2 \cos^2 \gamma + (\varrho_1 - \varrho_2 - \bar{\varrho}' + \bar{\varrho}'')^2 \sin^2 \gamma} + (\varrho_1 + \varrho_2 + \bar{\varrho}' + \bar{\varrho}'')}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck unter der Annahme, dass die Anfangskrümmung ($\bar{\varrho}'$, $\bar{\varrho}''$) klein ist gegenüber der Biegungskrümmung (ϱ_1 , ϱ_2), so ergibt sich bei Beschränkung auf Grössen erster Ordnung:

$$\mu_n = - \frac{\varrho_2 + \bar{\varrho}' \sin^2 \gamma + \bar{\varrho}'' \cos^2 \gamma}{\varrho_1 + \bar{\varrho}' \cos^2 \gamma + \bar{\varrho}'' \sin^2 \gamma}.$$

Dieser Ausdruck lässt eine einfache Deutung zu. Da nämlich $\bar{\varrho}' \sin^2 \gamma + \bar{\varrho}'' \cos^2 \gamma$ bez. $\bar{\varrho}' \cos^2 \gamma + \bar{\varrho}'' \sin^2 \gamma$ die \perp bez. \parallel zur Biegungsebene vorhandenen Anfangskrümmungen sind, die wie vorher mit ϱ'' und ϱ' bezeichnet werden sollen, so ist der Asymptotenwinkel trotz der abweichenden, *unsymmetrischen* Lage der Asymptoten durch das Verhältniss der Krümmungen \parallel und \perp zur Biegungsebene bestimmt. Es bleiben also auch

— wenigstens in erster Näherung und davon abgesehen, dass ϱ' und ϱ'' nicht mehr die *Hauptanfangskrümmungen* sind — die Formeln

$$\begin{aligned}\mu_n &= -\frac{\varrho_2 + \varrho''}{\varrho_1 + \varrho'} = \mu - \frac{\varrho'' + \mu \varrho'}{\varrho_1 + \varrho'} \\ &= \mu - \frac{\varrho'' + \mu \varrho'}{n \lambda} a^2 = \mu + \frac{\nu}{n}\end{aligned}$$

vollständig bestehen.

Liegt nun für ein bestimmtes Prisma eine Reihe von Versuchen mit verschiedener Durchbiegung vor und sollen daraus die wahrscheinlichsten Werthe für μ und ν gefunden werden, so handelt es sich zunächst darum, die Abhängigkeit des Gewichtes einer Beobachtung von dem Grade der Durchbiegung zu finden. Versuche lehrten, dass selbst innerhalb der benutzten Durchbiegungsgrenzen eine einfache Potenz der Durchbiegung das Gewicht nicht mit genügender Genauigkeit darstellt. Wird die Abhängigkeit für die mittleren Durchbiegungen richtig wiedergegeben, so ist sie bei kleinen Durchbiegungen zu gering, bei grossen zu gross. Will man aber der Einfachheit der Rechnung halber keine complicirtere Darstellung wählen und zieht man aus dem gleichen Grunde nur ganze Potenzen in Betracht, so kann man nur zwischen der ersten und zweiten schwanken. Nachdem ich mich an einigen Beispielen überzeugt hatte, dass die mit den beiden Annahmen berechneten Endresultate im Verhältniss zur Beobachtungsgenauigkeit genügend übereinstimmten, habe ich nur die erste Potenz verwendet.

Aus der von der Methode der kleinsten Quadrate gestellten Forderung, dass

$$\sum \left(\mu_n - \mu - \frac{\nu}{n} \right)^2 n$$

den kleinsten Werth annehmen soll, ergeben sich die Gleichungen:

$$\sum \left(\mu_n - \mu - \frac{\nu}{n} \right) n = 0 \quad \text{und} \quad \sum \left(\mu_n - \mu - \frac{\nu}{n} \right) = 0$$

und hieraus für μ und ν die Werthe:

$$\mu = \frac{\sum \frac{1}{n} \sum n \mu_n - \sum 1 \sum \mu_n}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}, \quad \nu = - \frac{\sum 1 \sum n \mu_n - \sum n \sum \mu_n}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}.$$

Der bequemeren Rechnung wegen verändern wir diese Gleichungen, indem wir den Mittelwerth der μ_n durch

$$\sum \mu_n = \bar{\mu} \sum 1$$

und die Unterschiede der μ_n gegenüber dem Mittelwerth durch

$$\mu_n = \bar{\mu} + A_n$$

eingeführen und erhalten:

$$\mu = \bar{\mu} + \frac{\sum \frac{1}{n} \cdot \sum n A_n}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}, \quad v = - \frac{\sum 1 \sum n A_n}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}.$$

Nach diesen Formeln wurde der grössere Theil der Beobachtungen gerechnet; war indessen die Abhängigkeit des Asymptotenwinkels von der Durchbiegung hinreichend klein, so wurde, um nicht die zu den α gehörigen μ erst aufschlagen zu müssen, direct mit den Winkeln gerechnet, denn es ist leicht zu zeigen, dass in diesem Falle die Abhängigkeit des Asymptotenwinkels von der Durchbiegung durch

$$\alpha_n = \alpha + \frac{\beta}{n}$$

gegeben ist.

Um über die Genauigkeit, mit der die letztere Gleichung gilt, ein Urtheil zu haben und den Zusammenhang von v und β zu kennen, setzen wir in die Gleichung

$$\mu_n = \mu + \frac{v}{n}$$

die aus der Taylor'schen Reihe unter Beschränkung auf die zweite Potenz folgende Beziehung

$$\mu_n = \mu + (\alpha_n - \alpha) \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + \frac{(\alpha_n - \alpha)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha^2},$$

und erhalten nach einigen Umformungen

$$\alpha_n = \alpha + \frac{\beta}{n} - \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2 \alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{n} \right)^2,$$

worin

$$\beta = \frac{v}{4 \mu} \sin 2 \alpha.$$

Ersetzt man in dem zweiten Gliede der rechten Seite der ersteren Gleichung α durch μ , so nimmt es die Form

$$- \frac{3 \mu + 1}{2 \sqrt{\mu}} \left(\frac{\beta}{n} \right)^2$$

an, und man erhält demnach, wenn es nicht über $3'$ betragen soll, für β die Bedingung:

$$\left(\frac{\beta}{n}\right)^2 < \frac{2\sqrt{\mu}}{3\mu+1} \cdot \frac{0,05}{57,3},$$

oder, falls β in Graden gemessen wird:

$$\left(\frac{\beta}{n}\right)^2 < \frac{2\sqrt{\mu}}{3\mu+1} \cdot 0,05 \cdot 57,3.$$

Für $\mu = 0,20, 0,25, 0,32$ ergibt sich hieraus:

$$\left(\frac{\beta}{n}\right) < 1,27, 1,28, 1,28.$$

Es erübrigt noch, über die wahrscheinlichen Fehler einige Bemerkungen zu machen.

Die Beobachtung geschieht in einzelnen Sätzen, von denen jeder eine Anzahl (durchschnittlich 5 bis 6) Durchbiegungen umfasst. Da diese Sätze zum grössten Theile nicht unter gleichen Bedingungen gemacht wurden, muss jeder Satz für sich berechnet werden und erst dann eine Combination der verschiedenen Satzresultate stattfinden.

Bezeichnen wir die Reste $\mu_n - \mu - \nu/n$, die nach Einsetzen der Werthe für μ und ν bleiben, mit v_n und die Anzahl der Durchbiegungen bei einem Satze mit m , so ergibt sich bekanntlich der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung von Gewicht 1 zu

$$0,67 \sqrt{\frac{\sum n v_n^2}{m-2}}.$$

Um daraus den wahrscheinlichen Fehler von μ (R) zu bestimmen, hat man durch die Quadratwurzel des Gewichtes von μ zu dividiren. Aus den Normalgleichungen oder dem Ausdruck für μ ergibt sich der reciproke Werth dieser Grösse zu

$$\frac{\sum \frac{1}{n}}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}$$

und demnach

$$R = 0,67 \sqrt{\frac{\sum n v_n^2}{m-2} \cdot \frac{\sum \frac{1}{n}}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}}$$

oder mit genügender Näherung

$$\bar{R} = 0,67 \sqrt{\frac{\sum v_n^2}{m(m-2)} \frac{\sum \frac{1}{n} \sum n}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}}.$$

Der analoge Näherungswerth für den wahrscheinlichen Fehler von ν würde

$$0,67 \sqrt{\frac{\sum v_n^2}{m(m-2)} \frac{(\sum n)^2}{\sum \frac{1}{n} \sum n - (\sum 1)^2}}$$

sein. Hat man auf diese Weise ein Urtheil über das Gewicht der Resultate der einzelnen Beobachtungssätze gewonnen, so findet die Combination der einzelnen Resultate genau so statt, wie wenn diese direct beobachtete Grössen mit gegebenem Gewicht wären. Sind die Gewichte der Satzresultate N' , N'' und die Resultate der einzelnen Sätze μ' , μ'' , so wird der schliessliche Werth für μ :

$$\frac{\mu' N' + \mu'' N'' + \dots}{N' + N'' + \dots}.$$

Der wahrscheinliche Fehler dieses Endresultates dürfte bei einer geringen Anzahl von Beobachtungssätzen aus den Einzelresultaten und deren wahrscheinlichen Fehlern nicht ohne weiteres bestimmbar sein und ist deshalb nicht angegeben.

Prüfung des Einflusses der Dimensionen des Prismas und der Schneidenabstände.

Die Prüfung der Methode nach dieser Richtung hin stösst zum Theil auf Schwierigkeiten, nämlich was den — noch dazu am wichtigsten — Einfluss der Breite anlangt. Sinkt nämlich die Breite unter eine gewisse Grenze, so wird die Bestimmung wegen der Kürze der degenerirten Hyperbeläste und besonders wegen der grösseren Weichheit und Verschwommenheit der Interferenzerscheinung ausserordentlich unsicher und nur bei — theoretisch bedenklicher — sehr starker Durchbiegung einigermaassen ausführbar.¹⁾

1) Man kann diesem Uebelstande begegnen, indem man Licht von höherer Schwingungszahl wählt und zwischen die beiden Flächen ein Medium von höherem Brechungsexponenten bringt; da aber das letztere die Helligkeitsverhältnisse der Interferenzerscheinungen ungünstiger ge-

Es war nicht die Absicht, eine vollständige Prüfung der Methode nach den genannten Richtungen hin zu geben¹⁾, sondern nur soweit zu gehen, als es für die vorliegende Arbeit unbedingt erforderlich war. Demnach waren zunächst alle Verhältnisse auszuschliessen, die den Anforderungen der Theorie nicht entsprechen.

Die Theorie verlangt ausser dem richtigen Kräfteangriff, dass die Dicke (d) und Breite (b) des Prismas klein sind gegenüber dem Krümmungsradius in der Biegungsebene; sie verlangt aber weiter, dass auch b^2/d die gleiche Bedingung erfüllt. Da der Krümmungsradius, abgesehen von einigen Fällen, nicht kleiner als 550 cm genommen wurde, dürften die ersten beiden Bedingungen mehr als genügend erfüllt sein, wenn die Querdimensionen nicht grösser als 3 cm sind. Die letzte Bedingung bedeutet dagegen, da die Beobachtungsmethode eine gewisse Breite erfordert, eine viel stärkere Einschränkung; sie schliesst dünne, leicht durchbiegbare Lamellen aus. — Die Dicke des Prismas erheblich zu steigern war deshalb nicht gut angängig, weil einerseits hierdurch bei constantem Krümmungsradius die Maximaldeformationen und -spannungen entsprechend steigen und Gläser selbst bei minimalen, kaum sichtbaren Verletzungen an auf Zugspannung beanspruchten Stellen sehr empfindlich sind, und weil andererseits hierbei der von mir benutzte, nicht genügend feste Apparat sich in unregelmässiger Weise deformirte und die Prismen etwas auf Torsion beansprucht wurden.

Was den Kräfteangriff anlangt, so sind die von der Theorie vorausgesetzten beiden Kräftepaare an den Endflächen praktisch kaum zu realisiren; man muss sich damit begnügen, die Hindernisse für die Ausbildung der Querkrümmung in dem zur Messung benutzten Theile, so viel wie möglich zu beseitigen. Damanwegen der starken elastischen Nachwirkung des

staltet, und das erstere, wenn man sich nicht auf photographische Fixirung beschränkt, nur eine geringe Verkleinerung der Wellenlänge ermöglicht, so wurde von beiden abgesehen.

1) Ich kann das um so mehr unterlassen, als nach einer Mittheilung von Hrn. G. Wulff in Warschau dieser sich mit der Prüfung der Methode (sowie der Anwendung auf Spiegelglas und Quarz) beschäftigt. Vgl. auch G. Wulff: Die optische Methode von Cornu, Nachrichten der Universität zu Warschau 1894. russisch.

Gummis die Dicke der Gummischicht innerhalb einer gewissen Grenze halten muss, ist eine Beschränkung der Breite erforderlich. Da nämlich die Aufwölbung der Ränder bei idealer Deformation bereits dem Quadrate der Breite proportional ist, ausserdem aber mit wachsender Breite die zur Erzielung einer bestimmten Krümmung erforderliche Kraft wächst und drittens die Hebelarme für die störenden Kräfte grösser werden, so wird mit zunehmender Breite eine ausserordentlich stark wachsende Verminderung der Querkrümmung eintreten. In der That haben bereits 3 cm breite (0,3 cm dicke) Prismen erheblich kleinere Werthe für die Elasticitätszahl geliefert, die nur zum allerkleinsten Theile aus dem relativ grossen Werte für b^2/d erklärt werden dürften. Andererseits glaube ich, dass die unten gegebenen Zahlenwerthe erkennen lassen, dass bei einer Breite ≥ 2 cm wenigstens für den grössten oder die beiden grössten Schneidenabstände eine befriedigende Constanz der Werthe vorhanden ist. Kleinere Correctionen bleiben natürlich nicht ausgeschlossen; leider ist gerade infolge der *geringen* Differenzen der Einzelwerthe der Erfolg eines Versuches, die einer sehr geringen Breite entsprechenden Werthe zu extrapoliren, sehr zweifelhaft.

Bezüglich des Einflusses der Schneidenabstände wurden nur wenige Versuche angestellt; bei allen blieb der Abstand der Aussenschneiden der gleiche (10 cm), der Abstand der inneren Schneiden war der Reihe nach 7, 5, 3,4 cm. Die Aufwölbung in der Querrichtung wuchs, wie zu erwarten, mit Vergrösserung des Abstandes der inneren Schneiden; aber die Variation und auch die Zahl der Versuche erscheint zu gering, um die quantitative Beziehung zu finden. Da geringer Abstand eine Verminderung der Querwölbung bedingen muss, konnte es sich nur um die Frage handeln, ob der grösste benutzte Schneidenabstand bereits hinreichend gross war.

Ich glaube, dass man diese Frage auf Grund der gegebenen Zahlen bejahen muss. Bildet man, was ja allerdings nicht ganz correct ist, einfach die Mittelwerthe für die drei benutzten inneren Schneidenabstände 7, 5 und 3,4 cm, wobei natürlich der vereinzelte Werth für das 3 cm breite Prisma auszuschliessen ist, so erhält man 0,225, 0,224, 0,222.

Die andere Frage, ob — innerhalb der im Vorhergehenden angegebenen Grenzen für die Schneidenabstände und die Quer-

dimensionen der Prismen — nicht bloss *constante*, sondern auch *richtige* Werthe erhalten werden, ist natürlich nur durch Vergleichung mit den Resultaten verschiedener Methoden zu beantworten, und muss, wenn auch die Bejahung wahrscheinlich ist, vorläufig offen gelassen werden. Verneint man sie, so würden die gegebenen Zahlen zwar nicht *absolute*, aber wahrscheinlich in erster Annäherung *relative* Werthe darstellen, die durch einwandfreie Messungen an wenigen Glasarten jederzeit in absolute verwandelt werden könnten.

Bemerkungen zu den Tabellen (p. 394 u. 395) für die Prüfung der Methode.

Wegen der grossen Anzahl der Beobachtungen ist es leider nicht möglich, die Zahlenwerthe ausführlich zu geben; man muss sich vielmehr auf wenige Angaben beschränken. Es bedeutet d die Dicke, b die Breite des Prismas, m die Zahl der verschiedenen Durchbiegungen für jeden Beobachtungssatz, s_a und s_i den äusseren und inneren Schneidenabstand; ferner bedeuten n_1 und n_m die schwächste und stärkste Durchbiegung und war die Pfeilhöhen eines in der Biegungsebene liegenden Bogens von 1,2 cm, ausgedrückt in halben Wellenlängen der rothen Wasserstofflinie (H_a , $\lambda = 0,0000656$ cm), α_1 und α_m die Mittelwerthe der zugehörigen halben Asymptotenwinkel. Schliesslich folgt die Elasticitätszahl (μ) nebst ihrem wahrscheinlichen Fehler und die im wesentlichen von Elasticitätszahl und Anfangskrümmung abhängige Grösse v .

1. Ein Blick auf die Tabellen lehrt, dass die Durchbiegungen zwischen 3,5 und 14 liegen (Krümmungsradien in der Biegungsebene 1600 bez. 390 cm), indessen sind Durchbiegungen über 10 (Radien < 550 cm) — ausser aus den früher angeführten Gründen bei dem 1 cm breiten Prisma — nur bei dem Prisma mit $d = 0,2$, $b = 2,0$ cm angewandt worden. Obwohl nämlich jede Beobachtungsreihe über die Unabhängigkeit des Werthes von μ von der Durchbiegung bereits ein Urtheil ermöglicht, schien es doch zweckmässig zu untersuchen, ob aus zwei Beobachtungsreihen mit *verschiedener mittlerer* Durchbiegung verschiedene Werthe von μ sich ergeben. Die mittlere Durchbiegung war bei den drei ersten Bestimmungen 9,9, bei den drei letzten 6,0, die mittleren Werthe von μ 0,2233 und 0,2223.

Glas 1991.

Zusammensetzung: SiO_2 65,22; B_2O_3 2,7; ZnO 1,5; As_2O_5 0,5; BaO 10,0; Na_2O 5,0; K_2O 15,0; Mn_2O_3 0,08.

(Alle benutzten Stücke sind aus einer einzigen, von Schlieren, Spannungen und Bläschen freien Platte geschnitten.)

d	b	m	s_a	s_i	$n_1 - n_m$	$\alpha_1 - \alpha_m$	μ	ν
0,3	3,0	6	10	7	3,5 — 6,1	27,01° — 26,12°	0,2126 ± 0,0031	+ 0,1747
0,3	3,0	7	10	7	3,5 — 6,6	26,89 — 26,00	0,2173 ± 0,0015	+ 0,1407
0,3	2,5	4	10	7	4,4 — 6,4	27,96 — 27,16	0,2213 ± 0,0041	+ 0,2613
0,3	2,5	6	10	5	3,8 — 7,2	28,21 — 26,79	0,2195 ± 0,0022	+ 0,2574
0,3	2,5	5	10	3,4	4,1 — 7,2	27,76 — 26,60	0,2152 ± 0,0018	+ 0,2543
0,3	2,0	5	10	7	4,55 — 8,4	27,39 — 26,57	0,2285 ± 0,0007	+ 0,1839
0,3 ¹⁾	2,0	5	10	7	4,6 — 8,7	26,46 — 26,02	0,2281 ± 0,0009	+ 0,0915
0,3	2,0	6	10	5	3,9 — 8,7	27,73 — 26,46	0,2229 ± 0,0010	+ 0,2050
0,3 ¹⁾	2,0	3	10	5	4,6 — 9,0	26,50 — 25,91	0,2228 ± 0,0000	+ 0,1185
0,3	2,0	6	10	3,4	3,7 — 8,7	27,70 — 26,27	0,2193 ± 0,0009	+ 0,2059
0,3 ¹⁾	2,0	3	10	3,4	4,5 — 8,8	26,29 — 25,82	0,2241 ± 0,0004	+ 0,0892
0,2	2,0	6	10	7	6,3 — 13,6	28,35 — 26,81	0,2244 ± 0,0007	+ 0,4240
0,2	2,0	6	10	7	4,2 — 7,65	29,65 — 27,95	0,2266 ± 0,0021	+ 0,4109
0,2	2,0	6	10	5	6,2 — 13,5	28,26 — 26,77	0,2248 ± 0,0017	+ 0,4011
0,2	2,0	6	10	5	4,2 — 8,0	29,58 — 27,60	0,2205 ± 0,0017	+ 0,4326
0,2	2,0	6	10	3,4	6,2 — 13,6	28,05 — 26,51	0,2208 ± 0,0013	+ 0,3975
0,2	2,0	6	10	3,4	4,1 — 7,9	29,61 — 27,54	0,2152 ± 0,0014	+ 0,4376
0,25	1,75	6	10	7	4,75 — 9,95	28,16 — 26,75	0,2246 ± 0,0006	+ 0,2965
0,25	1,75	6	10	7	4,65 — 9,65	28,34 — 26,85	0,2236 ± 0,0010	+ 0,3088
0,25	1,75	6	10	5	4,8 — 10,0	28,19 — 26,71	0,2227 ± 0,0020	+ 0,3024
0,25	1,75	6	10	5	4,65 — 9,85	28,22 — 26,85	0,2266 ± 0,0010	+ 0,2855
0,25	1,75	6	10	3,4	4,85 — 10,0	27,99 — 26,55	0,2186 ± 0,0012	+ 0,3118
0,25	1,75	6	10	3,4	4,9 — 9,9	27,95 — 26,72	0,2249 ± 0,0014	+ 0,2705
0,2	1,0	7	10	7	6,1 — 12,0	29,46 — 27,39	0,2236 ± 0,0044	+ 0,5567
0,2	1,0	7	10	7	5,95 — 12,1	29,37 — 27,48	0,2295 ± 0,0028	+ 0,4927
0,2	1,0	5	10	5	6,05 — 14,0	29,25 — 27,12	0,2239 ± 0,0017	+ 0,5341
0,2	1,0	5	10	5	6,0 — 14,0	29,27 — 27,22	0,2298 ± 0,0013	+ 0,5069
0,2	1,0	5	10	3,4	6,0 — 14,0	29,03 — 27,17	0,2328 ± 0,0026	+ 0,4466
0,2	1,0	5	10	3,4	6,0 — 14,0	29,50 — 27,15	0,2217 ± 0,0046	+ 0,5660

1) Zu diesen drei Versuchsreihen ist ein anderes Prisma benutzt worden, als zu den drei vorhergehenden.

Uebersichtstabelle der Mittelwerthe.

	$d = 0,3$ $b = 3,0$	$d = 0,3$ $b = 2,5$	$d = 0,3$ $b = 2,0$	$d = 0,2$ $b = 2,0$	$d = 0,25$ $b = 1,75$	$d = 0,2$ $b = 1,0$
$s_a = 10$ $s_i = 7$	} 0,216	0,221	0,228	0,225	0,224	0,228
$s_a = 10$ $s_i = 5$	} —	0,220	0,223	0,223	0,226	0,228
$s_a = 10$ $s_i = 3,4$	} —	0,215	0,225	0,218	0,221	0,230

2. Die (halben) Asymptotenwinkel liegen zwischen $25,82^\circ$ und $29,65^\circ$, entsprechend Werthen von $\mu = \operatorname{tg}^2 \alpha$ 0,2341 und 0,3240. Hält man dagegen, dass der definitive Werth für die Elasticitätszahl 0,226 ist, so sieht man, wie wichtig die Berücksichtigung der Flächenkrümmung im natürlichen Zustande ist.

3. Die übrig bleibenden Abweichungen haben bei den verschiedenen Beobachtungssätzen augenscheinlich sehr verschiedene mittlere Grösse. Dies rührt grösstentheils davon her, dass eine Reihe der vorliegenden Messungen zu den ersten von mir gemachten gehörte, bei denen weniger Uebung und weniger sorgfältige Berücksichtigung kleinerer Störungen vorhanden war.

Es war aber leider meistentheils nicht möglich, die mangelhafteren Beobachtungen zu wiederholen, da die Glasprismen zum Theil auf kleinere Ausmessungen gebracht worden waren.¹⁾ Man erhält also ein etwas zu ungünstiges Bild von der Genauigkeit der Methode, wie auch durch einen Vergleich mit späteren an anderen Glasarten gemachten Messungen hervorgeht. Bei der später erreichten Beobachtungsgenauigkeit war es bei *regelmässigen* Flächen und gut monochromatischem Lichte nicht schwer, die wahrscheinlichen Fehler von μ unterhalb 0,0010 zu halten.

4. Die Unterschiede zwischen den Werthen von μ aus den einzelnen Beobachtungssätzen sind bisweilen gross im Vergleich zu den wahrscheinlichen Fehlern. Es ist möglich, dass der Nichtberücksichtigung der jeweiligen Beobachtungstemperatur

1) Dies ist auch der Grund für das Fehlen weiterer Beobachtungen bei dem Prisma $d = 0,3$, $b = 2,5$ cm.

Fabr.-Nr.	d	b	m	$n_1 - n_m$	$\alpha_1 - \alpha_m$	μ	ν
627 (u.)	0,252	2,42	4	4,3 — 9,6	24,31° — 24,54°	0,2131 ± 0,0007	— 0,0580
	0,252	2,42	4	3,4 — 8,7	24,31 — 24,55	0,2120 ± 0,0017	— 0,0444
	0,252	2,00	6	4,45 — 9,45	25,74 — 25,22	0,2147 ± 0,0012	+ 0,0734
Mittel						0,2133	
1893 (Ind. sch.)	0,252	2,23	7	4,0 — 10,1	26,42 — 25,64	0,2212 ± 0,0019	+ 0,1600
	0,252	2,00	6	4,5 — 9,5	28,18 — 26,50	0,2171 ± 0,0016	+ 0,3112
Mittel						0,2188	
20 (s. u.)	0,251	2,42	4	4,4 — 9,6	26,42 — 25,76	0,2230 ± 0,0029	+ 0,1606
	0,251	2,42	4	3,4 — 8,8	26,79 — 25,81	0,2207 ± 0,0018	+ 0,1752
	0,251	2,00	6	4,9 — 10,0	27,35 — 26,27	0,2210 ± 0,0007	+ 0,2232
Mittel						0,2211	
2154	0,256	2,00	6	4,5 — 9,5	27,35 — 26,26	0,2208 ± 0,0009	+ 0,2095
	0,256	2,00	6	4,9 — 9,8	27,07 — 26,18	0,2221 ± 0,0011	+ 0,1955
	0,256	2,00	6	5,0 — 10,1	27,10 — 26,14	0,2218 ± 0,0011	+ 0,2033
Mittel						0,2215	
2106	0,253	2,51	4	4,5 — 9,1	26,20 — 25,65	0,2204 ± 0,0015	+ 0,1406
	0,253	2,51	5	3,6 — 9,8	26,14 — 25,65	0,2240 ± 0,0022	+ 0,0952
	0,253	2,00	6	4,5 — 9,6	27,63 — 26,44	0,2228 ± 0,0011	+ 0,2262
Mittel						0,2223	
714	0,244	2,42	7	3,6 — 8,8	27,44 — 26,14	0,2216 ± 0,0015	+ 0,2568
	0,244	2,00	6	4,5 — 9,45	28,68 — 26,90	0,2197 ± 0,0013	+ 0,3621
Mittel						0,2205	
709 (Ind. sch.)	0,252	2,24	4	3,8 — 9,8	26,42 — 25,67	0,2242 ± 0,0023	+ 0,1230
	0,252	2,24	3	4,7 — 8,8	26,28 — 25,90	0,2261 ± 0,0003	+ 0,1213
	0,252	2,00	6	4,45 — 9,5	28,00 — 26,56	0,2216 ± 0,0011	+ 0,2762
Mittel						0,2258	
1571	0,246	2,52	6	4,1 — 10,9	23,86 — 24,71	0,2214 ± 0,0008	— 0,1618
	0,246	2,00	6	4,5 — 9,65	24,25 — 24,84	0,2251 ± 0,0007	— 0,1020
Mittel						0,2235	
Normalgl. (nicht homogen, schlierig)	0,252	2,52	4	3,3 — 7,8	27,72 — 26,53	0,2305 ± 0,0040	+ 0,2313
	0,252	2,52	4	4,1 — 8,6	27,49 — 26,44	0,2258 ± 0,0011	+ 0,2707
	0,252	2,00	6	4,4 — 9,5	28,76 — 27,10	0,2283 ± 0,0007	+ 0,3226
Mittel						0,2276	
2158	0,256	2,18	7	4,5 — 10,5	24,90 — 25,40	0,2350 ± 0,0018	— 0,1234
	0,256	2,00	6	4,6 — 9,5	26,00 — 25,78	0,2300 ± 0,0007	+ 0,0330
	0,256	2,00	6	5,25 — 10,0	25,85 — 25,74	0,2316 ± 0,0013	+ 0,0095
Mittel						0,2308	

Fabr.-Nr.	d	b	m	$n_1 - n_m$	$\alpha_1 - \alpha_m$	μ	ν
1933 (s. u.)	0,247	2,52	4	4,9 — 8,7	25,86° — 26,27°	0,2680 ± 0,0026	— 0,2975
	0,247	2,00	7	4,5 — 10,6	26,18 — 26,77	0,2664 ± 0,0008	— 0,1225
	0,247	2,00	5	5,8 — 9,65	25,83 — 26,40	0,2643 ± 0,0008	— 0,1756
Mittel						0,2655	
1299 (u.)	0,245	2,53	4	4,5 — 8,3	25,56 — 26,32	0,2640 ± 0,0012	— 0,2310
	0,245	2,00	6	4,5 — 9,5	26,01 — 26,84	0,2721 ± 0,0003	— 0,1541
	0,245	2,00	6	4,85 — 9,75	26,18 — 26,76	0,2666 ± 0,0007	— 0,1213
Mittel						0,2709	
S 95	0,236	1,40	6	5,9 — 10,85	28,65 — 28,12	0,2663 ± 0,0028	+ 0,1848
$s_a = 7$	0,236	1,40	5	6,0 — 9,9	28,82 — 28,29	0,2725 ± 0,0032	+ 0,1803
$s_i = 5$	0,236	1,40	6	5,65 — 10,6	28,47 — 28,07	0,2732 ± 0,0010	+ 0,1154
Mittel						0,2724	
S 185	0,252	2,51	6	3,1 — 8,1	28,11 — 27,73	0,2705 ± 0,0010	+ 0,0736
	0,252	2,00	6	4,4 — 9,45	28,76 — 28,14	0,2751 ± 0,0011	+ 0,1129
Mittel						0,2726	
S 196 (u.)	0,252	2,42	4	3,1 — 7,3	27,47 — 27,69	0,2796 ± 0,0023	— 0,0367
	0,252	2,42	4	4,0 — 8,0	27,69 — 27,60	0,2719 ± 0,0012	+ 0,0207
	0,252	2,00	6	4,45 — 9,5	28,65 — 28,16	0,2745 ± 0,0012	+ 0,1096
Mittel						0,2740	
S 120	0,253	2,51	6	3,2 — 6,45	29,36 — 28,64	0,2811 ± 0,0019	+ 0,1572
	0,253	2,00	5	5,2 — 9,55	31,11 — 29,75	0,2806 ± 0,0014	+ 0,4303
	0,253	2,00	6	4,75 — 9,65	31,54 — 29,75	0,2762 ± 0,0012	+ 0,4745
Mittel						0,2787	
665	0,156	1,65	6	5,65 — 10,8	34,25 — 32,10	0,3177 ± 0,0025	+ 0,8103
$s_a = 7$	0,156	1,65	6	5,9 — 10,8	33,99 — 32,09	0,3191 ± 0,0006	+ 0,7958
$s_i = 5$	0,156	1,65	6	5,3 — 10,65	34,48 — 32,21	0,3212 ± 0,0012	+ 0,8039
Mittel						0,3194	
Borsäure ¹⁾ (s. u.)	0,334	1,78	5	8,5 — 20,0	29,00 — 28,30	0,2827 ± 0,0059	+ 0,1986
$s_a = 7$							
$s_i = 5$							

1) Für die Borsäure liegt leider, da das Prisma bei einem zweiten Versuch einen Sprung bekam, nur *eine*, noch dazu aus verschiedenen Gründen mangelhafte Versuchsreihe vor; die Bestimmung soll später mit einem neuen Prisma wiederholt werden.

Nach den Ergebnissen der Prüfung der Methode liefern Versuche mit grösseren Breiten als 2 cm etwas zu kleine Werthe und es wäre deshalb am richtigsten gewesen, die älteren Beobachtungen wegzulassen und durch neuere zu ersetzen. Es ist das aber nicht geschehen, und zwar erstens wegen der grossen Beobachtungs- und Berechnungsarbeit, zweitens weil eine Vergleichung der älteren und neueren Beobachtungen keinen Unterschied zeigt¹⁾, drittens weil infolge der Variation nominell gleicher Schmelzungen bei Glasuntersuchungen äusserste Genauigkeit nicht nothwendig ist, und viertens, weil die älteren Bestimmungen grössere wahrscheinliche Fehler haben als die neueren²⁾ und demnach bei der Bildung des Resultates nur mit geringerem Gewicht betheiligt sind.

Die Dicke lag — ausser bei S 95, 665 und der Borsäure — zwischen 0,242 und 0,258 cm, die Schneidenabstände waren — mit den gleichen Ausnahmen — $s_a = 10,0$ und $s_i = 7,0$ cm.

In der vorhergehenden Tabelle sind die Gläser durch ihre Schmelznummern charakterisirt; die chemische Zusammensetzung findet sich in der Uebersichtstabelle.

Bezüglich der Bezeichnung in den Tabellen ist im wesentlichen auf das früher (p. 393) Gesagte zu verweisen und nur zu bemerken, dass bei den älteren — an $b > 2$ cm kenntlichen — Beobachtungen die Durchbiegungen sich nicht auf einen Bogen von 1,2 cm, sondern von 1,0 cm beziehen. u. bez. s. u. bedeutet unregelmässige bez. sehr unregelmässige Gestalt der Oberfläche, Ind. sch. dass die Indicatrixaxen schief zur Biegeebene lagen.

Die Uebersichtstabelle zeigt, dass die Elasticitätszahl der untersuchten Gläser zwischen 0,197 und 0,319 schwankt, dass

1) Vergleichen wir nämlich die Werthe der älteren und neueren Beobachtungen und benutzen, falls wiederholte Bestimmungen bei derselben Breite vorliegen, das einfache arithmetische Mittel, so ergibt sich aus 22 in Betracht kommenden Gläsern eine durchschnittliche Differenz von 0,0002, und zwar sind die neueren Bestimmungen um diesen Betrag nicht grösser, sondern *kleiner*.

2) Der durchschnittliche wahrscheinliche Fehler der älteren Bestimmungen — die Gläser S 95, 665 und die Borsäure sind ausgeschlossen — beträgt nämlich 0,00170, der der neueren 0,00107; die durchschnittlichen Gewichte verhalten sich also wie 11 : 29.

Übersichts-Tabelle.

Fabr.-Nr.	SiO ₂	B ₂ O ₃	ZnO	PbO	Al ₂ O ₃	As ₂ O ₅	BaO	Na ₂ O	K ₂ O	CaO	P ₂ O ₅	Mn ₂ O ₃	Elastizitätszahl (μ)	Zugmodul (E) (Winkel- mann)	Com- pressions- modul (C)	Torsions- modul (T)
1450	71	14	—	—	5	—	—	10	—	—	—	—	0,197	7300	4030	3050
278III	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,208	6640	3790	2750
2175	68,7	8	—	—	—	1,5	—	5,3	14,5	2	—	0,03	0,210	7460	4290	3080
627	68,2	10	2	—	—	0,2	—	10	9,5	—	—	—	0,213	7970	4630	3290
1893 ¹⁾	53,5	20	—	—	—	—	—	—	6,5	—	—	—	0,219	5170	3070	2120
714	74,6	—	—	—	—	0,3	—	9	11	5	—	0,1	0,221	6570	3920	2690
20	69,5	2	—	2,5	2,5	0,4	—	—	16	—	—	—	0,222	6340	3790	2600
2154	54,2	1,5	—	33	—	0,2	—	3	8	—	—	0,1	0,222	6100	3660	2500
2106	44,6	—	—	46,6	—	0,3	—	0,5	8	—	—	—	0,222	5390	3230	2210
1571	41	—	—	51,7	—	0,2	—	—	7	—	—	—	0,224	5460	3300	2230
709	70,6	—	12	—	—	0,4	—	17	—	—	—	—	0,226	6630	4030	2700
Normalgl.	67,3	2	7	—	2,5	—	—	14	—	7	—	0,2	0,228	7400	4530	3010
2158	64,6	2,7	2	—	—	0,4	10,2	5	15	—	69,5	0,1	0,231	6610	4100	2690
S 219 ¹⁾	—	3	—	—	10	1,5	—	—	12	—	—	—	0,235	6780	4260	2750
500	29,3	—	—	67,5	—	0,2	—	—	3	—	—	—	0,239	5490	3510	2220
658	32,7	31	—	25	7	0,3	—	1	3	—	—	—	0,250	5470	3650	2190
1973	48,1	4,5	10,1	—	—	0,4	28,3	1	7,5	—	—	0,1	0,252	7420	4990	2960
290	58,7	—	—	—	—	0,3	—	—	33	8	—	—	0,253	6010	4060	2400
270	—	3	—	—	8	1,5	28	—	—	—	59,5	—	0,253	6330	4270	2530
2122	37,5	15	—	—	5	1,5	41	—	—	—	—	—	0,256	—	—	—
370	54,8	—	17	—	—	0,2	—	—	28	—	—	—	0,261	5850	4080	2820
S 208	20	—	—	80	—	—	—	—	—	—	—	—	0,261	5090	3550	2030
1933	39,64	6	9,2	—	2,5	0,5	42,1	—	—	—	—	0,06	0,266	—	—	—
1299	34,5	10,1	7,8	—	5	0,5	42	—	—	—	—	—	0,271	—	—	—
S 95	—	3	—	—	1,5	1,5	38	—	—	—	56	—	0,272	7970	5800	3140
S 185 ¹⁾	—	—	—	—	22,4	—	—	—	—	—	—	—	0,273	—	—	—
S 196	—	69,1	—	—	18	0,2	4,7	8	—	—	—	—	0,274	4700	3470	1840
S 120	—	42,8	—	52,0	5,0	0,2	—	—	—	—	—	—	0,279	—	—	—
Borsäure	—	100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,283	—	—	—
665	—	41	59	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,319	8170	7520	3100

1) Es enthalten ausserdem: 1893 20 Theile Sb₂O₃; S 219 4 MgO; S 185 5,8 Li₂O.

also auch für isotrope feste Körper *kein fester*, von der Substanz unabhängiger Werth dieses Coefficienten vorhanden ist.

Es ist von Interesse, die Werthe mit den von Auerbach gefundenen zu vergleichen. Auerbach¹⁾ hatte den Versuch gemacht, aus den von ihm bestimmten Eindringungsmoduln (E') und den von Winkelmann und Schott²⁾ bestimmten Zugmoduln (E) auf Grund der Gleichung $E = E' (1 - \mu^2)$ die Elasticitätszahlen für eine Reihe von Gläsern zu berechnen. Fehler von 15 Proc. waren dabei als unter ungünstigen Umständen möglich hingestellt.

Die folgende Vergleichung der beiderseitigen Resultate zeigt, dass *Unterschiede* bis zu 37,3 Proc. vorkommen und der durchschnittliche *Unterschied* 16,2 Proc. beträgt.

	Gl. 1450	1571	709	Normalgl.	500	658	290	270	S 208	1299	S 196
Straubel	0,197	0,224	0,226	0,228	0,239	0,250	0,253	0,253	0,261	0,271	0,274
Auerbach	0,20	0,29	0,21	0,21	0,25	0,19	0,17	0,27	0,30	0,17	0,24
Differenz } in Proc. }	-1,5	-29,5	+7,1	+7,9	-4,6	+24,0	+32,8	-6,7	-14,9	+37,3	+12,4

Daraus ist zu schliessen, dass die Genauigkeit mindestens *einer* der von Auerbach benutzten Werthreihen zu hoch angesetzt ist.

Mit dem Nachweis der obigen Abweichungen fällt auch die von Auerbach auf Grund seiner Zahlen ausgesprochene Beziehung von Härte (H) und Elasticitätszahl. Anstatt annähernd constant zu sein, liegen nämlich die Producte dieser beiden Grössen (H , bestimmt von Auerbach, μ , von mir bestimmt) zwischen den Grenzen 38,8 und 120,3. Freilich ist zu bemerken, dass das merkwürdige Glas 665, welches die bei weitem grösste Härte und zugleich auch die bei weitem *grösste* Elasticitätszahl besitzt und die vermuthete Gesetzmässigkeit am schlagendsten widerlegt, Auerbach damals nicht zur Verfügung stand, sondern erst später auf meinen Wunsch von ihm untersucht wurde. Man sieht hier wieder, wie wichtig es ist, möglichst extrem zusammengesetzte Gläser zu untersuchen.

Trotz des obigen Resultates ist ein Zusammenhang zwischen

1) F. Auerbach, Wied. Ann. 53. p. 1000. 1894.

2) A. Winkelmann u. O. Schott, Wied. Ann. 51. p. 697. 1894.

Elasticitätszahl und Härte innerhalb beschränkter Grenzen nicht völlig abzuweisen, denn erstens muss für alle Gläser das μ mit Annäherung an den Schmelzpunkt auf 0,5 anwachsen und die Härte auf Null abnehmen. Um daraus aber einen Schluss zu ziehen, muss man sowohl für die Härte wie die Elasticitätszahl den Verlauf der Temperaturcoefficienten und die Schmelztemperatur kennen. Zweitens ist natürlich auch ein Zusammenhang zwischen den beiden Eigenschaften für weniger stark variierende Zusammensetzung insofern möglich, als ein paar in grösserer Menge vorkommende Bestandtheile (wie z. B. SiO_2 mit *grossem* H und *kleinem* μ und B_2O_3 mit *kleinem* H und *grossem* μ etc.) auf die beiden Eigenschaften einen dominirenden Einfluss ausüben können.

Aenderung der Krümmung der Oberfläche.

Eine auffallende Erscheinung ist die grosse gleichsinnige Differenz zwischen den ν -Werthen für die älteren und die neueren Beobachtungen und zwar sind mit einer einzigen Ausnahme — das Glas 290 zeigt eine relativ geringe Abnahme — bei allen Gläsern die ν der neueren Beobachtungen grösser als die der älteren. Die Erscheinung ist auffallend, da die Prismen zwischen den Beobachtungen ausser der Reduction der Breite auf 2 cm keinerlei mechanische Bearbeitung erfahren haben. Die folgende Tabelle, in der die *Differenz der ν* angegeben ist, zeigt dieses eigenthümliche Verhalten.

278 III	627	1893	20	2106	714
+ 0,1443	+ 0,1246	+ 0,1512	+ 0,0553	+ 0,1083	+ 0,1053
709	1571	Normalgl.	2158	S 219	500
+ 0,1540	+ 0,0593	+ 0,0716	+ 0,1447	+ 0,1038	+ 0,0349
658	1973	[290]	270	2122	1933
+ 0,0747	+ 0,1305	[- 0,0603]	+ 0,1237	+ 0,1035	+ 0,1485
1299	S 185	S 196	S 120		
+ 0,0933	+ 0,0393	+ 0,1176	+ 0,2952.		

Demnach beträgt die durchschnittliche Zunahme (Glas 290 eingeschlossen) 0,1056; dieser Werth ist nicht bloss gegenüber dem durchschnittlichen wahrscheinlichen Fehler der ν , sondern auch gegenüber den aus den maximalen Unterschieden der μ durch Multiplication mit

$$\sqrt{\frac{\sum n}{\sum \frac{1}{n}}} \quad \text{oder} \quad \frac{\sum n}{m}$$

berechneten Grössen viel zu gross, um als Unsicherheit aufgefasst werden zu können. Es ist vielmehr thatsächlich eine *Aenderung der Krümmung* der Oberfläche eingetreten.

Es entsteht die Frage, welchen Sinn hat die Aenderung und wodurch kann sie veranlasst sein. Bezeichnen wir die Zunahmen von ϱ' und ϱ'' mit der Zeit mit $\Delta \varrho'$ und $\Delta \varrho''$, so folgt aus den Beobachtungen nur, dass $\mu \Delta \varrho' + \Delta \varrho'' < 0$ und dass also mindestens *eine* der Krümmungsänderungen entgegengesetzt wie die Biegungskrümmung in der Biegungsebene erfolgt ist. Bezüglich der Ursachen dieser Aenderung kann man an Verschiedenes denken.

Erstens wäre es möglich, dass die Veränderungen durch die ersten Durchbiegungen entstanden sind, also entweder eine Art von Nachwirkung (vorübergehender Natur) oder von Plasticität (dauernder Natur) anzeigen. Man könnte in diesem Falle eine qualitative Aussage über die Abhängigkeit der geschehenen Veränderung von der ursprünglichen Deformation machen. Führt man nämlich in die obige Ungleichung $\mu \Delta \varrho' + \Delta \varrho'' < 0$ an Stelle von $\mu - \varrho_2/\varrho_1$ ein, so erhält man:

$$\Delta \varrho'' - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \Delta \varrho' < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta \varrho''}{\varrho_2} > \frac{\Delta \varrho'}{\varrho_1},$$

was in Anbetracht der Grössenverhältnisse von ϱ_2 und ϱ_1 bedeuten würde, dass die Veränderung nicht der verursachenden Deformation proportional ist, sondern *weniger* stark wächst. Infolge dieses Umstandes dürfte es sich wohl kaum um Plasticität handeln.

Man kann andererseits daran denken, dass die Veränderung infolge der Reduction auf geringere Breite eingetreten ist, müsste dann aber ausser der Annahme, dass die Gläser nicht ganz spannungsfrei gewesen sind, noch weitere machen, um die Gleichsinnigkeit der Aenderung zu erklären. Hierin dürfte also wohl kaum eine plausible Erklärung liegen.

Ferner ist auch nicht ausgeschlossen, dass die Veränderlichkeit eine Folge des Schleif- und Polirprocesses ist. Diese Annahme scheint ebenso wie die erste den Vorzug zu haben, dass die Gleichsinnigkeit der Aenderung von vornherein gegeben

sein würde; denn die Prismen sind, wie oben gesagt, nur auf der einen Seite polirt, auf der anderen dagegen im Rohschliff gelassen. Ueber die genauere Art der Wirkung des Feinschleif- und Polirprocesses ist hierbei noch nichts gesagt; man könnte an die dabei unvermeidlichen Deformationen denken und die Erscheinung wiederum als Nachwirkung auffassen. Dies verbietet sich indess — abgesehen davon, dass die Beanspruchungen bei den Beobachtungen viel stärker als bei der Herstellung sind — dadurch, weil dann concave ($\nu > 0$) und convexe ($\nu < 0$) Flächen sich verschieden verhalten müssten, was nicht der Fall ist. Gleichwohl möchte ich die an dritter Stelle gegebene Erklärung nicht vollständig abweisen. Denn es ist noch eine andere Art der Einwirkung des Schleif- und Polirprocesses möglich, nämlich dass eine eigenthümliche abnorme *Oberflächen-spannung* entsteht und der „normale“ Zustand nur sehr langsam erreicht wird.

Das Wesentliche an der ersten (Nachwirkung) und letzten (Oberflächenspannungsänderung) Hypothese lässt sich durch Bestimmung der Veränderungen der Einzelkrümmungen ($\Delta \rho''$, $\Delta \rho'$) prüfen; im ersteren Falle muss eine anfänglich ebene Fläche nach der Beanspruchung sattelförmig, im letzteren ohne Beanspruchung gleichsinnig gekrümmt und zwar auf Grund der Gleichung $\Delta \rho'' + \mu \Delta \rho' < 0$ *concav* werden; eine dahingehende Untersuchung soll später erfolgen.

Elasticitätszahl und chemische Zusammensetzung.

Die Tabelle zeigt ferner, dass die Elasticitätszahl eines Glases durch die chemische Zusammensetzung bedingt ist; SiO_2 wirkt augenscheinlich erniedrigend, B_2O_3 , ZnO , PbO , BaO erhöhend, P_2O_5 nimmt eine mittlere Stellung ein; über den Einfluss der übrigen Bestandtheile ist ohne rechnerische Betrachtung wenig Sicheres zu sagen. Für die letztere handelt es sich zunächst um die Frage, von welcher Art die die Beobachtungen darstellenden Ausdrücke sein können. Molecular-theoretische Betrachtungen würden darauf in gewissem Sinne Antwort geben können, aber leider fehlen die nöthigsten Unterlagen, wie z. B. die Kenntniss der chemischen Natur der Gläser. Unter diesen Umständen ist man auf Probiren angewiesen und man wird zunächst versuchen, ob man mit der einfachsten

Annahme, nämlich dass eine Eigenschaft additiver Natur ist, d. h. mit linearen Ausdrücken auskommt. Für Gläser sind solche Versuche z. B. von Winkelmann und Schott¹⁾ bezüglich des Zugmoduls, der Zug- und der Druckfestigkeit, der thermischen Ausdehnung, der thermischen Leitfähigkeit, des specifischen Gewichtes, von Winkelmann²⁾ bezüglich des Zugmoduls und von Auerbach³⁾ bezüglich der Härte gemacht worden.

Ob diese Versuche als gelungen anzusehen sind, dürfte sich nur dadurch eine eingehende rechnerische Behandlung entscheiden lassen. Es wäre nämlich ausser der Frage, ob die Constanten genügend scharf eindeutig bestimmbar sind, sowie ob die von den genannten Autoren gegebenen Werthe die Beobachtungen am besten darstellen, d. h. die Summe der Restquadrate möglichst klein machen, durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen festzustellen, welche Uebereinstimmung sich unter den gegebenen Umständen von vornherein erwarten lässt bez. mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die additive Natur eines Bestandtheiles behaupten lässt.

Trotz der Bedenken, die bei Offenlassung einiger von diesen und ähnlichen Fragen nothwendig vorhanden sind, habe ich den gleichen Weg wie die genannten Autoren versucht; denn einerseits ist ein geringer zahlenmässiger Einblick in den Einfluss der einzelnen Bestandtheile immer noch besser wie gar keiner und andererseits ist es bei der complicirten Zusammensetzung der meisten Gläser kaum ausführbar, andere Darstellungsformen als lineare zu untersuchen.

Es handelt sich weiter um die Frage, ob man für den Zusammenhang zwischen Elasticitätszahl und chemischer Zusammensetzung die Mengen pro Volum- oder pro Gewichtseinheit zu Grunde legen soll.

Obwohl das erstere etwas zweckmässiger erscheint — die Darstellungen schliessen sich gegenseitig aus —, wurde — zum Theil mit Rücksicht auf die dann nöthige Bestimmung der specifischen Gewichte — die letztere gewählt.

Bezeichnet man mit α_p , β_p . . . die Gewichtsprocente der

1) A. Winkelmann u. O. Schott, Wied. Ann. 51. p. 730. 1894.

2) A. Winkelmann, l. c. 61. p. 105. 1897.

3) F. Auerbach, l. c. 53. p. 1000. 1894.

Bestandtheile für das p^{te} Glas, mit μ_p den beobachteten Werth der Elasticitätszahl, so wurden demnach diejenigen Werthe $x, y \dots$ gesucht, die das Gleichungssystem

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \dots = 100 \mu_1$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \dots = 100 \mu_2$$

.....

am besten befriedigen, d. h. die Summe der Restquadrate möglichst klein machen. Zur Erleichterung der Rechnung wurde eine Reihe von Vereinfachungen getroffen. Es wurden nämlich erstens die Gläser mit den selten vorkommenden Bestandtheilen Sb_2O_3 , P_2O_5 und Li_2O zunächst nicht in die Berechnung einbezogen; zweitens wurde für die nur in geringen Mengen vorkommenden Bestandtheile MgO , As_2O_5 , Mn_2O_3 , die sich entsprechend unsicher bestimmt hätten, der feste Werth 0,25 gewählt und drittens bei der Bildung der Normalgleichungen bei unbedeutendem Gehalt (2—3 Proc.) an einem Bestandtheil ein Näherungswerth für diesen benutzt, der dann allmählich verbessert wurde. Da das Glas 2175 erst nachträglich untersucht wurde, handelte es sich einschliesslich der Borsäure um 23 Gläser mit den neun Bestandtheilen SiO_2 , B_2O_3 , ZnO , PbO , Al_2O_3 , BaO , Na_2O , K_2O , CaO . Mit den aus den Normalgleichungen durch successive Näherung gewonnenen Werthen $x, y \dots$ wurden dann später die Werthe für P_2O_5 und Sb_2O_3 bestimmt.¹⁾

Bei der Berechnung zeigte sich ein eigenthümlicher Umstand, nämlich, dass das System der Normalgleichungen sehr empfindlich war, d. h. dass *geringe* Aenderungen in den beobachteten Werthen — es kamen während der Rechnung noch einige Beobachtungen hinzu — oder in den angenommenen Näherungswerthen auf die Werthe x, y, \dots einiger Bestandtheile einen sehr *starken* Einfluss ausübten. Da nun die beobachteten Zahlen nur eine bestimmte Genauigkeit haben, sind mindestens einige der gesuchten Grössen mit grosser Unsicherheit behaftet. Diese Unsicherheit scheint für die verschiedenen Bestandtheile sehr verschieden, aber keineswegs allein durch die Stärke des Vorkommens bedingt zu sein und nach wachsender Unsicherheit

1) Der Werth von Li_2O hat wegen des geringen Vorkommens und des eventuellen Wassergehaltes des Rohmaterials keine Bedeutung.

geordnet die Reihenfolge B_2O_3 , ZnO , P_2O_5 , PbO , BaO , SiO_2 , K_2O , CaO , Al_2O_3 , Sb_2O_3 , Na_2O zu haben.

Eine andere Folge der besprochenen Eigenthümlichkeit ist, dass die Berechnung der Werthe erschwert ist, da, selbst wenn die Normalgleichungen schon sehr weitgehend befriedigt sind, unter Umständen doch noch grosse Correctionen an den Werthen anzubringen sind.

Der nächste Grund für die Unsicherheit ist natürlich die relative Kleinheit der Determinante der Normalgleichungen:

$$\begin{vmatrix} \Sigma \alpha^2 & \Sigma \alpha \beta & \dots \\ \Sigma \beta \alpha & \Sigma \beta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Da diese Determinante nur die Verhältnisse der Bestandtheile der Gläser enthält, muss, sofern dieselben Glasarten untersucht werden, nothwendigerweise eine relativ starke Unsicherheit der Wirkung der einzelnen Bestandtheile für *jede* physikalische Eigenschaft vorhanden sein. Ist eine Eigenschaft nur bei einem *Theil* der Gläser untersucht, so muss ferner — abgesehen davon, dass bei einer geringeren Zahl die Dar-

Darstellung der Beobachtungen.

I. Constantenwerthe.

	A	B	C	D	E
SiO_2	0,1200	0,1367	0,1533	0,1700	0,1533
B_2O_3	0,2840	0,2837	0,2833	0,2830	0,2840
ZnO	0,3440	0,3473	0,3507	0,3540	0,3460
PbO	0,2860	0,2787	0,2715	0,2643	0,2760
Al_2O_3	0,0950	0,1250	0,1550	0,1850	0,1750
BaO	0,3900	0,3740	0,3580	0,3420	0,3560
Na_2O	0,6110	0,5110	0,4110	0,3110	0,4310
K_2O	0,4490	0,4204	0,3919	0,3633	0,3969
CaO	0,4330	0,4497	0,4663	0,4830	0,4163
P_2O_5	0,2080	0,2120	0,2160	0,2200	0,2147
Sb_2O_3	0,3920	0,3365	0,2809	0,2253	0,2772

Für MgO , As_2O_5 , Mn_2O_3 ist stets 0,2500 zu setzen.

Unterschiede der beobachteten und berechneten Werthe.

Schmelz- nummer	Elasticitäts- zahl	beob.-ber. <i>A</i>	beob.-ber. <i>B</i>	beob.-ber. <i>C</i>	beob.-ber. <i>D</i>	beob.-ber. <i>E</i>
1450	0,197	+ 0,007	+ 0,003	—	— 0,003	— 0,003
278 ^{III}	0,208	+ 0,008	+ 0,005	+ 0,003	—	+ 0,001
2175	0,210	— 0,004	— 0,007	— 0,009	— 0,011	— 0,010
627	0,213	— 0,008	— 0,007	— 0,006	— 0,005	— 0,008
1893	0,219	— 0,010	— 0,006	— 0,002	+ 0,002	— 0,001
714	0,221	+ 0,004	+ 0,003	+ 0,002	+ 0,001	+ 0,002
20	0,221	+ 0,007	+ 0,006	+ 0,006	+ 0,005	+ 0,003
2154	0,222	+ 0,003	+ 0,001	—	— 0,001	— 0,002
2106	0,222	— 0,004	— 0,006	— 0,007	— 0,008	— 0,009
1571	0,224	— 0,006	— 0,007	— 0,008	— 0,009	— 0,011
709	0,226	— 0,005	—	+ 0,005	+ 0,009	+ 0,002
Normalgl.	0,228	— 0,002	— 0,001	—	—	—
2158	0,231	—	—	—	—	— 0,002
S 219	0,235	+ 0,005	+ 0,002	—	— 0,002	— 0,002
500	0,239	— 0,004	— 0,003	— 0,002	— 0,001	— 0,005
658	0,250	+ 0,024	+ 0,021	+ 0,017	+ 0,013	+ 0,014
1973	0,252	— 0,004	— 0,006	— 0,006	— 0,007	— 0,006
290	0,253	— 0,001	— 0,003	— 0,004	— 0,006	— 0,002
270	0,253	+ 0,001	—	—	—	—
2122	0,256	—	— 0,001	— 0,002	— 0,003	— 0,003
370	0,261	+ 0,010	+ 0,009	+ 0,007	+ 0,005	+ 0,006
S 208	0,261	+ 0,008	+ 0,011	+ 0,013	+ 0,016	+ 0,010
1933	0,266	+ 0,001	—	— 0,001	— 0,001	—
1299	0,271	+ 0,004	+ 0,003	+ 0,003	+ 0,002	+ 0,003
S 95	0,272	— 0,006	— 0,003	+ 0,001	+ 0,004	+ 0,002
S 185	0,273					
S 196	0,274	— 0,007	— 0,007	—	+ 0,004	— 0,005
S 120	0,279	+ 0,003	+ 0,003	+ 0,008	+ 0,010	+ 0,004
B ₂ O ₃	0,283	— 0,001	— 0,001	— 0,001	—	— 0,001
665	0,319	—	— 0,002	— 0,004	— 0,006	— 0,001
$10^3 \sum [A] = 147$			126	117	134	118
$10^3 \sum A^2 = 1359$			1070	965	1134	868
Mittl. Diff. in Proc.:		2,1	1,8	1,7	1,9	1,7

stellung der Beobachtungen an und für sich besser sein kann — die Unsicherheit naturgemäss noch grösser sein. Solche Erwägungen führen theilweise zu kritischen Bedenken bezüglich der Bedeutung der von den oben genannten Autoren gegebenen Darstellungen; es ist aber hier nicht möglich, diese an der Hand des Zahlenmaterials eingehend zu begründen.

In der vorstehenden Tabelle habe ich die mit fünf verschiedenen Reihen von Constanten (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*) berechneten Werthe der Elasticitätszahlen oder vielmehr die Unterschiede zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen gegeben. Die Zahlen geben nur ein unvollständiges Bild von der Unsicherheit der Werthe *x*, *y* . . . , sie werden aber genügen.¹⁾ Bei der Beurtheilung hat man sich natürlich immer vor Augen zu halten, dass es in der Natur des Minimums liegt, dass relativ starke Aenderungen an den Constanten relativ geringen Einfluss auf den mittleren *Fehler der Darstellung* ausüben.

Die Constanten unter *A*, *B*, *C* und *D* stehen in einem einfachen Zusammenhange, es ist nämlich für jeden Bestandtheil

$$B - A = \frac{C - A}{2} = \frac{D - A}{3}$$

und zwar hat *B - A* die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \text{SiO}_2 & \text{B}_2\text{O}_3 & \text{ZnO} & \text{PbO} & \text{Al}_2\text{O}_3 & \text{BaO} & \text{Na}_2\text{O} & \text{K}_2\text{O} & \text{CaO} & \text{P}_2\text{O}_5 & \text{Sb}_2\text{O}_3 \\ + \frac{1}{60} & - \frac{1}{3000} & + \frac{1}{300} & - \frac{1}{140} & + 0,03 & - 0,016 & - 0,1 & - \frac{1}{35} & + \frac{1}{60} & + 0,004 & - \frac{1}{18} \end{array}$$

Ferner sind die Zahlen unter *E* zum Theil wenig von denen unter *C* verschieden.

Es ist zu bemerken, dass die obigen Differenzen (*B - A*) keineswegs systematisch aus der Forderung, dass die linken Seiten der Normalgleichungen möglichst wenig geändert werden sollten, bestimmt wurden, sondern dass sie im Gegentheil zur Compensation kleinerer Reste dienen sollten; demnach ist zu erwarten, dass eine systematische Berechnung einen viel grösseren Spielraum für die gesuchten Grössen zeigen würde.

1) Ein besseres Bild der Unsicherheit, als es die Reste der den einzelnen Gläsern entsprechenden Gleichungen liefern, würden die Reste der Normalgleichungen ergeben.

Bemerkenswerth ist ferner der grosse Einfluss einzelner Gläser auf den Werth der Constanten; wäre 658 nicht untersucht worden, so würden die am besten darstellenden Werthe in grösserer Nähe von A als von C liegen; andererseits ist S 208 ein Haupthinderniss für einen grösseren Spielraum über D hinaus. Solche Eigenthümlichkeiten können in stärkerem Maasse natürlich auch nur bei Kleinheit der früher erwähnten Determinante vorkommen.

Als Resultat dieser Ueberlegungen ergibt sich erstens, dass eine lineare Darstellung mit Gewichtsprocenten innerhalb der Beobachtungsfehler wahrscheinlich nicht möglich ist — es bleiben bei meinen besten Darstellungen (C, E) Maximalunterschiede von 6,8 bez. 5,6 Proc. — und zweitens, dass, wenn man sich auch mit einer weniger genauen Darstellung begnügen will, die Constanten einen wahrscheinlich in sehr verschiedenem Maasse grossen Spielraum besitzen. Wenn es aber deshalb auch am richtigsten wäre, die Frage nach dem Zusammenhang von Elasticitätszahl und Zusammensetzung des Glases vollständig offen zu lassen, so dürften doch für praktische Zwecke und vorsichtig benutzt die Mittelwerthe von C und E immerhin als Anhaltspunkte dienen können.

Ob der obige Misserfolg, falls man eine Darstellung mit Gewichten pro Volumeinheit versuchte, ebenfalls vorhanden sein würde, habe ich in Anbetracht der langwierigen Rechnungen offen gelassen, vielleicht giebt die schlechte Darstellung des schwersten Glases (S 208 spec. Gew. 5,83) einen Wink.

Compressions- und Torsions-Moduln des Glases.

Es ist von Interesse, die von mir gefundenen Elasticitätszahlen mit einem der früher von anderer Seite (Winkelmann und Schott, Winkelmann, Auerbach l. c.) bestimmten elastischen Moduln zu combiniren, um die übrigen Moduln, speciell die beiden Hauptmoduln, den Volumenmodul (C) und den Gestaltsmodul (T) kennen zu lernen. Ich habe dazu, abgesehen von dem Glase 665¹⁾ die Winkelmann und Schott

1) Von dem Glase 665 lag der Zugmodul nicht vor. Hr. Auerbach hatte die Freundlichkeit, den Eindringungsmodul und die Härte zu bestimmen. Ersterer ergab sich zu 9094 kg/mm², letztere zu 377 kg/mm². Das Glas zeichnet sich demnach unter den bisher untersuchten durch eine

bez. Winkelmann bestimmten Zugmoduln¹⁾ benutzt; die berechneten Werthe finden sich in der Uebersichtstabelle p. 401. Da die Zusammenhänge die Form

$$E = 3 C(1 - 2 \mu) \text{ bez. } E = 2 T(1 + \mu)$$

haben, so entsprechen einer Differenz des μ von + 1 Proc. die in der folgenden Tabelle in Procenten ausgedrückten Unterschiede in C und T .

$100 \frac{\Delta \mu}{\mu} = 1$	μ	$100 \frac{\Delta C}{C}$	$100 \frac{\Delta T}{T}$
	0,20	+ 0,67	— 0,17
	0,25	+ 1,00	— 0,20
	0,30	+ 1,67	— 0,23

Da die Werthe des Torsionsmoduls infolge der Beziehung zwischen E , T und μ und der geringen Variation von μ nahezu den Werthen des Zugmoduls proportional sind, kann ich mich darauf beschränken, auf die Erörterungen von Winkelmann hinzuweisen und die Grenzwerte des Torsionsmoduls anzugeben; sie betragen 1840 (Glas S 196) und 3290 kg/mm² (Glas 627).

Anders liegt die Sache beim Compressionsmodul, der eine viel stärkere Abhängigkeit von der Elasticitätszahl (μ) zeigt.

Den kleinsten Werth, 3070 kg/mm², hat das Glas 1893, welches 20 Theile Sb₂O₃ enthält, darauf folgen die mittleren und schweren Silicatflinte, das Glas S 196 mit 69,1 Proc., B₂O₃ und die allerschwersten Flinte. In der Mitte stehen zunächst die Leichtflinte und darauf von PbO, BaO, P₂O₅ freie Typen, am Schlusse neben einigen der letzteren die Phosphat-

ganze Reihe extremer Eigenschaften aus; es hat 1. die grösste Härte (Quarz \perp Axe 308), 2. den grössten Zug-, Eindringungs- und Compressionsmodul, sowie die grösste Elasticitätszahl, 3. den kleinsten Ausdehnungscoefficienten, sowie wahrscheinlich 4. sehr grosse Zug- und Druckfestigkeit, 5. sehr grosse thermische Widerstandsfähigkeit, 6. geringe elektrische Leitfähigkeit.

1) An Stelle der nicht bestimmten Zugmoduln der Gläser 2175 und 2106 habe ich die der nahestehenden Gläser 1239 und 1440 verwendet. In der Tabelle deutet das Zeichen \sim die Ersetzung an. Die Zusammensetzung der letzteren Gläser ist:

1239: SiO₂ 70,4. B₂O₃ 7,5. As₂O₅ 0,2. Na₂O 5,3. K₂O 14,5. CaO 2,0. Mn₂O₃ 0,1.

1440: SiO₂ 44,2. PbO 47. As₂O₅ 0,2. Na₂O 0,5. K₂O 8. Mn₂O₃ 0,1.

und schweren Barytgläser, sowie zuletzt das Zinkborat 665 mit dem Werthe 7520 kg/mm².

Man darf vielleicht schliessen, dass ZnO, BaO und P₂O₅ den Compressionswiderstand erhöhen, Sb₂O₃ und PbO dagegen ihn erniedrigen.

Zusammenfassung.

1. Die von Cornu angegebene Methode zur Bestimmung der Elasticitätszahl ist bei zweckmässiger Handhabung im Stande, genaue Werthe zu liefern.

2. Erforderlich ist dafür: geeignete Wahl der Dimensionen des Prismas, Fernhalten von störenden Kräften (Unterlagen) und Beobachtung bei stark variirter Durchbiegung. (Elimination des Flächenfehlers).

3. Unentschieden ist die Frage, ob die von der Methode gelieferten Werthe mit kleinen systematischen Fehlern behaftet sind, die im Sinne einer Verkleinerung wirken.

4. Die Elasticitätszahlen der 30 untersuchten Gläser des Jenaer Glaswerkes erfüllen das Intervall 0,197 bis 0,319; es existirt also auch für isotrope Substanzen kein fester, von der Substanz unabhängiger Werth.

5. Die aus den Zugmoduln und Elasticitätszahlen berechneten Compressionsmoduln liegen zwischen 3070 und 7520, die Torsionsmoduln zwischen 1840 und 3290 kg/mm².

6. Eine Darstellung der beobachteten Elasticitätszahlen durch lineare Functionen der Gewichtsprocente pro Gewichtseinheit ist zwar sicher auf durchschnittlich 1,7 Proc. und mit einer Maximaldifferenz von 5,6 Proc. möglich (Constantenwerthe unter *E*), aber die Constantenwerthe sind mindestens theilweise nicht scharf bestimmbar.

Jena, Physik. Inst. der Univ., den 14. April 1899.

(Eingegangen 2. Mai 1899.)
