Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Von **Heinrich Tietze** in Wien.

Einleitung.

Auf dem Gebiete der Analysis situs hat uns Poincaré[1]) in jüngster Zeit eine Fülle neuer Resultate gebracht, gleichzeitig aber auch eine Fülle neuer Fragen, die noch der Erledigung harren. Während man nämlich seit langem ein System von Bedingungen kennt, das dafür, daß sich zwei zweidimensionale Mannigfaltigkeiten eineindeutig und stetig aufeinander beziehen lassen, sowohl notwendig als hinreichend ist, ist derzeit ein solches System von Bedingungen für die drei- und mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten nicht bekannt. Man hat wohl eine, insbesondere den Arbeiten Poincarés zu verdankende Kenntnis von einer ganzen Reihe von unterscheidenden Merkmalen (Zahlen, Gruppen) mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, die sich bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Transformation der Mannigfaltigkeit nicht ändern und deshalb als topologische Invarianten der Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden können. Daraus ergibt sich als notwendige Bedingung dafür, daß sich zwei Mannigfaltigkeiten eineindeutig und stetig aufeinander beziehen lassen, die Übereinstimmung ihrer topologischen Invarianten, während wir keine Kenntnis davon haben, ob diese Übereinstimmung der bis jetzt bekannten Invarianten auch eine hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer eineindeutigen stetigen Beziehung sei.

[1]) Es kommen vor allem die folgenden Arbeiten in Betracht: „Analysis situs“, Journal d. l'École polytechnique, 2. sér., Cah. 1; „Complément à l'Analysis situs“, Rend. d. Circ. mat. d. Palermo, t. 13; „Second Complément à l'Analysis situs“, Proceed. Lond. Math. Soc. 32; „Cinquième Complément à l'Analysis situs“, Rend. d. Circ. mat. d. Palermo, t. 18. Im folgenden sollen diese Arbeiten abgekürzt mit „An. Sit.“, „Compl. 1“ u. s. w. zitiert werden. — Das 3. und 4. Complément (Bull. d. l. Soc. Math. d. France t. 30 und Liouv. Journ. 5. ser., t. 8) hat ebenso wie die Arbeit „Sur les périodes des intégrales doubles“ (Liouv. J. 6. ser. t. 2) die Anwendung der Analysis Situs auf die algebraischen Flächen zum Gegenstand.

Der folgende Aufsatz[2]) ist im Anschluß an Poincarés Arbeiten entstanden und beschäftigt sich insbesondere mit der gegenseitigen Stellung der bekannten topologischen Invarianten, wobei sich vor allem herausstellt (Abschn. IV), daß sich aus der „Fundamentalgruppe" einer zweiseitigen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit alle anderen der bekannten topologischen Invarianten (also außer der Bettischen Zahl, von der dies schon Poincaré zeigt, auch die Poincaréschen Torsionszahlen und daher auch die im III. Abschnitt eingeführte Zahl Q) ableiten lassen. Dieses Resultat ergibt sich in einfacher Weise daraus, daß jeder diskreten aus einer endlichen Anzahl von erzeugenden Operationen aufgebauten Gruppe gewisse ihr eigentümlichen Zahlen zugehören, die als die Poincaréschen Zahlen der Gruppe bezeichnet werden mögen, und daß die Torsionszahlen 1. Ordnung einer Mannigfaltigkeit nichts anderes sind als die Poincaréschen Zahlen ihrer Fundamentalgruppe.

Diverse andere Fragen sind in den späteren Abschnitten V—VII berührt. Die ersten beiden Abschnitte, die als Einführung und Grundlage für das Folgende dienen, enthalten die für den Aufsatz maßgebende Umgrenzung des Mannigfaltigkeitsbegriffes auf der Basis einer bestimmten, als „Zellensystem" bezeichneten Darstellungsform und im übrigen einen Abriß über der Hauptsache nach bekannte Tatsachen. Dabei ist zu bemerken, daß die im I. Abschnitte besprochene Darstellung der Mannigfaltigkeiten als Zellensysteme ein besonderes theoretisches Interesse dadurch besitzt, daß sie einen von dem Heranziehen unendlicher Punktmengen oder funktionentheoretischer Hilfsmittel freien Aufbau der Analysis Situs gestattet. Es beruht dies darauf, daß ein Zellensystem durch eine endliche Anzahl von Elementen und eine endliche Anzahl von Verknüpfungen zwischen denselben festgelegt ist. Die hiedurch gegebene Möglichkeit, die Analysis Situs sozusagen rein kombinatorisch zu entwickeln, ist in den Arbeiten von Dyck[3]) zur Geltung gebracht und von Dehn[4]) in dem in allerletzter Zeit erschienenen Enzyklopädie-Artikel systematisch dargestellt worden. Die Vorstellung des Zellensystems und die auf dasselbe bezüglichen Definitionen wird man auf einem solchen Standpunkt für bis zu drei Dimensionen als der Anschauung entnommen und weiterhin als nach Analogie gebildet ansehen.[5])

Die §§ 15, 16 dieses Aufsatzes beschäftigen sich wohl vorwiegend mit kontinuierlichen Punktmannigfaltigkeiten, wobei übrigens die Anschauung in weitgehendem Maße zur Deduktion herangezogen wird. Abgesehen von diesem Teile der Arbeit, der für die strenge Beantwortung der behandelten Fragen nur als Vorarbeit anzusehen ist, bewegen sich die Ausführungen des vorliegenden Aufsatzes in

[2]) Über einige der Ergebnisse habe ich in der Wiener Akad. d. Wiss. einen Vorbericht gegeben. (Siehe Wr. Ber. 115, IIa, S. 841, und Anzeiger 1906, Math. nat. Kl. S. 349.)

[3]) Math. Ann. 32 und 37.

[4]) Dehn-Heegaard, Analysis Situs, Enz. III A B 3.

[5]) Man vergleiche hierüber den eben zitierten Enz.-Art. Grundlagen, Nr. 8.

der eben besprochenen Auffassung des Zellensystems als eines selbständigen von seiner Beziehung zu Punktmannigfaltigkeiten unabhängigen Begriffes. So beziehen sich insbesondere die oberwähnten, die Fundamentalgruppe betreffenden Resultate auf das als selbständiges Objekt des Studiums betrachtete Zellensystem, so gehören hieher der Nachweis in § 13, daß die Fundamentalgruppe eine topologische Invariante ist, und der Inhalt von § 19. Gleichwohl erschien es wünschenswert, die Beziehung der Zellensysteme zu den Punktmannigfaltigkeiten zu betonen, ja geradezu das Zellensystem in einer Weise einzuführen, die ihm den Charakter eines Mittels zur Darstellung von Mannigfaltigkeiten verleiht, und den kombinatorischen Charakter nur nebenher anzudeuten. Ist doch das Zellensystem gerade als Hilfsmittel der Analysis Situs der Punktmannigfaltigkeiten in ergiebigster Weise von Poincaré verwendet worden. Dabei zeigt sich denn allerdings, daß die Übertragung mancher Sätze, die sich im Gebiete der kombinatorischen Analysis Situs ohne Mühe erledigen lassen, auf das Gebiet der Punktmannigfaltigkeiten auf Schwierigkeiten stößt. Daher dann die Unterscheidung zwischen „topologischen Invarianten der Schemata" gegenüber solchen der Mannigfaltigkeiten im § 2, daher das Ersetzen der zuerst gegebenen Definition der Bettischen Zahlen im Laufe des § 6 durch eine andere auf das Zellensystem basierte. Es ist wohl offenbar, daß manche der zur Sprache gebrachten Schwierigkeiten sich bei einer Einschränkung des Gebietes der betrachteten Mannigfaltigkeiten vermeiden lassen, wenn z. B., wie vielfach bei Poincaré, nur analytische Mannigfaltigkeiten in Betracht gezogen werden. Zweifellos läßt sich auch durch das Mittel der Approximation durch analytische Funktionen manche der betrachteten Schwierigkeiten durch Zurückführen auf den von Poincaré vorwiegend betrachteten Fall nur der analytischen Mannigfaltigkeiten, ohneweiters erledigen, während für andere Punkte immerhin eine eingehendere Begründung erforderlich sein wird. Doch haben wir uns darauf beschränkt, auf die erwähnten Schwierigkeiten und unerledigten Fragen hinzuweisen, zumal ein näheres Eingehen auf dieselben den Rahmen des im wesentlichen der kombinatorischen Analysis Situs gewidmeten Aufsatzes allzuweit überschritten hätte.

Noch möge der Verwendung, die in der folgenden Darstellung von der Anschauung gemacht wurde, gedacht werden. Daß sie in gewissen Entwicklungen einiger späterer Abschnitte als Mittel verwendet wurde, mit dessen Hilfe wenigstens ein erster Schritt zur Erledigung der betreffenden Fragen gemacht wurde,[6]) ist bereits

[6]) Hieher gehören auch einzelne jener Stellen (besonders im II. Abschnitte), in denen gewisse Annahmen auf ihre Zulässigkeit oder Wahrscheinlichkeit hin diskutiert werden. In manchen der zur Verwendung kommenden Beispiele werden über den Sachverhalt unter Berufung auf die Anschauung Aussagen gemacht, die also, ebenso wie die daraus abgeleiteten Aussagen über die besprochenen Annahmen, nicht als strenge begründet, sondern nur als plausibel bezeichnet werden können.

gesagt worden. Anderseits aber wurde die Anschauung auch der Deutlichkeit zuliebe herangezogen an Stellen, wo es keine Schwierigkeit bereitet hätte, unter bloßer Anwendung rein logischer Deduktion vorzugehen.

I. Die Schemata mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Abgrenzung des Gebietes der zu betrachtenden Punktmannigfaltigkeiten.

Als das allgemeinste Ziel der Analysis situs[1]) könnte man die vollständige Aufstellung und das Studium derjenigen Eigenschaften beliebiger Punktmengen bezeichnen, welche erhalten bleiben, wenn man von einer Punktmenge zu einer ihr homöomorphen übergeht. Dabei sollen nach Poincaré[2]) zwei Punktmengen homöomorph genannt werden, wenn sie sich eineindeutig und umkehrbar stetig aufeinander beziehen lassen.

Der ungeheueren Allgemeinheit dieser Problemstellung entspricht die weite Entfernung, in der wir uns von dem gesteckten Ziele befinden. Die Beschränkung der Betrachtung auf zusammenhängende (oder aus einzelnen zusammenhängenden Stücken bestehende) Punktmannigfaltigkeiten erscheint hierin, nicht minder aber durch das anderweitig in der Mathematik auftretende Bedürfnis nach einem besseren Einblick in die Analysis situs gerade der kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten begründet.[3]) Es handelt sich zunächst darum, den Begriff der Mannigfaltigkeit in dem Umfang, in dem er weiterhin verwendet werden soll, gehörig abzugrenzen.

---

[1]) Es ist das die von Hurwitz am Züricher Kongreß (1892) zum Ausdruck gebrachte Auffassung. (Verhandlungen des Internation. Mathem. Kongr. Zürich, S. 102.)

[2]) An. Sit. § 2. An der zitierten Stelle ist nur von kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten die Rede.

[3]) So erscheint für die Theorie der algebraischen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher die Kenntnis der Analysis situs der zusammenhängenden vierdimensionalen Punktmannigfaltigkeiten wünschenswert. Hiezu ist allerdings zu bemerken: Die Cremonatransformationen des Raumes zweier komplexer Veränderlicher sind nicht durchaus punktweise eineindeutig, sondern führen zweidimensionale Punktmannigfaltigkeiten in Punkte über und umgekehrt, und das gleiche kommt auch bei birationalen Transformationen algebraischer Flächen aufeinander vor. Hiedurch wird es möglich, daß sich topologische Invarianten von durch algebraische Flächen repräsentierten vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten bei birationalen Transformationen ändern. (Siehe Picard, C. R. 134. p. 629, und die oben zitierte Abhandlung Poincarés in Liouv. Journ., 6. sér., t. 2.) Für funktionentheoretische Probleme kann es also nötig werden, andere Transformationen als die ausnahmslos umkehrbar eindeutigen heranzuziehen und die Invarianten gegenüber diesen Transformationen zu studieren.

Hiezu erscheint es am naturgemäßesten, durch Angabe von inneren Merkmalen, von denen man dann nachzuweisen hat, daß sie bei umkehrbar stetigen und eindeutigen Transformationen nicht verloren gehen, aus der Gesamtheit aller Punktmengen, die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten herauszuheben, um so auf einem Wege, der aus der Theorie der Punktmengen herauswächst, die Analysis situs der kontinuierlichen Punktmannigfaltigkeiten zu entwickeln.[4]) Weitergehende Ergebnisse sind in dieser Richtung nur auf dem Gebiete der ebenen Punktmannigfaltigkeiten gewonnen worden. Hiedurch erscheint es gerechtfertigt, bei Untersuchungen über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten die Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffes an gewisse Darstellungsformen anzuknüpfen (wodurch im allgemeinen eine gewisse Einschränkung des Gebietes der kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten erfolgen wird), und damit gewissermaßen die Schwierigkeiten zu umgehen, die dem erstgenannten Wege anhaften. Unter einer Mannigfaltigkeit wird man dann eine auf die betreffende Art dargestellte Punktmenge oder eine einer solchen homöomorphe Punktmenge verstehen.

Zunächst ein paar allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Arten, Mannigfaltigkeiten darzustellen. Die prinzipiell einfachste Art, Punktmengen und sonach auch Punktmannigfaltigkeiten zu determinieren, besteht darin, dieselben als eine Gesamtheit von Punkten $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ im Raume von n rechtwinkligen Koordinaten anzugeben,[5]) wobei jeder Punkt der Mannigfaltigkeit

---

[4]) Um diese Richtung zu kennzeichnen, genügt es, an die bekannten Resultate von C. Jordan zu erinnern und auf eine Reihe in letzter Zeit erschienener Arbeiten von A. Schoenflies hinzuweisen.

[5]) Verschiedene derartige Darstellungsformen von Mannigfaltigkeiten, wie durch Gleichungen $F_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ zwischen den Koordinaten oder durch Parameterdarstellungen werden von Poincaré (An. Sit. §§ 1, 3, 15) besprochen. Dabei werden z. B. die Funktionen F_i als differenzierbar, gelegentlich auch als analytisch vorausgesetzt. (Es ist klar, daß die Annahme, die Funktionen F_i seien blos stetig, auf viel zu allgemeine Punktmengen führt.) Freilich geht beim Übergang von einer so definierten Mannigfaltigkeit zu einer ihr homöomorphen Punktmenge die Darstellbarkeit durch Gleichungen mit diesen Eigenschaften im allgemeinen verloren. Der Forderung, daß, wenn eine Punktmenge als eine Mannigfaltigkeit angesehen wird, dies auch für alle homöomorphen Punktmengen gilt, mag man dann dadurch entsprechen, daß man eben als Mannigfaltigkeit eine Punktmenge bezeichnet, die entweder selbst einer derartigen Darstellung mittels Funktionen von vorgeschriebener Beschaffenheit fähig ist, oder einer derart dargestellten Punktmenge homöomorph ist. Derartige Härten in den Definitionen haften naturgemäß einer Begründung des Mannigfaltigkeitsbegriffes mittelst einer bestimmten Darstellungsform an. Offenbar ist es auch erforderlich, jede Eigenschaft, die als eine topologische eingeführt wird, für die in der betrachteten Art dargestellten Mannigfaltigkeiten als invariant nachzuweisen gegenüber beliebigen eineindeutigen und umkehrbar stetigen Transformationen, also z. B. im vorliegenden Fall nicht bloß für Transformationen, die durch differenzierbare oder analytische Funktionen vermittelt werden. Es sei vorweg bemerkt, daß die Erfüllung dieser Forderung für die im Folgenden besprochene Darstellung durch ein „Schema" auf das engste zusammenhängt mit dem Nachweis des später besprochenen Satzes (§ 2), daß zwei Schemata, die homöomorphe Mannigfaltigkeiten definieren, selbst homöomorph sind.

durch ein einziges Werte-n-tupel dargestellt wird und jedem auftretenden Werte-n-tupel auch nur ein Punkt der Mannigfaltigkeit entspricht. Wenn aber etwa von den Punkten einer Lemniskate der Doppelpunkt als zwei Punkte der eindimensionalen Mannigfaltigkeit und in der Umgebung desselben nur solche Punkte als benachbart angesehen werden, die bei genügend kleiner Entfernung demselben Zweig durch den Doppelpunkt angehören, so haben wir hierin eine Darstellung einer einfach geschlossenen Kurve, die von einer allgemeineren Art als die zuerst betrachtete Darstellungsart ist. Eine derartige Darstellungsform ist für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten die durch Riemannsche Flächen: Jeder Punkt (x, y) der $(x+iy)$-Ebene stellt nicht einen, sondern eine endliche Anzahl von Punkten der Mannigfaltigkeit dar, wobei durch die Anzahl der jedem Wertepaare (x, y) zugewiesenen Punkte und durch Festsetzungen über die Auffassung des Benachbartseins solcher Punkte das Wesen der Mannigfaltigkeit bestimmt wird. Bei einer anderen Art, Mannigfaltigkeiten zu determinieren, werden wieder verschiedene Werte-n-tupel als ein Punkt der Mannigfaltigkeit angesehen, wie die gleichliegenden Punkte auf den Gegenseiten eines Periodenparallelogramms, wenn die durch das elliptische Gebilde definierte algebraische Mannigfaltigkeit in Betracht gezogen wird. Das hier auftretende allgemeine Prinzip, aus berandeten Flächenstücken durch Zuordnungen von Stücken der Randlinien zweidimensionale Mannigfaltigkeiten festzulegen, ist besonders von Klein betont worden.[6]) Die Verallgemeinerung der letztgenannten Darstellungsform für mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten, die insbesondere Poincaré vielfach verwendet hat und die als „Zellensystem" bezeichnet werden möge, soll im folgenden zu Grunde gelegt werden.

Allgemein kann man im Anschluß an das vorstehend über die verschiedenen Darstellungsformen von Punktmannigfaltigkeiten Gesagte bemerken, daß das Wesen einer Mannigfaltigkeit festgelegt wird einerseits durch die Angabe ihrer Punkte, wobei, wie gesagt, noch Festsetzungen über die durch die betrachteten Werte-n-tupel $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ definierten Punkte Platz greifen können, anderseits aber durch Bestimmungen über das, was als Nachbarschaft der einzelnen Punkte aufzufassen ist. Für das letztere wird eine gewisse Art, Entfernungen zu messen, die freilich dann, ohne den Charakter der Mannigfaltigkeit zu ändern, noch in mannigfacher Weise abgeändert werden kann, die Grundlage bilden. Als ein Beispiel für derartige das Wesen einer Mannigfaltigkeit bestimmende Festsetzungen mag noch auf die bekannte Art hingewiesen werden, wie die Ebene als eine der Kugel homöomorphe Fläche angesehen werden kann: Man nimmt zu den Punkten (x, y) noch einen durch kein Wertepaar repräsentierten Punkt ∞ hinzu, wobei

---

[6]) Man sehe etwa Math. Ann. 21, S. 141.

man als Entfernung der Punkte ∞ und (x, y) etwa $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ wählt. Durch die über Entfernung und Benachbartsein getroffenen Festsetzungen erhalten dann die Begriffe Stetigkeit einer Abbildung und Homöomorphie ihre Bedeutung.[7])

Über den Gebrauch des Wortes Mannigfaltigkeit werde noch gesagt, daß darunter zunächst die — in einer bestimmten Darstellungsart — unter Zuhilfenahme gewisser Festsetzungen gegebene Gesamtheit von Punkten zu verstehen ist. Doch ist es bequem, eine Gesamtheit von einander homöomorphen Mannigfaltigkeiten bisweilen in weiterem Sinne selbst als eine Mannigfaltigkeit zu bezeichnen, wobei dann eine einzelne aus der Gesamtheit der einander homöomorphen Mannigfaltigkeiten herausgegriffene als eine bestimmte Darstellungsform oder als ein Repräsentant der Mannigfaltigkeit (das Wort in dem weiteren Sinne genommen) anzusehen ist.[8])

Bei der in den folgenden §§ gegebenen Besprechung der Zellensysteme oder, wie wir auch sagen wollen, der Schemata[9]) von Mannigfaltigkeiten, sollen ausführlicher nur die Fälle von zwei (§ 2) und drei Dimmensionen (§ 3) betrachtet werden. Bei den Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen (§ 4) können wir uns dann auf Andeutungen beschränken.[10])

---

[7]) Außer Punktmannigfaltigkeiten können auch Mannigfaltigkeiten von anderen Elementen in Betracht gezogen werden (vgl. Klein, Math. Ann. 9, S. 480, und Bd. 21, S. 154), die aber, sofern die Elemente durch eine endliche Anzahl von Koordinaten festlegbar sind, nichts Neues liefern.

[8]) Wird von einem Punkte der Mannigfaltigkeit in diesem weiteren Sinne gesprochen, so ist dabei an eine bestimmte zwischen je zwei Repräsentanten bestehende umkehrbar stetige und eineindeutige Beziehung zu denken, die so gewählt ist, daß, wenn A, B, C irgend drei Repräsentanten der Mannigfaltigkeit sind, vermöge der Beziehungen zwischen A und C, bezw. B und C, demselben Punkt von C entsprechende Punkte von A und B auch einander durch die Beziehung zwischen A und B zugeordnet sind.

[9]) Da der Ausdruck Zellensystem insbesondere den Mannigfaltigkeiten von drei und mehr Dimensionen angepaßt erscheint, soll für den allgemeinen Fall vorwiegend das Wort Schema gebraucht werden, allerdings in etwas anderer Bedeutung als bei Poincaré (Compl. 1, § 2, p. 290), der darunter das versteht, was im folgenden (s. § 5) als Poincarésches Relationensystem bezeichnet ist. Um nicht neue Wortbildungen zu häufen, habe ich diese Abänderung in der Bedeutung vorgenommen.

[10]) Die besprochene Darstellung erscheint bei Poincaré nicht als Grundlage, sondern als gewonnen durch Zerlegung von analytisch definierten Mannigfaltigkeiten. Eine Entwicklung der Analysis situs zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten, die auf die Zusammensetzung derselben durch Flächenstücke basiert ist, ist mir zuerst aus Vorlesungen von Professor Wirtinger (über algebraische Funktionen, Wien, Sommer 1904) bekannt geworden, der auch auf die kombinatorische Seite dieser Entwicklung hingewiesen hat. Diesen Vorlesungen zusammen mit einer späteren persönlichen Mitteilung über die analoge Darstellung dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten verdanke ich die Anregung zu den dem vorliegenden Aufsatz zu grunde liegenden Studien. Was die kombinatorische Seite der folgenden Ausführungen, insbesondere den schrittweisen Aufbau der Schemata von wachsender Dimensionszahl betrifft, so decken sich die Ausführungen mit denjenigen Dehns in dem bereits genannten Enzykl.-Artikel.

§ 2.

Die Schemata zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Die Beschreibung jener Bestimmungsstücke, durch die das Schema einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit festgelegt ist, werde mit der Auseinandersetzung eines speziellen Falles begonnen, wobei zuerst das Schema gewissermaßen in abstrakter Form eingeführt, und dann erläutert wird, wie durch dasselbe eine Punktmannigfaltigkeit definiert erscheint.

Gegeben sei ein Kreis, dessen Umfang in n Teile geteilt sei; die Teilungspunkte sollen Ecken, die Teile sollen Seiten genannt werden. Es sei ferner eine Vorschrift gegeben, derzufolge gewisse Seiten zu je zweien einander zugeordnet werden. Die unter diesen Paaren zugeordneter Seiten nicht vorkommenden Seiten mögen als freie Seiten bezeichnet werden.

Es werde ein bestimmter Sinn für das Durchlaufen der Kreisperipherie als positiver Sinn festgelegt[1]) und dementsprechend bei jeder Seite eine positive und eine negative Richtung, sie zu durchlaufen, unterschieden. Die Vorschrift, welche die Paare zugeordneter Seiten angibt, soll bei jedem Paare auch die Verfügung darüber enthalten, ob der positiven Richtung der einen Seite die negative oder die positive Richtung der zugeordneten Seite entsprechen soll. Dementsprechend werde zwischen Seitenzuordnungen der ersten Art und solchen der zweiten Art unterschieden.

Aus der Zuordnung der Seiten und ihrer Richtungen leiten sich Zuordnungen zwischen den Ecken ab. Seien $s_1, s_2, \ldots s_n$ die Seiten, wie sie bei positivem Umlaufen des Kreises aufeinander folgen. Die Endpunkte von s_i mögen A_{i1} und A_{i2} heißen, derart, daß s_i von A_{i1} nach A_{i2} in positiver Richtung durchlaufen wird.[2]) Jede Ecke trägt somit zwei Bezeichnungen und es ist

$$(1) \qquad A_{n2} = A_{11}, \; A_{i2} = A_{i+1,1} \quad (i = 1, 2, \ldots n-1).$$

Seien nun zwei Seiten s_h, s_k etwa nach der ersten Art einander zugeordnet, so leiten wir daraus die folgenden Zuordnungen der Ecken ab:

$$(2) \qquad \begin{array}{lll} A_{h1} & \text{zugeordnet} & A_{k2} \\ A_{h2} & \text{„} & A_{k1}. \end{array}$$

Bei einer Zuordnung der zweiten Art würde umgekehrt A_{h1} der Ecke A_{k1}, A_{h2} der Ecke A_{k2} zuzuordnen sein. Indem man

[1]) Die Wahl dieses Sinnes ist nicht als ein wesentliches Bestimmungsstück des Schema, sondern nur als ein Hilfsmittel für die Beschreibung der im folgenden auseinandergesetzten Zuordnungen anzusehen. Wenn es sich jedoch darum handelt, die Mannigfaltigkeiten (und zwar die zweiseitigen) nicht als solche, sondern mit Rücksicht auf einen ihnen beigelegten Sinn zu betrachten, kommt die Wahl des Sinnes der das Schema konstituierenden Flächenstücke zur Geltung. Wir kommen hierauf in § 4 zu sprechen.

[2]) Im Falle $n = 1$ hat man einen Teilungspunkt auf dem Kreisumfang, der gleichzeitig Anfangspunkt A_{11} und Endpunkt A_{12} der einzigen Seite s_1 ist.

die Gleichungen (1) und die Zuordnungsrelationen (2) alternierend aneinanderreiht, erhält man eine Gruppierung aller Relationen (1) und (2) in Reihen von folgender Art

$$\ldots A_{h-1,2} = A_{h1} \text{ zugeordnet } A_{k2} = A_{k+1,1} \text{ zug.} \ldots,$$

und diese Reihen sind nach links und rechts soweit fortzusetzen, bis dieselben Relationen periodisch wiederkehren oder bis die Reihe von selbst abbricht. Das letztere tritt offenbar bei den Endpunkten der freien Seiten ein. Im besonderen wird eine Ecke, die zwischen zwei aneinander stoßenden freien Seiten, etwa s_{i-1} und s_i liegt, zu einer aus der einzigen Gleichung

$$A_{i-1,2} = A_{i,1}$$

bestehenden Relationenreihe Veranlassung geben. Alle in einer Reihe vorkommenden Ecken mögen als ein Zyklus zugeordneter Ecken und zwar als ein geschlossener oder ein offener Zyklus bezeichnet werden, je nachdem die betreffende Relationenreihe periodisch ist oder abbricht.

Ein System von Vorschriften, das in der besprochenen Art bei einem Kreis mit in n Teile geteilter Peripherie Zuordnungen zwischen den Seiten und Ecken festlegt, stellt den einfachsten Fall eines Schema einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit dar.

Wieso ein solches Schema als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit definierend angesehen werden kann, wird am einfachsten unter Hinweis auf die entsprechenden Verhältnisse bei den Fundamentalbereichen automorpher Funktionen erläutert. Greifen wir etwa den speziellen Fall eines Kreisbogenpolygons mit $4p$ Seiten heraus, wobei je zwei gegenüberliegende Seiten durch eine lineare Substitution ineinander übergeführt werden. Bei dieser Art der Seitenzuordnung bilden die $4p$ Ecken einen einzigen geschlossenen Zyklus. Für die durch den Fundamentalbereich und die Gesamtheit der auf demselben existierenden automorphen Funktionen definierte algebraische Mannigfaltigkeit stellen nun je zwei Punkte auf einander zugeordneten Seiten, die vermöge der zugehörigen linearen Substitution einander entsprechen, einen einzigen Punkt der Mannigfaltigkeit dar und in gleicher Weise repräsentieren alle $4p$ Ecken nur einen Punkt. Ganz analog hiemit ist die Auffassungsweise, der gemäß man ein Schema von der Art, die wir beschrieben haben, als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit bestimmend ansehen kann. Man denke sich nämlich eine eineindeutige stetige Beziehung zwischen den Punkten je zweier einander zugeordneter Seiten — unter Beachtung der Richtungen — hergestellt und fasse derart aufeinander bezogene Punkte definitionsmäßig als einen Punkt der Mannigfaltigkeit auf. Es werden demzufolge auch alle einem Zyklus zugeordneter Ecken angehörenden Ecken einen einzigen Punkt der Mannigfaltigkeit darstellen. In der so definierten Mannigfaltigkeit stellen dann die Punkte, die auf jenen Seiten liegen, denen eine andere Seite zugeordnet ist, und ebenso jene Punkte, die durch einen geschlossenen Zyklus zugeordneter Ecken repräsentiert werden, Punkte vom gleichen Charakter dar, wie die Punkte im Innern des Kreises. Hingegen fügen sich die freien Seiten in den durch offene Zyklen zugeordneter Ecken repräsentierten Punkten zu (geschlossenen) Randlinien der Mannifaltigkeit zusammen.

Zu dem eben entwickelten Verfahren, aus einem Schema eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit abzuleiten, sei folgendes bemerkt. Die bloße Forderung, zwischen den Punkten je zweier einander zugeordneter Seiten eine umkehrbar eindeutige stetige Beziehung festzulegen, läßt noch eine große Willkür offen, abgesehen davon, dass die spezielle Lage der n Teilungspunkte auf der Kreisperipherie beliebig gewählt werden kann, da in dem Schema nur die Zahl n und die Reihenfolge der Seiten zum Ausdruck kommen. Es fallen aber offenbar, wie immer man diese willkürlich gelassenen Verhältnisse bestimmt, alle so erhaltenen Punktmannigfaltigkeiten untereinander homöomorph aus; die besprochene Unbestimmtheit ist also ohne Belang. Es wäre gleichfalls eine unwesentliche Abänderung, die nur dazu führt, eine Punktmannigfaltigkeit durch eine ihr homöomorphe zu ersetzen, wenn man unter Beibehaltung aller übrigen auf das Schema bezüglichen Festsetzungen im Falle $n > 2$ statt eines Kreises mit in n Teile geteiltem Umfang ein gewöhnliches geradliniges ebenes Polygon mit n Seiten nähme. Wir werden auch gelegentlich statt „Kreis mit in n Teile geteiltem Umfang" kurzweg „Polygon" sagen, ohne dabei jedoch die Beschränkung $n > 2$ aufrecht zu erhalten.

Eine zweidimensionale in der eben auseinandergesetzten Weise durch ein Schema definierte Mannigfaltigkeit möge, wenn in dem Schema bei allen Seitenpaaren die Zuordnung der Richtungen von der ersten Art ist, zweiseitig, andernfalls einseitig heißen.[3])

---

[3]) Man vergleiche hiezu Poincaré, Compl. 5, pag. 52, 53. Poincaré hat in seinen Arbeiten auf die älteren und kürzeren Bezeichnungen „zweiseitig", „einseitig" (bilatère, unilatère) zurückgegriffen. Doch ist zu beachten, daß diese Ausdrücke an eine Lagenbeziehung der zweidimensionalen (n-dimensionalen) Mannigfaltigkeit zu einem dreidimensionalen (($n+1$)-dimensionalen) Raum, in dem gelegen sie vorgestellt werden, anspielen, während sie keine derartigen zu einer gewissen Lagerung relativen, sondern der Mannigfaltigkeit selbst inhärente, absolute Eigenschaften ausdrücken. Hierauf hat Klein (Math. Ann. 9, S. 479) hingewiesen und Dyck (Math. Ann. 32, S. 473) mit Rücksicht hierauf statt zweiseitig und einseitig die Bezeichnungen „mit nicht umkehrbarer Indikatrix" und „mit umkehrbarer Indikatrix" verwendet. Unter einer Indikatrix einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit V ist dabei eine um einen Innenpunkt A von V gezogene kleine geschlossene Linie, auf der drei Punkte markiert und mit 1, 2, 3 bezeichnet sind, z. B. ein kleines Dreieck oder ein Kreis mit drei markierten Punkten, zu verstehen. Führt man nun längs eines Weges in V, der von A nach A zurückführt, diese geschlossene Linie mit, so daß sie stets genügend klein bleibt und eine Indikatrix um einen Punkt des Weges darstellt und bringt man sie, in A angelangt, mit ihrer Anfangslage so zur Deckung, daß die drei markierten Punkte mit den markierten Punkten in der Anfangslage, und zwar 1 mit 1, zusammenfallen, so können die Punkte 2, 3 in der neuen Lage entweder mit den Anfangs-

Wir wollen noch etwas allgemeinere zweidimensionale Mannigfaltigkeiten in Betracht ziehen, indem wir den Fall zulassen, daß das definierende Schema außer den besprochenen Zuordnungsvorschriften noch Verfügungen enthält, denen zufolge gewisse durch geschlossene Zyklen zugeordneter Ecken repräsentierte Punkte von der Mannigfaltigkeit auszunehmen sind. In einem solchen Falle ist außer durch etwaige Randlinien noch durch eine endliche Anzahl im Innern gelegener und von der Mannigfaltigkeit ausgeschlossener Punkte eine Berandung der Mannigfaltigkeit hergestellt.[4] Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit soll g e s c h l o s s e n heißen, wenn ihr Schema so beschaffen ist, daß weder durch Vorschriften der genannten Art Punkte von der Mannigfaltigkeit ausgenommen, noch freie Seiten vorhanden sind.[5])

Von dem im vorstehenden beschriebenen speziellen Fall eines Schema einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit unterscheidet sich der allgemeine Fall dadurch, daß statt eines Polygons eine endliche Anzahl von Polygonen (Kreise mit in eine endliche Anzahl von Teilen, den Seiten, geteilten Peripherien) zugrunde gelegt wird. Es werden dann wieder gewisse aus der Gesamtheit aller Seiten herausgegriffene Seiten zu je zweien einander zugeordnet, derart, daß auch über die einander entsprechenden Richtungen verfügt wird. Hieraus ergeben sich ganz wie im Falle eines einzigen Polygons die Zyklen zugeordneter Ecken. Auch Verfügungen, durch welche gewisse durch geschlossene Zyklen zugeordneter Ecken repräsentierte Punkte von der Mannigfaltigkeit ausgeschlossen werden, soll das Schema enthalten dürfen. Was in dem Falle, daß das Schema nur ein einziges Polygon umfaßt, über die Art, wie durch dasselbe eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit definiert wird, gesagt wurde, überträgt sich, ebenso wie die Definition der g e s c h l o s s e n e n Mannigfaltigkeiten, ohneweiters auf den allgemeinen Fall. Im Falle mehrerer Polygone nenne man zwei verschiedene Polygone direkt zusammenhängend, wenn eine Seite des einen einer Seite des anderen zugeordnet ist, indirekt zusammenhängend, wenn die beiden Polygone Anfangs- und Endglied einer Folge von Polygonen sind, deren jedes mit dem vorhergehenden direkt zusammenhängend

---

lagen von 2, 3 oder von 3, 2 zur Deckung kommen. Dementsprechend sind die Wege in V in solche, auf denen sich „die Indikatrix nicht umkehrt" und solche, auf denen sie sich umkehrt, zu unterscheiden. Die zweiseitigen Mannigfaltigkeiten sind nun gerade dadurch charakterisiert, daß Wege von der zweiten Art in ihnen nicht vorkommen.

[4]) Die $(n-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mögen nach P o i n c a r é (An. Sit. p. 6) als e i g e n t l i c h e R a n d m a n n i g f a l t i g k e i t e n (véritables variétés frontières) von den übrigen unterschieden werden. Die genannten Punkte stellen sonach uneigentliche Randmannigfaltigkeiten der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit dar. Bezüglich der auf den eigentlichen Randmannigfaltigkeiten gelegenen Punkte möge festgesetzt werden, daß sie zur Mannigfaltigkeit hinzuzurechnen sind.

[5]) Hierin liegt eine leichte Abweichung von der von P o i n c a r é getroffenen Festsetzung (vgl. An. Sit. pag. 7), derzufolge bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten uneigentliche Randmannigfaltigkeiten auftreten dürfen. Vgl. § 15, Anm. 9.

ist. Falls in einem Schema irgend zwei beliebige Polygone entweder direkt oder indirekt zusammenhängend sind, soll das Schema selbst und auch die durch dasselbe definierte Mannigfaltigkeit zusammenhängend genannt werden. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit werde als zweiseitig bezeichnet, wenn man in jedem Polygon einen Umkreisungssinn derart festsetzen kann, daß alle Seitenzuordnungen zu solchen erster Art werden; ist das nicht möglich, so heiße die Mannigfaltigkeit einseitig.

Die dem Schema einer Mannigfaltigkeit angehörenden Polygone sollen als die Flächenstücke des Schema, ihre Anzahl mit α_2 bezeichnet werden. Unter einer Kante des Schema soll entweder eine freie Seite oder ein Paar zugeordneter Seiten, unter einer Ecke des Schema ein Zyklus zugeordneter Polygonecken verstanden werden. α_1 sei die Anzahl der Kanten, α_0 die der Ecken des Schema. Ein Schema mit einem einzigen Flächenstück, wie wir es zuerst betrachtet haben, soll auch als Fundamentalpolygon der Mannigfaltigkeit bezeichnet werden.

Im Vorangehenden ist die Determinierung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit durch ein „Schema“ oder wie man auch sagen könnte, durch ein „System von Flächenstücken“[6]) erläutert. Nunmehr werde jene Beziehung zweier Schemata zueinander definiert, die als Homöomorphie derselben bezeichnet werden soll. Hiezu sind gewisse, „Unterteilungen“ benannte Abänderungen der Schemata zu besprechen, u. zw. zunächst die „elementaren Unterteilungen“, deren man bei einem zweidimensionalen Schema zwei Arten unterscheidet:

1) Man nehme auf einer Seite eines der Polygone des ursprünglichen Schema einen neuen Theilungspunkt an (indem man sie etwa halbiert), wodurch dieselbe in zwei Seiten zerlegt wird. Falls der zerlegten Seite im ursprünglichen Schema eine andere Polygonseite zugeordnet ist, so halbiere man auch diese und ordne den beiden Seitenhälften der einen Seite die der andern derart zu, dass die zwischen den ursprünglichen Ecken bestehenden Zuordnungen ungestört erhalten bleiben und die beiden Halbierungspunkte einander zugeordnet werden. Die beiden Halbierungspunkte bilden dann im neuen Schema einen zweigliedrigen geschlossenen Zyklus zugeordneter Ecken.

2) Einen der Kreise (Polygone) zerlege man durch die Verbindungssehne irgend zweier Ecken in zwei Segmente, deren jedes man wieder in die Gestalt eines Kreises deformieren kann. Man erhält so statt eines Polygones zwei Polygone. Die beiden aus der Verbindungssehne hervorgegangenen neuen Seiten ordne man einander zu, u. zw. in solcher Art, daß die vor der Zerlegung einander deckenden Ecken einander entsprechen. Die zwischen den ursprünglich vorhandenen Seiten bestehenden Zuordnungen behalte man unverändert bei.

---

[6]) Bei Poincaré „polyèdre“ genannt (An. Sit., p. 101).

Diese beiden Arten elementarer Unterteilungen eines zweidimensionalen Schema lassen sich kurz als Zerlegung einer Kante in zwei Kanten, bezw. eines Flächenstückes in zwei Flächenstücke charakterisieren. Allgemein werde nun unter Unterteilung eine solche Abänderung eines Schema verstanden, die sich aus einer Reihe sukzessiver elementarer Unterteilungen zusammensetzen lässt. Das aus einer Unterteilung resultierende Schema werde als unterteiltes oder als abgeleitetes Schema bezeichnet [7]).

Zwei Schemata sollen homöomorph genannt werden, wenn sie ein gemeinsames abgeleitetes Schema haben, wenn sie also die Eigenschaft haben, daß man durch Unterteilung aus dem einen Schema ein Schema gewinnen kann, das sich auch aus dem zweiten Schema durch Unterteilung erhalten läßt. Zwei demselben Schema homöomorphe Schemata sind untereinander homöomorph. [8]) Die Schemata zerfallen also in Klassen untereinander homöomorpher und es ist leicht zu sehen, daß die Eigenschaften eines Schema, im Sinne der oben gegebenen Definitionen eine geschlossene, eine zwei- oder einseitige, eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit zu determinieren, allen Schematen einer und derselben Klasse homöomorpher Schemata gemeinsam zukommen oder fehlen.

Doch bedarf, da dem Ausdruck „homöomorph" in Bezug auf Mannigfaltigkeiten bereits eine ganz bestimmte Bedeutung beigelegt wurde, die eben gegebene Definition der Homöomorphie der Schemata einer erläuternden Bemerkung. Es wurden oben zwei Mannigfaltigkeiten homöomorph genannt, wenn sie sich umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander beziehen lassen. Es ist nun ersichtlich, dass zwei durch homöomorphe Schemata definierte Mannigfaltigkeiten selbst, — im Sinn der eineindeutigen stetigen Beziehbarkeit, — homöomorph sind, da dies offenbar von zwei Mannigfaltigkeiten gilt, bei welchen das definierende Schema der einen Mannigfaltigkeit durch eine elementare Unterteilung aus dem der andern ableitbar ist. Daß auch die Umkehrung gilt und also, wenn zwei durch Schemata definierte Mannigfaltigkeiten punktweise eineindeutig stetig aufeinander bezogen werden können, dann die definierenden Schemata stets homöomorph sind d. h. ein gemeinsames abgeleitetes Schema besitzen, lässt sich u. zw. durch sehr einfache Betrachtungen wahrscheinlich machen. Man denkt sich nämlich in den Polygonen des definierenden Schema der einen Mannigfaltigkeit jene Linien gezogen, die vermöge der eineindeutigen stetigen Beziehung der beiden Mannigfaltigkeiten den Kanten des anderen Schema entsprechen. Hieraus kann man unter der Annahme, daß jedes der Polygone durch diese Linien nur in eine endliche Anzahl von Stücken zerlegt wird, eine Unterteilung des ursprünglichen Schema ablesen. Das Gleiche gilt dann für das Schema der anderen Mannigfaltigkeit, wenn man in den Polygonen dessel-

---

[7]) Bei Poincaré: „polyèdre dérivé" (An. Sit. p. 101).
[8]) Dieser Satz bildet den Gegenstand des § 19.

ben die entsprechende Konstruktion durchführt und die beiden auf diese Art aus den gegebenen Schematen abgeleiteten Schemata stimmen offenbar überein, d. h. die beiden gegebenen Schemata sind homöomorph. Da aber die bei diesen Betrachtungen gemachte Annahme [9]) keineswegs stets erfüllt zu sein braucht, so bedarf der Beweis des erörterten Umkehrungssatzes noch einer gewissen Vervollständigung, die, mag sie auch im vorliegenden Falle von zwei Dimensionen relativ einfach sein, jedenfalls im allgemeinen Fall von mehr Dimensionen (vgl. d. Anm.) einer eingehenden Erledigung harrt.

Hieran ist folgende Bemerkung anzuknüpfen. Gesetzt man hätte ein Verfahren gefunden, aus einem Schema gewisse eine Eigenschaft des Schema repräsentierende Bestimmungsstücke, z. B. eine Zahlenreihe, abzuleiten, von der Art, daß diese Zahlenreihe für irgend zwei einander homöomorphe Schemata dieselbe ist. Von dieser Zahlenreihe als von einer topologischen Invariante zu sprechen, ist nur dann berechtigt, wenn durch nicht homöomorphe Schemata niemals homöomorphe Mannigfaltigkeiten definiert sein können, also unter der Annahme, der Beweis des in Frage stehenden Satzes wäre in allen Punkten erledigt. Gleichwohl soll der Ausdruck „topologische Invariante“ beibehalten werden, doch soll in einem solchen Fall von topologischen Invarianten der Schemata zum Unterschied von topologischen Invarianten der Mannigfaltigkeiten gesprochen werden. Doch haben nur mit Hilfe des Begriffes der Homöomorphie der S c h e m a t a abgeleitete Sätze, die also nur mit einem gewissen Vorbehalt auf Punktmannigfaltigkeiten anwendbar sind, natürlich in einer rein kombinatorisch entwickelten Analysis Situs ihre selbständige Bedeutung. Die Auffassung, der eine derartige Entwicklung entspricht, wurde bereits in der Einleitung erwähnt. Daß die Schemata tatsächlich ein kombinatorisches Gepräge tragen, erkennt man sofort, wenn man jene Bestimmungstücke betrachtet, durch deren Angabe ein Schema festgelegt ist (also bei einem Schema einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit: die Reihenfolge der Seiten in den einzelnen Polygonen und die Zuordnungsvorschriften). Es interveniert nicht der Begriff des Zahlenkontinuums oder funktionelle Beziehungen zwischen reellen Zahlen. Ein Gleiches wird, wie man sich leicht überzeugen kann, für die Schemata von drei- und mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten gelten.

[9]) Wenn diese Annahme, die besagt, daß in der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, die sowohl durch das eine wie durch das andere Schema definiert wird, die beiden Kantensysteme der beiden Schemata sich nur in einer endlichen Anzahl von Punkten schneiden, nicht erfüllt ist, so werden gewisse Polygone in unendlich viele Stücke zerlegt werden. Noch kompliziertere Verhältnisse können bei Schematen homöomorpher dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten vorliegen, wo gewisse Zellen des einen Schema durch die Lamellen des anderen Schema in unendlich viele Stücke zerlegt werden können, unter denen sich auch solche von unendlich hohem Zusammenhang (denen eine endliche Bettische Zahl P_1 nicht zukommt) finden können. Auch versagen die Überlegungen des Textes, wenn es sich um mehr als zweidimensionale Mannigfaltigkeiten mit uneigentlichen Randmannigfaltigkeiten handelt. (Siehe § 15, Anm. 5.)

Es mögen noch für die Schemata zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten [10]) anschließend an die Definition der Homöomorphie ein paar Definitionen eingeführt werden.

Ein zweidimensionales Schema soll einfach zusammenhängend heißen, wenn es einem der beiden im folgenden beschriebenen, mit ε_2 und σ_2 bezeichneten Schemata homöomorph ist.

Mit ε_2 werde jenes Schema bezeichnet, das von einem einzigen Polygon mit zwei Seiten gebildet wird, wobei zwischen den Seiten keine Zuordnung bestehen soll. Das Schema σ_2 bestehe aus zwei Polygonen, jedes mit zwei Seiten, wobei je einer Seite des einen Polygons eine Seite des anderen Polygons nach der ersten Art zugeordnet sei. Ein mit ε_2, bezw. σ_2 homöomorphes Schema soll ein einfach zusammenhängendes berandetes, bezw. ein einfach zusammenhängendes geschlossenes zweidimensionales Schema heißen [11]).

Die durch σ_2 definierte oder eine derselben homöomorphe Mannigfaltigkeit werde als sphärische zweidimensionale Mannigfaltigkeit bezeichnet. Diese Mannigfaltigkeiten sind offenbar der Kugelfläche homöomorph. Die durch ε_2 definierte oder eine derselben homöomorphe Mannigfaltigkeit möge als zweidimensionale Elementarmannigfaltigkeit bezeichnet werden.

Betrachtet man die Schemata, die einem vorgelegten Schema einer geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit homöomorph sind, so ist unter denselben eines, das sogenannte reziproke Schema [12]) besonders bemerkenswert. Die Bedeutung desselben erhellt sofort, wenn man sich der Vorstellung bedient, die einzelnen Polygone des vorgelegten Schema seien, — etwa mittelst geeigneter Deformationen [13]) — längs der einander zugeordneten Seiten zu einer

[10]) Wir werden im Folgenden der Bequemlichkeit halber bisweilen statt „ein Schema einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit" kurz „ein zweidimensionales Schema" und analog ein „n-dimensionales Schema" sagen. Dem Schema selbst das Beiwort zweidimensional beizufügen, mag darin seine Rechtfertigung finden, daß mit Rücksicht auf die vorstehenden Bemerkungen den Schematen unabhängig von den durch sie definierten Punktmannigfaltigkeiten eine selbständige Bedeutung beigemessen werden kann.

[11]) Als Repräsentanten der mit ε_2 homöomorphen Schemata hätte man statt ε_2 irgend ein Schema, bestehend aus einem einzigen Polygon mit einer beliebigen Seitenzahl, z. B. mit einer einzigen Seite, zwischen dessen Seiten gar keine Zuordnungen bestehen, und als Repräsentanten der mit σ_2 homöomorphen Schemata statt σ_2 einfacher jenes Schema wählen können, das aus einem einzigen Polygon mit zwei Seiten besteht, die einander nach der ersten Art zugeordnet sind. Daß gerade die Schemata ε_2, σ_2 herausgegriffen wurden, geschah, um mit der in § 4 gegebenen Erklärung der einfach zusammenhängenden n-dimensionalen Schemata ε_n, σ_n in Einklang zu sein.

[12]) Poincaré, Compl. 1, § 7. („polyèdre reciproque").

[13]) Um die wirkliche Durchführbarkeit einer solchen Deformation kümmern wir uns hier nicht. Es ist eine Frage für sich, wie groß die kleinstmögliche Anzahl $\psi(n)$ bezw. $\psi^*(n)$ der Dimensionen eines ebenen Raumes ist, in welchem es zu jeder geschlossenen bezw. geschlossenen zweiseitigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine homöomorphe sich selbst nicht durchdringende Mannigfaltigkeit gibt. Es ist $\psi^*(2) = 3$, während es dahingestellt ist, ob, wie Poincaré annimmt (An. Sit. § 10 und § 11. p. 56), $\psi^*(3) = 4$ ist.

geschlossenen Fläche aneinander gefügt. Durch die Kanten des Schema wird dann auf der Fläche eine, dieselbe in Polygone zerlegende Netzfigur gebildet. Man ziehe zu dieser Netzfigur die polar entsprechende, indem man im Innern jedes Polygons einen Punkt annimmt, und jede Kante k der gegebenen Figur durch eine Kante $\overline{k}$ der neuen Figur schneidet, wobei $\overline{k}$ die im Innern jener Polygone angenommenen Punkte verbindet, an welche k grenzt. Somit entspricht jeder Ecke, jeder Kante, jedem Flächenstück der angegebenen Figur, bezw. ein Flächenstück, eine Kante, eine Ecke der Polarfigur. Zerschneidet man die Fläche längs der Kanten der neuen Netzfigur, so erhält man die Polygone des gesuchten reziproken Schema.

Dies die anschauliche Bedeutung des reciproken Schema. Derselben entspricht die folgende Methode, zu einem gegebenen Schema das reziproke zu bilden, eine Methode, die der mehr abstrakten Art, in der zu Beginn dieses Paragraphen die Schemata definiert wurden, angepaßt ist: Man läßt jedem Zyklus γ_i zugeordneter Ecken des gegebenen Schema ein Polygon π_i des neuen Schema entsprechen, u. zw. ein Polygon mit soviel Ecken, als der Zyklus Polygonecken umfasst. Wenn nun (unter Verwendung der früher erklärten Bezeichnungen)

$$\ldots A_{h-1,2} = A_{h1} \text{ zug. } A_{k2} = A_{k+1,1} \text{ zug.} \ldots,$$

jene Relationenreihe bedeutet, die den Zyklus γ_i erzeugt, so mögen die Ecken des Polygons π_i der Reihe nach mit der doppelten Bezeichnung $B_{h-1,2} = B_{h1}, B_{k2} = B_{k+1,1}, \ldots$ versehen werden. Der Seite $B_{h1} B_{k2}$ des Polygons π_i werde nun eine der Bezeichnungen t_h, t_k, z. B. t_h beigelegt. Die Seite $B_{h2} B_{k1}$, die entweder dem Polygon π_i oder einem anderen Polygon des neuen Schema angehören kann, werde dann t_k benannt. Die Zuordnungsvorschrift des neuen Schema verfüge nun, daß der Seite t_h die Seite t_k derart zugeordnet wird, daß die Ecken B_{h1}, B_{h2} und ebenso die Ecken B_{k1}, B_{k2} einander entsprechen. Damit ist das neue, das zu dem vorgelegten reziproke Schema vollständig gegeben.

Das dem reziproken Schema reziproke ist offenbar das ursprüngliche Schema. Der Beweis dafür, daß zwei zu einander reziproke Schemata homöomorph sind, kann füglich unterdrückt werden, da der Beweisgang unmittelbar evident ist, wenn man sich die anschauliche Bedeutung des reziproken Schema vor Augen hält.

§. 3.

Die Schemata dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Um die Schemata dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten zu erläutern und auf dieselben die verschiedenen bezüglich zweidimensionaler Schemata erklärten Begriffe zu übertragen, beginnen wir wieder mit einem speziellen Fall.

Gegeben sei eine Kugel, deren Oberfläche durch eine endliche Anzahl auf derselben verlaufender Linienstücke in eine endliche Anzahl einfach zusammenhängender Polygone eingeteilt sei.

Wir fügen hieran sofort einige erläuternde Bemerkungen. Unter einem Linienstück soll hier eine auf die Punkte einer geraden Strecke umkehrbar eindeutig und stetig abbildbare Punktmenge verstanden werden, und unter den einfach zusammenhängenden Polygonen Punktmengen auf der Kugelfläche, deren Punkte eineindeutig stetig auf die Punkte einer Kreisfläche bezogen werden können, so daß dabei die Randpunkte der Menge (Häufungspunkte sowohl von Punkten der Menge als von anderen Punkten der Kugelfläche) eineindeutig stetig auf die Punkte der Kreisperipherie abgebildet werden. Die Polygone stellen also zweidimensionale Elementarmannigfaltigkeiten (siehe § 2) dar. Die auf der Kugelfläche gezogenen Linienstücke sollen Kanten der Polygoneinteilung, die Punkte in denen eine oder mehrere Kanten endigen, sollen Ecken der Polygoneinteilung genannt werden. Die Polygone auf der Kugelfläche stellen offenbar, wenn wir jede Kante als ein Paar zugeordneter Seiten ansehen, ein die sphärische zweidimensionale Mannigfaltigkeit definierendes Schema Σ vor. Auf Grund des oberwähnten, vorläufig als hypothetisch anzusehenden Satzes folgt hieraus bereits, daß das Schema Σ dem Schema σ_2 (siehe § 2) homöomorph ist. Jedenfalls soll diese Eigenschaft von dem Schema Σ vorausgesetzt werden.

Von den Polygonen, in die die Kugefläche zerlegt ist, seien gewisse zu je zweien einander zugeordnet. Dabei mögen nur solche einander zugeordnet sein, die gleich viele Seiten haben. Es sei nun in jedem Polygon als positiver Umlaufssinn derjenige bezeichnet, bei welchem das Polygon auf einer bestimmten für alle Polygone gleichbleibenden Seite, etwa für einen außerhalb der Kugel befindlichen Betrachter zur Linken, gelassen wird, und der entgegengesetzte als negativer Umlaufssinn. Dadurch erhält auch jede Seite eines Polygons in bezug auf dasselbe eine bestimmte positive Richtung.[1]) Die Zuordnungsvorschrift der Polygone soll nun auch bei jedem Paar zugeordneter Polygone die Verfügung darüber enthalten, ob dem positiven Umlaufssinn des einen Polygons der negative oder der positive Umlaufssinn des anderen entsprechen soll. (Zuordnungen der ersten und der zweiten Art.) Ferner sollen auch die Seiten des einen Polygons denen des anderen zugeordnet sein, und zwar sollen bei einer Polygonzuordnung der ersten (zweiten) Art den Seiten des einen Polygons, genommen in einer Reihenfolge, die einen positiven Umlauf des Polygons darstellt, die Seiten des anderen Polygons in einer Reihenfolge entsprechen, die einem negativen (positiven) Umlauf um dieses zweite Polygon

[1]) Es kann der Fall vorkommen, daß ein Polygon längs einer Kante der Polygoneinteilung an sich selbst stößt. Eine solche Kante repräsentiert natürlich zwei Seiten des Polygons, deren positive Richtungen bezüglich desselben einander entgegengesetzt sind.

gleichkommt,[2]) und es sollen hiebei den positiven Richtungen der Seiten des einen Polygons die negativen (positiven) Richtungen der des anderen zugeordnet sein. Eine solche Seitenzuordnung selbst soll dann übereinstimmend mit der sie erzeugenden Polygonzuordnung von der ersten, bezw. von der zweiten Art heißen.

Dem Umstand ensprechend, daß auf der Kugeloberfläche jede Kante der Polygoneinteilung in doppelter Weise als Polygonseite auftritt, lassen sich nun Zykeln zugeordneter Kanten aufstellen, in vollständiger Analogie mit der Bildungsweise der Zykeln zugeordneter Ecken bei einem zweidimensionalen Schema. Die Zykeln zugeordneter Kanten können geschlossen oder offen sein. Offene Zykeln können nur auftreten, wenn es freie Polygone gibt, d. h. solche, die keinem anderen Polygon zugeordnet sind.

Es möge ferner auf jeder einzelnen Kante der Polygoneinteilung selbst eine bestimmte Richtung als positive bezeichnet sein.[3]) (Diese ist mit den früher erklärten Richtungen der Polygonseiten nicht zu verwechseln und fällt natürlich auf der einen der beiden von der Kante gebildeten Seiten mit der positiven auf der anderen mit der negativen Richtung zusammen.) Es soll nun stets die Bedingung[4]) als erfüllt vorausgesetzt werden, daß bei jedem geschlossenen Zykel zugeordneter Kanten unter den Seitenzuordnungen der Polygonseiten, durch die derselbe zu stande kommt, die Anzahl der vorkommenden Zuordnungen zweiter Art gerade ist, und es kann dann aus der Zuordnung der Richtungen der Polygonseiten auch für die einem Zyklus zugeordneter Kanten angehörenden Kanten eine bestimmte Zuordnung ihrer Richtungen abgelesen werden.

Analog wie bei einem zweidimensionalen Schema aus der Zuordnung der Polygonseiten solche der Polygonecken, so lassen sich hier aus der Zuordnung der Kanten und ihrer Richtungen Zuordnungen der Ecken der Polygoneinteilung ablesen. Auf dem Umstand, daß eine Ecke im allgemeinen in mehrfacher Weise als Kantenendpunkt figuriert, beruht die Bildung von Systemen zugeordneter Ecken der Polygoneinteilung.

Eine weitere einem dreidimensionalen Schema aufzuerlegende Bedingung[5]) betrifft gewisse zweidimensionale Schemata, die sich aus den vorstehend erörterten Zuordnungsvorschriften ableiten lassen. Hiezu denken wir uns auf der Kugelfläche um jede Ecke der

---

[2]) Diese Bedingung hat nur für Polygone von mehr als zwei Seiten einen Inhalt.

[3]) Die Wahl dieser Richtung stellt ebenso wie die des positiven Umlaufssinnes der Polygone auf der Kugelfläche nicht ein wesentliches Merkmal des dreidimensionalen Schemas, sondern ein bloßes Hilfsmittel zur Beschreibung der Zuordnungsverfügungen vor.

[4]) Diese Bedingung stellt einen speziellen Fall einer in § 4 bei Besprechung der n-dimensionalen Schemata erwähnten Bedingung vor, die darauf hinaus kommt, daß Zuordnungen zwischen den betrachteten geometrischen Figuren (hier: den Kanten) stets so beschaffen sein sollen, daß aus denselben eine bestimmte Zuordnung ihrer Randelemente (hier: der Kantenendpunkte) abgeleitet werden kann.

[5]) Vgl. hierüber Poincaré, An. Sit. p. 52—55.

Polygoneinteilung einen kleinen Kreis beschrieben. Diese Kreise zerfallen durch die Schnittpunkte mit den in der betreffenden Ecke endigenden Kanten der Polygoneinteilung in eine Anzahl Seiten. Als positive Richtung dieser Seiten bezeichnen wir jene, die einem positiven (die Ecke zur Linken lassenden) Umlauf um die Ecke entspricht. Seien nun π_1, π_2 zwei einander zugeordnete Polygone, A_1 eine Ecke von π_1, A_2 die ihr zugeordnete Ecke von π_2. Der Bogen des um A_1, als Ecke der Polygoneinteilung gezogenen kleinen Kreises, der in π_1, und zwar im Winkelraum von A_1 verläuft, heiße s_1, der in entsprechender Weise in π_2 verlaufende Bogen des um A_2 gezogenen Kreises heiße s_2. Die Seiten s_1 und s_2 sollen nun einander zugeordnet werden, und zwar, wenn die Zuordnung der Polygone π_1 und π_2 von der ersten (zweiten) Art ist, so soll der positiven Richtung von s_1 die negative (positive) Richtung von s_2 entsprechen. Die Gesamtheit der um die Ecken gezogenen kleinen Kreise stellt dann eine Anzahl von Polygonen dar, zwischen deren Seiten paarweise Zuordnungen bestehen, und liefert uns damit ein zweidimensionales Schema. Dasselbe zerfällt in so viele zusammenhängende Schemata, als es Systeme zugeordneter Ecken der Polygoneinteilung gibt.[6])

Die Bedingung nun, die von jedem Schema einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit als erfüllt vorausgesetzt werde, besteht darin, daß alle diese zusammenhängenden zweidimensionalen Schemata einfach zusammenhängend (geschlossen oder berandet) sind. Je nachdem ein solches Schema geschlossen oder berandet ist, möge das zugehörige System zugeordneter Ecken der Polygoneinteilung geschlossen oder offen heißen.

Inwiefern durch ein Schema, wie es vorstehend beschrieben ist, eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit definiert erscheint, ist in vollständiger Analogie mit dem Fall zweier Dimensionen. Es werden hiezu die Punkte einander zugeordneter Polygone eineindeutig stetig und unter Berücksichtigung des Sinnes und der Seitenzuordnung aufeinander bezogen, wobei nur den geschlossenen Zyklen zugeordneter Kanten der Polygoneinteilung in leicht ersichtlicher Weise Beachtung zu schenken ist.[7]) Derart aufeinander bezogene Punkte werden definitionsweise als ein Punkt der Mannigfaltigkeit aufgefaßt. Die im Innern der einander zugeordneten Polygone

---

[6]) Die durch eines dieser zusammenhängenden Schemata definierte Mannigfaltigkeit mag die *Umgebungsmannigfaltigkeit* der betreffenden „Ecke des dreimensionalen Schemas" (siehe zwei Seiten weiter im Text) genannt werden.

[7]) Aus der punktweisen Beziehung der Polygone aufeinander folgt nämlich eine Beziehung zwischen den Punkten je zweier im Zykel aufeinander folgender zugeordneter Kanten. Sind nun $k_1, k_2, \dots k_m$ die Kanten eines geschlossenen Zykels, so entspricht infolgedessen einem Punkte P_1 von k_1 ein bestimmter Punkt P_2 von k_2, diesem ein Punkt P_3 von k_3 u. s. f., schließlich dem Punkte P_m von k_m ein Punkt von k_1. Daß nun dieser Punkt gerade wieder der Punkt P_1 sei, ist die Bedingung, der die punktweisen Beziehungen zu genügen haben. Die Erfüllbarkeit derselben ist durch die oben erwähnte Voraussetzung über die Zahl der Seitenzuordnungen zweiter Art gewährleistet.

liegenden Punkte haben dann denselben Charakter wie die im Innern der Kugel liegenden Punkte der Mannigfaltigkeit, d. h. sie können durch eine geeignet gewählte eineindeutige und umkehrbar stetige Beziehung der Mannigfaltigkeit auf sich selbst auf einen im Innern der Kugel gelegenen Punkt abgebildet werden und das gleiche gilt für die Punkte, die auf einer einem geschlossenen Zyklus angehörenden Kante der Polygonteilung liegen, und die durch ein geschlossenes System zugeordneter Ecken repräsentierten Punkte. Hiefür ist bei den letzteren die eben besprochene Bedingung des einfachen Zusammenhanges der Umgebungsmannigfaltigkeiten, durch die also das Auftreten gewisser singulärer Punkte ausgeschlossen wird, wesentlich. Die freien Polygone fügen sich zu „Randflächen" der Mannigfaltigkeit aneinander, auf denen die durch offene Zykeln zugeordneter Kanten repräsentierten Linien und die durch offene Systeme von zugeordneten Ecken repräsentierten Punkte liegen. Die einzelnen Randflächen haben keine Punkte miteinander gemein, was wieder durch die Bedingung über die Umgebungsmannigfaltigkeiten gewährleistet ist.

Man überblickt sofort, daß ganz ebenso wie bei der Determinierung zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten durch Schemata die Willkürlichkeiten, die in diesem Verfahren, vom dreidimensionalen Schema zur dreidimensionalen Mannigfaltigkeit überzugehen, sowie auch darin liegen, daß durch das Schema Σ die Einteilung der Kugelfläche in Polygone keineswegs völlig bestimmt ist, von nur unwesentlichem Einflusse sind. Was in dem dreidimensionalen Schema allein zum Ausdruck kommt, nämlich das Schema Σ und die Zuordnungsvorschriften, ist also zur Determinierung einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ausreicheud.

Allgemeinere dreidimensionale Schemata als die eben betrachteten entstehen dadurch, daß man den Zuordnungsvorschriften der besprochenen Art noch Weisungen hinzufügt, denen gemäß gewisse durch geschlossene Systeme zugeordneter Ecken repräsentierte Punkte und gewisse durch geschlossene Zykeln zugeordneter Kanten repräsentierte Linienstücke von der Mannigfaltigkeit auszunehmen sind. Dabei ist insbesondere der Fall von Interesse, in welchem die von der Mannigfaltigkeit ausgeschlossenen Linienstücke sich zu geschlossenen Linien aneinanderschließen.

Aus dem vorstehend beschriebenen speziellen Fall eines dreidimensionalen Schemas erhält man den allgemeinen Fall, indem man statt einer Kugel eine endliche Anzahl von Kugeln, deren Oberflächen in Polygone geteilt sind, nimmt, und zwischen diesen Polygonen paarweise Zuordnungen festlegt. Auf diesen allgemeinen Fall überträgt sich ohne weiteres alles für den speziellen Gesagte.

Wenn die ein dreidimensionales Schema konstituierenden Vorschriften so beschaffen sind, daß weder freie Polygone vorkommen, noch Verfügungen bestehen, durch welche Punkte oder Linienstücke ausgeschieden werden, so heißt die durch das Schema definierte Mannigfaltigkeit *geschlossen*. Der Begriff *zusammenhängend* wird analog definiert, wie im Falle zweier Dimensionen. — Auf jeder einzelnen Kugel eines dreidimensionalen Schemas kann willkürlich für die auf derselben liegenden Polygone ein Umlaufssinn als positiver gewählt werden. Läßt sich in einem zusammenhängenden Schema für die einzelnen Kugeln diese Wahl so treffen, daß alle Polygonzuordnungen zu solchen von der ersten Art werden, so heißt die durch das Schema definierte Mannigfaltigkeit zweiseitig, andernfalls einseitig.[8])

Die einzelnen Kugeln sollen auch Zellen des dreidimensionalen Schemas genannt werden. Unter einer Lamelle[9]) des Schemas ist entweder ein freies Polygon oder ein Paar zugeordneter Polygone zu verstehen. Ein Zyklus zugeordneter Kanten der Polygoneinteilungen soll eine Kante des Schemas, ein System zugeordneter Ecken der Polygoneinteilungen eine Ecke des Schemas genannt werden. Mit α_3, α_2, α_1, α_0, sollen die Anzahlen der Zellen, der Lamellen, der Kanten, der Ecken eines Schemas bezeichnet werden.

Die Determinierung einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit durch ein Schema oder Zellsystem ist im vorstehenden auseinandergesetzt. Der Begriff der Homöomorphie der Schemata baut sich nun ganz wie im Falle von zwei Dimensionen auf den der elementaren Unterteilungen auf, von denen bei einem dreidimensionalen Schema drei Arten zu unterscheiden sind:

1. Man greife einen Zyklus zugeordneter Kanten des zu unterteilenden Schemas heraus, halbiere alle demselben angehörenden Kanten der Polygoneinteilungen und setze die Zuordnung der Kantenhälften entsprechend der unverändert beibehaltenen Zuordnung der Polygone derart fest, daß an Stelle eines Zykels zugeordneter Kanten in dem neuen Schema zwei Zyklen vorhanden sind und die Halbierungspunkte ein neues System zugeordneter Ecken bilden, während die anderen Systeme zugeordneter Ecken der Polygoneinteilung ungestört erhalten bleiben.[10])

---

[8]) Als Indikatrix (vgl. § 2, Anm. 3) einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit V kann man eine um einen Innenpunkt A von V gelegte Tetraederoberfläche, oder überhaupt eine einfach zusammenhängende geschlossene Fläche mit einer gleichartigen Einteilung in vier Dreiecke, wählen, wobei die vier Ecken des Tetraeders mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet sein sollen. Führt man die Indikatrix nun längs eines Weges von A nach A und bringt die Tetraederkanten und -ecken mit der alten Lage derselben so zur Deckung, daß 1 sowohl wie 2 in ihre alten Lagen kommen, so können 3, 4 entweder ihre alte Lage erhalten oder ihre Lage vertauscht haben. Die Wege in V unterscheiden sich demgemäß in solche, auf denen sich die Indikatrix nicht umkehrt, und solche, auf denen sie sich umkehrt.

In analoger Weise kann die Indikatrix für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten eingeführt werden.

[9]) Wir führen für die zweidimensionalen Elemente eines n-dimensionalen Schemas die Bezeichnung „Lamelle" ein, da das Wort „Flächenstück" in § 5 in anderer Bedeutung (nämlich zur Bezeichnung des Spezialfalles $m = 2$ des in einer Mannigfaltigkeit gelegenen Raumstückes) verwendet wird. Nur im Falle $n = 2$ (§ 2) wurde dem üblichen Sprachgebrauch zuliebe das Wort „Flächenstück" für die zweidimensionalen Elemente des Schemas beibehalten.

[10]) Falls der herausgegriffene Zyklus zugeordneter Kanten ein geschlossener ist und eine Vorschrift besteht, laut welcher das durch denselben repräsentierte

2. Man zerlege eines der auf einer der Kugelflächen liegenden Polygone in zwei Polygone durch eine zwei seiner Ecken verbindende neue Kante der Polygoneinteilung. Falls im ursprünglichen Schema dem zerlegten Polygon ein zweites Polygon zugeordnet ist, so zerlege man auch dieses durch eine neue die entsprechunden Ecken verbindende Kante und ordne nun den beiden Polygonhälften des ersten Polygons die des zweiten derart zu, daß die zwischen den urprünglichen Kanten und Ecken der Polygoneinteilung bestehenden Zuordnungen ungestört erhalten bleiben, während die beiden neuen Kanten der Polygoneinteilung einander zugeordnet werden. Die beiden neuen Kanten bilden dann für sich einen geschlossenen Zyklus zugeordneter Kanten.

3. Man wähle auf der Oberfläche einer der Kugeln des Schemas eine aus Kanten der Polygoneinteilung gebildete einfach geschlossene Linie und lege durch dieselbe eine die Kugel in zwei Stücke teilende einfach zusammenhängende Schnittfläche (z. B. die von den Radienvektoren nach den Punkten der geschlossenen Linie gebildete Fläche). Die Schnittfläche wird also als zweidimensionale Elementarmannigfaltigkeit vorausgesetzt und es werde angenommen, daß jedes der beiden Stücke wieder eineindeutig stetig auf eine Kugel K bezogen werden kann, so daß die auf der ursprünglichen Kugelfläche und auf der Trennungsfläche gelegenen Punkte dabei eineindeutig stetig auf die Oberflächenpunkte von K abgebildet werden. Die Oberfläche jedes der beiden Stücke, die demnach wieder als Kugeln angenommen werden können, besteht dann aus einem durch die Trennungsfläche entstandenen Polygon und im übrigen aus lauter bereits ursprünglich vorhanden gewesenen Polygonen. Die beiden neuen Polygone sollen dann einander so zugeordnet werden, daß die vor dem Trennungsschnitt sich deckenden Kanten und Ecken der Polygoneinteilung einander entsprechen. Die zwischen den ursprünglich vorhandenen Polygonen bestehenden Zuordnungen sind unverändert beizubehalten.

Diese elementaren Unterteilungen können als Zerlegung einer Kante oder einer Lamelle oder einer Zelle des dreidimensionalen Schemas in zwei Kanten, bezw. zwei Lamellen, zwei Zellen charakterisiert werden. Die Einführung der allgemeinen Unterteilung, des abgeleiteten Schemas und der Homöomorphie erfolgt nun so wie für zweidimensionale Schemata. Ebenso sind die an die Definition der Homöomorphie der Schemata geknüpften auf die Homöomorphie der Mannigfaltigkeiten sich beziehenden Bemerkungen auf den Fall von drei (und mehr) Dimensionen übertragbar.

Es werden ferner die berandeten, bezw. geschlossenen *einfach zusammenhängenden* dreidimensionalen Schemata eingeführt als diejenigen, die dem Schema ε_3, bezw. σ_3 homöomorph sind. Dabei besteht ε_3 aus einer einzigen Kugel, deren Oberfläche

Linienstück von der Mannigfaltigkeit auszunehmen ist, so ist diese Vorschrift auf die zwei neuen Zyklen zu übertragen.

durch den in zwei Bogen geteilten Äquator in zwei Halbkugelflächen geteilt ist, zwischen denen keine Zuordnung besteht. σ_3 besteht aus zwei Kugeln; jede derselben ist durch ihren in zwei Bogen geteilten Äquator — diese Bogen mögen auf der einen Kugel a_1, a_2, auf der anderen b_1, b_2 heißen — in zwei Polygone geteilt und die Polygone der einen Kugel sind denen der anderen Kugel nach der ersten Art und in solcher Weise zugeordnet, daß dabei jedesmal dem Bogen a_1 der Bogen b_1, dem Bogen a_2 der Bogen b_2 entspricht.[11]

Die durch σ_3 definierte oder eine derselben homöomorphe Mannigfaltigkeit werde als sphärische dreidimensionale Mannigfaltigkeit bezeichnet. Wir können dieselbe durch den Enklidischen Raum repräsentieren, wenn wir denselben durch Annahme eines einzigen unendlich fernen Punktes zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit machen. Die durch ε_3 definierte oder eine derselben homöomorphe Mannigfaltigkeit möge als dreidimensionale Elementarmannigfaltigkeit bezeichnet werden.

Das reziproke Schema zu dem Schema einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit wird durch ein Verfahren gewonnen, das man sich leicht zurechtlegt,[12] wenn man beachtet, daß die Beziehung, die im Falle dreier Dimensionen zwischen einem Schema und seinem reziproken besteht, eine ganz analoge ist, wie im Falle zweier Dimensionen, und zwar entspricht jeder Ecke, bezw. Kante, Lamelle, Zelle des einen Schemas eine Zelle, bezw. eine Lamelle, eine Kante, eine Ecke des anderen. Es werde noch bemerkt, daß jenes einfach zusammenhängende geschlossene zweidimensionale Schema, das durch die in Polygone eingeteilte Oberfläche einer Zelle Z des einen Schemas repräsentiert wird, nichts anderes ist, als das reziproke Schema zu dem Schema der Umgebungsmannigfaltigkeit (siehe § 3, Anm. 6) der der Zelle Z im anderen Schema entsprechenden Ecke. Es kommt hier also wieder die Bedingung des einfachen Zusammenhanges der Umgebungsmannigfaltigkeiten der Ecken zur Geltung.[13]

---

[11]) Statt σ_3 könnte man einfacher ein Schema mit einer einzigen Kugel nehmen, wobei der in eine nicht weiter in Betracht kommende Anzahl von Bogen geteilte Äquator die Kugeläche in zwei Polygone teilt, die nach der ersten Art und derart zugeordnet sind, daß dabei jeder Bogen des Äquators sich selbst entspricht (ein Schema $(l, 0)$, s. § 20). Statt ε_3 hätte man irgend ein Schema wählen können, bestehend aus einer einzigen Kugel mit einer beliebigen Einteilung in Polygone, zwischen denen gar keine Zuordnungen bestehen. Die im Text getroffene Wahl von ε_3, σ_3 ist wie früher die von ε_2, σ_2 durch die Rücksicht auf den allgemeinen Fall von ε_n, σ_n (§ 4) bestimmt. Man beachte, daß das durch die Polygoneinteilung der Kugeloberfläche von ε_3 dargestellte zweidimensionale Schema genau das Schema σ_2 ist.

[12]) Dasselbe kann um so mehr übergangen werden, als Poincaré die Bildungsweise des reziproken Schemas im Falle dreier Dimensionen ausführlich dargestellt hat (Compl. 1, § 7, p. 314—316).

[13]) Vgl. hiezu eine Bemerkung von Poincaré (Compl. 1, § 10, p. 336) über die dem „arithmetischen" Beweise zu Grunde liegenden Voraussetzungen.

§ 4.
Über Schemata beliebiger Dimension. Der Sinn von Zellen und zweiseitigen Mannigfaltigkeiten.

Aus den Entwicklungen der §§ 2, 3 ersieht man unschwer, wie man zu Schematen von immer höherer Dimensionszahl gelangen kann. Entsprechend den Ecken, Kanten, Lamellen, Zellen des dreidimensionalen Schemas treten beim n-dimensionalen Schema Zellen m^{ter} Dimension auf ($m = 0, 1, .. n$). Die Anzahl derselben wird mit α_m bezeichnet.

Man erkennt, daß das Aufsteigen zu Schematen von höherer Dimension vorzüglich durch die einfach zusammenhängenden Schemata ε_n, σ_n vermittelt wird. Aus ε_n, gewinnt man nämlich σ_n, indem man zwei Exemplare von ε_n — deren Elemente eine gleichartige Bezeichnungsweise tragen sollen, — nimmt, sie als zwei n-dimensionale Zellen auffaßt und die gleichartig bezeichneten Elemente $(n-1)^{\text{ster}}$ und niedrigerer Dimension der beiden ε_n einander zuordnet. σ_n ist aber dann, rein kombinatorisch aufgefaßt, von ε_{n+1} nicht wesentlich verschieden[1]), und die Gesamtheit der mit σ_n homöomorphen Schemata liefert die $(n+1)$-dimensionalen Zellen, aus denen unter Zuhilfenahme von Zuordnungsvorschriften zwischen ihren Elementen ν^{ter} Dimension $(\nu < n+1)$ alle $(n+1)$-dimensionalen Schemata aufgebaut werden. Diese Vorschriften haben Bedingungen zu erfüllen, die die Verallgemeinerung der für die dreidimensionalen Schemata auseinandergesetzten Bedingung des einfachen Zusammenhanges der Umgebungsmannigfaltigkeiten der Ecken sind. In einem $(n+1)$-dimensionalen Schema hat nämlich jede Zelle m^{ter} Dimension eine durch ein $(n-m)$-dimensionales Schema repräsentierte Umgebungsmannigfaltigkeit. Daß alle diese Schemata der Umgebungsmannigfaltigkeiten einfach zusammenhängend seien, ist eine Bedingung, die von den das $(n+1)$-dimensionale Schema definierenden Vorschriften zu erfüllen ist. Eine weitere Bedingung, derzufolge aus den Zuordnungen geometrischer Figuren stets eine bestimmte Zuordnung ihrer Randelemente ableitbar sein soll, ist die Verallgemeinerung der beim dreidimensionalen Schema für die Zuordnung der Kanten der Polygoneinteilung und ihrer Richtungen aufgestellten Bedingung.[2])

---

[1]) Denkt man sich etwa die Zellen eines Schemas in Zeilen untereinander geschrieben, und zwar die m-dimensionalen Zellen in die $(m+1)^{\text{te}}$ Zeile, so unterscheidet sich ε_{n+1} von σ_n bei dieser Schreibart nur dadurch, daß ε_{n+1} noch eine $(n+2)^{\text{te}}$ Zeile mit dem Zeichen einer $(n+1)$-dimensionalen Zelle enthält. Hingegen sind in dem Schema ε_{n+1} keine anderen Zuordnungen vorhanden, als in σ_n.

[2]) Z. B. lautet für die Zuordnung von Polygonen diese Bedingung (die bereits bei den vierdimensionalen Schematen für die geschlossenen Zykeln zugeordneter Polygone zur Geltung kommt) folgendermaßen: Wenn $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_k$ Polygone (natürlich von gleicher Seitenzahl) sind und zwischen je zwei aufeinanderfolgenden und ebenso zwischen dem letzten und ersten eine Zuordnung besteht, so daß dem Umlaufssinn und jeder Seite des einen von zwei einander zugeordneten Polygonen ein bestimmter Umlaufssinn und eine bestimmte Seite des anderen entspricht, so muß bei der hiedurch auf dem Wege über $\Pi_2, \ldots \Pi_k$ ver-

In der in diesem Abschnitt vorstehend gegebenen Darstellung setzt die nach der Dimensionszahl aufsteigende Folge der n-dimensionalen Schemata mit dem Fall $n = 2$ ein. Es ist klar, daß man noch etwas weiter zurückgreifen und mit den beiden mit ε_0 und σ_0 zu bezeichnenden nulldimensionalen Schematen, dem einzelnen Punkt und dem Punktepaar beginnen kann. Das Punktepaar liefert die Strecke. Aus Strecken werden durch paarweise Zuordnungen der Streckenendpunkte die eindimensionalen Schemata aufgebaut. Man erhält nur zwei einander nicht homöomorphe Klassen zusammenhängender eindimensionaler Schemata, die ungeschlossene und die geschlossene Linie, erstere repräsentiert durch die Strecke (Schema ε_1) letztere durch das Schema σ_1, das aus zwei Strecken besteht, bei denen je einem Endpunkt der einen ein Endpunkt der anderen Strecke zugeordnet ist. σ_1 und die ihm homöomorphen Schemata liefern dann die Flächenstücke, die Bausteine der zweidimensionalen Schemata.

Es werde noch besprochen, was unter dem S i n n einer m-dimensionalen Zelle und unter dem Sinn einer zweiseitigen Mannigfaltigkeit zu verstehen ist.[3] Ein Punktepaar wird mit einem Sinn (einer Richtung) versehen durch die Festsetzung eines der Punkte als des früheren, des anderen als des späteren. Hiedurch ergibt sich auch für die eindimensionalen Zellen, die Strecken, ein Sinn, nämlich der durch den Sinn des Paares der Streckenendpunkte festgelegte. Wählt man dann den Sinn jeder der ein zusammenhängendes eindimensionales Schema bildenden Strecken so, daß alle Zuordnungen der Endpunkte von der ersten Art werden,[4] was auf zwei verschiedene Arten möglich ist, so ist hiedurch für die durch das Schema definierte Mannigfaltigkeit selbst ein Sinn gegeben.[5] Als Sinn eines Flächenstückes wird dann der Sinn der dasselbe berandenden geschlossenen eindimensionalen Mannigfaltigkeit bezeichnet und die beiden Arten, auf welche in den Flächenstücken

---

mittelten Zuordnung von Π_1 auf sich selbst sowohl der positive Umlaufssinn als auch jede einzelne Seite von Π_1 sich selbst zugeordnet sein.

Da Mannigfaltigkeiten von mehr als drei Dimensionen und ebenso einseitige Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen nur wenig studiert worden sind, konnte die erwähnte Bedingung, die erst für dreidimensionale Schemata, und unter diesen nur für diejenigen einseitiger Mannigfaltigkeiten, von Bedeutung wird, bisher unbeachtet bleiben.

[3]) Man vergleiche P. H e e g a a r d, Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhaeng. (Dissertation, Kopenhagen 1898), § 10.

[4]) Die Wahl eines Sinnes für die konstituierenden Strecken des Schema einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit gestattet die Zuordnungen der Streckenendpunkte in solche von erster und zweiter Art zu unterscheiden, je nachdem ein früherer Endpunkt einem späteren oder aber zwei frühere, bezw. zwei spätere Endpunkte einander zugeordnet werden. Definiert man die Begriffe „zweiseitig“ und „einseitig“ für zusammenhängende eindimensonale Mannigfaltigkeiten in gleicher Weise, wie dies für Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen geschah, so zeigt sich sofort, daß einseitige eindimensionale Mannigfaltigkeiten nicht auftreten können.

[5]) Falls das Schema aus einer einzigen Strecke, zwischen deren Endpunkten keine Zuordnung getroffen ist, besteht, so ist unter dem Sinn der Mannigfaltigkeit der Sinn dieser Strecke zu verstehen.

des Schemas einer zweiseitigen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der Sinn so gewählt werden kann, daß alle Zuordnungen der Seiten von der ersten Art werden, ergeben die beiden möglichen Bestimmungen des Sinnes der Mannigfaltigkeit. So fährt man fort, aus dem Sinn der zweiseitigen m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten einen Sinn für die $(m+1)$-dimensionalen Zellen, deren Berandung, — die geschlossene einfach zusammenhängende m-dimensionale Mannigfaltigkeit, — ja zweiseitig ist, abzuleiten, um hieraus wieder die Bestimmung eines Sinnes der zweiseitigen $(m+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu gewinnen.

II. Die Betti'schen Zahlen.

§ 5.

Homologien, Poincaré'sches Relationensystem einer Mannigfaltigkeit.

Poincaré hat, um die Betti'schen Zahlen aufzustellen, den Begriff der Homologien eingeführt, der in diesem Paragraphen ausführlich begründet werden soll. Hiezu möge mit einer Besprechung der in einer Mannigfaltigkeit gelegenen m-dimensionalen Raumstücke begonnen werden.

Die Punkte einer Mannigfaltigkeit sollen durch kleine lateinische Buchstaben mit dem oberen Index null bezeichnet werden, z. B. u^0, a_i^0.

Die Mannigfaltigkeit der Punkte der Strecke $-1 \leqq x \leqq +1$ (d. i. die durch das Schema ε_1 des § 4 definierte Mannigfaltigkeit) werde mit E_1, die beiden Endpunkte $x = -1$, $x = +1$ mit v^0, w^0 bezeichnet. Unter einem Linienstück einer Mannigfaltigkeit soll eine Gesamtheit G von Punkten der Mannigfaltigkeit verstanden werden, die auf E_1 eineindeutig und stetig abgebildet werden kann. Die beiden Punkte von G, deren einer hiebei v^0, deren anderer w^0 entspricht, mögen mit a^0, b^0 bezeichnet werden und sollen die Endpunkte des Linienstückes, alle übrigen Punkte von G sollen Innenpunkte heißen. Die verschiedenen eineindeutigen stetigen Abbildungen von G auf E_1 zerfallen in zwei Arten, je nachdem a^0 auf v^0 oder auf w^0 abgebildet wird. Trifft man hierüber eine bestimmte Wahl, so ist dadurch ein bestimmter Sinn des Linienstückes festgelegt. Der dem Punkt v^0 zugeordnete Punkt heiße der frühere (negative) Endpunkt, der dem Punkt w^0 zugeordnete der spätere (positive) Endpunkt. Der Begriff des in einer Mannigfaltigkeit liegenden Linienstückes soll aber noch dahin verallgemeinert werden, daß es gestattet sein soll, daß die beiden den Punkten v^0, w^0 entsprechenden Punkte in einen einzigen c^0 zusammenfallen. Die eindeutige Umkehrbarkeit und Stetigkeit der Abbildung zwischen G und E_1 bleibt dann zwar für die Innenpunkte gewahrt. Der Punkt c^0 aber entspricht beiden Punkten v^0, w^0 und seine Umgebung zerfällt in zwei Teile, deren einer der

Umgebung von v^0, deren anderer der von w^0 entspricht. Von einem Sinn des Linienstückes können wir nach wie vor reden, nur stützt sich die Definition des Sinnes jetzt auf die beiden Teile der Umgebung von c^0 je nach ihrer Zuordnung zu den Umgebungen von v^0 und w^0. Der Punkt c^0 ist aber sowohl positiver als negativer Endpunkt des Linienstückes. Die mit einem bestimmten Sinn versehenen Linienstücke sollen mit kleinen lateinischen Buchstaben mit dem oberen Index 1 bezeichnet werden. Ist a^0 der positive, b^0 der negative Endpunkt eines Linienstückes a_1, so soll symbolisch[1]) geschrieben werden[2]):

$$a^1 \equiv + a^0 - b^0.$$

Die Mannigfaltigkeit der Punkte des Einheitskreises $x^2 + y^2 \leqq 1$ (d. i. die durch das Schema ε_2 des § 2 definierte Mannigfaltigkeit) werde mit E_2, die Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ mit K bezeichnet. Unter einem in einer Mannigfaltigkeit gelegenen Flächenstück werde eine Gesamtheit G von Punkten der Mannigfaltigkeit verstanden, die eineindeutig und stetig auf E_2 abgebildet werden kann. Die Unterscheidung zweier Arten eineindeutiger stetiger Abbildungen von G auf E_2 führt analog wie im Falle des Linienstückes dazu, für ein Flächenstück einen nach zwei Arten wählbaren Sinn festzulegen, der im wesentlichen auf der Wahl eines bestimmten Durchlaufungssinnes für die Randlinie L des Flächenstückes (d. i. die Gesamtheit der auf K abgebildeten Punkte von G) beruht. Wir wollen annehmen, die Kreislinie K sei durch Markierung der auf ihr gelegenen Punkte $k_1^0, k_2^0, \ldots k_R^0 (R \geqq 1)$ in die Linienstücke $k_1^1, k_2^1, \ldots k_R^1$ zerlegt. Dementsprechend erscheint auch die Randlinie L des Flächenstückes durch die Bildpunkte $l_1^0, l_2^0, \ldots l_R^0$ der Punkte k_i^0 in R Linienstücke $l_1^1, l_2^1, \ldots l_R^1$ zerlegt. Aber auch der Begriff des Flächenstückes soll, wie der des Linienstückes eine Erweiterung erfahren. Es soll nämlich zugelassen werden, daß mehrere Linienstücke, in die L zerfällt, zusammenfallen. Es entsprechen dann mehrere Linienstücke k_i^1 einem einzigen Linienstück von G. Außer dem hiedurch hervorgerufenen Zusammenrücken gewisser Punkte l_i^0 sollen auch darüber hinaus weitere Punkte l_i^0 zusammenfallen dürfen. Die eindeutige Umkehrbarkeit und Stetigkeit der Abbildung von E_2 auf G bleibt somit für die Innenpunkte erhalten, wird aber in gewissen von den markierten Randpunkten

---

[1]) s. Poincaré, Compl. 1, p. 291; vgl. auch hiezu die Zuordnung von Zahlen zu den Punkten, Linien, u. s. w. einer Mannigfaltigkeit zu Beginn des § 18 der An. Sit. (p. 114).

[2]) Wollte man der vollen Allgemeinheit zuliebe auch die einzelnen Punkte u^0 einer Mannigfaltigkeit mit Vorzeichen versehen annehmen, so würde zu schreiben sein:

$$a^1 \equiv \delta a^0 - \delta' b^0,$$

wenn a^0 den am positiven Ende von a^1 gelegenen Punkt, versehen mit dem Zeichen δ, b^0 den am negativen Ende von a^1 gelegenen Punkt, versehen mit dem Zeichen δ', bedeutet. Hievon wird an einer Stelle im § 8 (Anm. 8) Gebrauch gemacht.

und in den Punkten gewisser Linienstücke der Randlinie in leicht ersichtlicher Weise modifiziert. Die ausführliche Darstellung, die den entsprechenden Verhältnissen beim Linienstück gewidmet wurde, überhebt uns einer näheren Auseinandersetzung. Auch den verallgemeinerten Flächenstücken kann ein Sinn beigelegt werden, der bei einer gegebenen Abbildung auf E_2 durch einen bestimmten positiven Umlaufssinn von K festgelegt werden kann. Die mit einem Sinn versehenen Flächenstücke sollen durch kleine lateinische Buchstaben mit oberem Index 2 bezeichnet werden. Sei a^2 ein Flächenstück in dem besprochenen verallgemeinerten Sinn und seien $l_1^1, l_2^1, \ldots$ die einzelnen in einem bestimmten Sinn genommenen Linienstücke von a^2, deren jedes einem oder mehreren Linienstücken k_i^1 entspricht. Sei ferner der Sinn der Linienstücke $k_1^1, k_2^1, \ldots k_R^1$ so gewählt, daß er mit dem positiven Sinn von K übereinstimmt. Ist dann $l_{\lambda_i}^1$ das dem Linienstück k_i^1 entsprechende Linienstück von G und $\delta_i = +1$ oder -1, je nachdem bei der Abbildung von E_2 auf G dem positiven Sinn von k_i^1 der positive oder negative Sinn von $l_{\lambda_i}^1$ entspricht, so soll symbolisch geschrieben werden:

$$a^2 \equiv \sum_{i=1}^{R} \delta_i \, l_{\lambda_i}^1 .$$

Der Reihenfolge der Summanden ist dabei kein Gewicht beizulegen.

Aus dem Vorstehenden ist unschwer zu entnehmen, was allgemein unter einem in einer Mannigfaltigkeit gelegenen m-dimensionalen Raumstück[3]) (durch einen kleinen lateinischen Buchstaben mit dem oberen Index m zu bezeichnen) und unter symbolischen Kongruenzen von der Form

$$u^m \equiv \sum \delta_i \, u_i^{m-1} \tag{3}$$

(die δ_i sind gleich $+1$ oder -1) zu verstehen ist.

---

[3]) Man könnte das m-dimensionale Raumstück erklären als eine Punktmenge G, die auf E_m im allgemeinen, jedoch mit eventueller **Ausnahme gewisser Randelemente**, eineindeutig und stetig abbildbar ist, unter E_m die berandete einfach zusammenhängende (durch das Schema ε_m des vorigen Paragraphen definierte) m-dimensionale Mannigfaltigkeit also die Mannigfaltigkeit der Punkte $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leq 1$, verstanden. — Die Innenpunkte m-dimensionaler Raumstücke liefern nicht die allgemeinsten der Menge der **Innenpunkte** von E_m homöomorphen Punktmengen; vgl. z. B. die durch $0 < x^2 + y^2 < 1$, $(x - 3 \cdot 2^{-\nu})^2 + y^2 - 2^{-2\nu} > 0$, $(\nu = 2, 3, \ldots)$ definierte ebene Punktmenge.

Man beachte, daß ein Linienstück im Falle zusammenfallender Endpunkte nicht bloß durch die Gesamtheit seiner Punkte, sondern auch durch die Stellung, die dem Punkte c^0 eingeräumt wird, charakterisiert ist. Analog gehört die besondere Stellung innerhalb G, die den zusammenfallenden Randelementen durch die Art der Abbildung auf E_m zuerteilt wird, zum Wesen des Flächenstückes, bezw. Raumstückes.

Über den Bereich der hiemit eingeführten speziellen Kongruenzen hinaus zu solchen von ein wenig allgemeinerer Art führt ein Rechnen mit denselben, für das folgende Regeln gelten sollen:

Die Glieder auf einer Seite einer Kongruenz dürfen — wie schon bemerkt — in ihrer Reihenfolge umgestellt und in der üblichen Weise der Buchstabenrechnung zusammengezogen werden. Beide Seiten einer Kongruenz dürfen mit einer positiven oder negativen ganzen Zahl multipliziert werden. Aus zwei Kongruenzen darf eine neue gebildet werden, deren linke bezw. rechte Seite durch Addition der linken bezw. der rechten Seiten[4]) der gegebenen Kongruenzen entsteht.[5])

Zufolge der ersten dieser Regeln kann man sagen: Ist u^1 ein Linienstück mit zusammenfallenden Endpunkten, so ist $u^1 \equiv 0$ und überhaupt gilt allgemein die Relation

$$u^m \equiv 0,$$

wenn die Gesamtheit der Punkte von u^m im Sinne des Abschnittes I eine geschlossene zweiseitige[6]) m-dimensionale Mannigfaltigkeit bildet.[7])

Noch allgemeiner gestatten die vorstehenden Regeln folgende Aussage: Sind $u_1^m, u_2^m, \ldots u_\alpha^m$ in einer Mannigfaltigkeit gelegene m-dimensionale Raumstücke ohne gemeinsame Innenpunkte[8]) und stellt die Gesamtheit der einem oder mehreren der Raumstücke u_i^m angehörenden Punkte eine geschlossene zweiseitige[6]) m-dimensionale Mannigfaltigkeit M (s. Abschnitt I) dar, ist ferner der Sinn eines jeden der u_i^m so festgelegt, wie er einem bestimmten Sinn (s. § 4) von M entspricht, so ist

$$\sum_{i=1}^{\alpha} u_i^m \equiv 0.^{9)}$$

Es werde noch der Satz angeführt: Wenn $u^m \equiv \sum \delta_i u_i^{m-1}$ ist, so ist $\sum \delta_i u_i^{m-1} \equiv 0$.

---

[4]) Die linke und rechte Seite einer Kongruenz mit einander zu vertauschen, soll nicht gestattet sein.

[5]) Wenn die Gesamtheit der eingeführten $(m-1)$-dimensionalen Raumstücke so beschaffen ist, daß keine zwei dieser Raumstücke miteinander Innenpunkte gemein haben, so sind die rechten Seiten aller Kongruenzen

$$\sum h_i u_i^m \equiv \sum k_i u_i^{m-1}$$

durch die linken Seiten eindeutig bestimmt, wie man daraus entnimmt, daß dies für die Kongruenzen (3) gilt.

[6]) Bezüglich **einseitiger** Mannigfaltigkeiten sehe man § 9 nach.

[7]) Für $m > 1$ läßt sich dieser Satz offenbar nicht umkehren.

[8]) Die Aussage dieses Satzes setzt voraus, daß auch die einzelnen $(m-1)$-dimensionalen Raumstücke, aus denen die Berandung der u_i^m sich zusammensetzt, keine Innenpunkte gemein haben.

[9]) Der Satz ist offenbar nicht umkehrbar.

Die ganzzahligen Linearformen mit den Symbolen m-dimensionaler Raumstücke als Variablen, auf die der besprochene Kalkül führt, mögen als m-dimensionale Gebilde bezeichnet werden, und zwar möge insbesondere, wenn die Relation

$$\sum h_i u_i^m \equiv 0$$

besteht, das m-dimensionale Gebilde auf der linken Seite als ein zweiseitiges geschlossenes bezeichnet werden. Die zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Gebilde umfassen also die (mit einem Sinn versehenen) zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, wenn diese aus Raumstücken ohne gemeinsame Innenpunkte zusammengesetzt erscheinen, als Spezialfälle.

Die mit einem Sinn versehenen m-dimensionalen Zellen des Schemas einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V, die wir mit Poincaré durch $a_1^m, a_2^m, \ldots a_{\alpha_m}^m$ bezeichnen, stellen einen besonders wichtigen Fall in V gelegener m-dimensionaler Raumstücke dar. Die Gesamtheit der zwischen denselben bestehenden, ihre Lagebeziehungen bis auf einen gewissen Grad ausdrückenden Kongruenzen

$$a_i^m \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{m-1}} \varepsilon_{ij}^m \, a_j^{m-1}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \alpha_m ; \\ m = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

bildet das Poincaré'sche Relationensystem[10]) von V für das betreffende Schema, von dem noch oft Gebrauch zu machen sein wird.

Auf Grund der Auseinandersetzungen über Raumstücke und symbolische Kongruenzen zwischen denselben ist es sehr einfach zu erläutern, was unter einer Homologie in bezug auf eine Mannigfaltigkeit V zu verstehen ist.[11]) Sind nämlich $u_1^{m+1}, u_2^{m+1}, \ldots u_\alpha^{m+1}$; $u_1^m, u_2^m, \ldots u_\beta^m$ in V gelegene Raumstücke und besteht die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{\alpha} h_i u_i^{m+1} \equiv \sum_{i=1}^{\beta} k_i u_i^m, \tag{4}$$

so soll gesagt werden, das Gebilde $\sum_{i=1}^{\beta} k_i u_i^m$ sei bezüglich V homolog null, in Zeichen:

$$\sum_{i=1}^{\beta} k_i u_i^m \sim 0.$$

Eine derartige als Homologie bezeichnete Relation bedeutet also das Vorhandensein solcher in V gelegener Raumstücke u_i^{m+1}, daß dieselben der Kongruenz (4) Genüge leisten.

[10]) Von Poincaré wird dieses Relationensystem als Schema bezeichnet. (Compl. 1, p. 291). Vgl. die diesbezügliche Anm. 9, § 1.

[11]) Vgl. Poincaré, An. Sit. §§ 5, 6.

Es soll weiters gestattet sein, auf beiden Seiten einer Homologie zwischen m-dimensionalen Raumstücken ein und dasselbe Symbol eines m-dimensionalen Raumstückes zu addieren. Daß es ferner erlaubt ist, Homologien zu addieren oder eine Homologie auf beiden Seiten mit einer und derselben ganzen Zahl zu multiplizieren, folgt bereits aus den Rechnungsregeln über Kongruenzen.[12])

Es ist zu beachten, daß der Begriff der Homologie an eine ganz bestimmte zu Grunde gelegte Mannigfaltigkeit V gebunden ist.

Zur Erläuterung der bisherigen Ausführungen dieses Paragraphen diene folgendes Beispiel. Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit V durch ein Schema, das aus einem Rechteck mit paarweise nach der ersten Art zugeordneten Gegenseiten besteht. Das Schema hat also zwei Kanten und eine Ecke. A, B, C, D seien der Reihe nach die Ecken des Rechteckes. E sei ein Punkt auf AB, F der zugeordnete auf DC. Wir ziehen die Strecken AF und EC und führen folgende Bezeichnungen für die auftretenden Punkte, Linien- und Flächenstücke ein:

$$A = B = C = D = a^0, \ E = F = b^0;$$

$$AE = DF = a^1, \ EB = FC = b^1, \ AD = BC = c^1,$$

$$AF = d^1, \ EC = e^1;$$

$$AFD = a^2, \ EBC = b^2, \ AECF = c^2.$$

Dann gelten die Kongruenzen:

$$a^1 \equiv b^0 - a^0, \ b^1 \equiv a^0 - b^0, \ c^1 \equiv 0, \ d^1 \equiv b^0 - a^0, \ e^1 \equiv a^0 - b^0;$$

$$a^2 \equiv d^1 - a^1 - c^1, \ b^2 \equiv b^1 + c^1 - e^1, \ c^2 \equiv a^1 + e^1 - b^1 - d^1.$$

Es zeigt sich, daß, entsprechend einer allgemeinen Bemerkung über geschlossene Mannigfaltigkeiten, $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0$ ist, und daß, im Einklang mit einem anderen allgemeinen Satze, $d^1 - a^1 - c^1$, $b^1 + c^1 - e^1$ und $a^1 + e^1 - b^1 - d^1$ kongruent null sind. Ferner folgen aus den Kongruenzen die Homologien:

$$a^0 \sim b^0;^{13)}$$

$$d^1 \sim a^1 + c^1, \ e^1 \sim b^1 + c^1, \ a^1 - b^1 \sim d^1 - e^1.$$

Die letzte Homologie ist dabei ersichtlich eine Folge der beiden vorhergehenden. Setzen wir $a^1 + b^1 = f^1$, $d^1 + e^1 = g^1$, so repräsentieren f^1, g^1, c^1 drei geschlossene Linien in V und wir erhalten zwischen ihnen die Homologie:

$$g^1 \sim f^1 + 2c^1.$$

---

[12]) Poincaré unterscheidet zwischen „Homologien mit Division" und „Homologien ohne Division", je nachdem es außerdem gestattet ist, beide Seiten einer Homologie durch einen allen Koeffizienten gemeinsamen ganzzahligen Faktor zu dividieren, oder nicht. Im Text soll nur „von Homologien ohne Division" Gebrauch gemacht werden.

[13]) Irgend zwei Punkte einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit sind offenbar stets einander homolog.

Gewisser spezieller Homologien möge noch gedacht werden. Sei $W^{(m+1)}$ eine in der Mannigfaltigkeit V (auf die sich die Homologien beziehen,) gelegene, d. h. aus Punkten von V bestehende $(m+1)$-dimensionale zweiseitige[14]) Mannigfaltigkeit, deren vollständige Berandung durch die geschlossenen m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $U_1^{(m)}, U_2^{(m)}, \ldots U_h^{(m)}, V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \ldots V_k^{(m)}$ gebildet werde. Nun ist durch einen bestimmten Sinn der zweiseitigen Mannigfaltigkeit $W^{(m+1)}$ auch für jede der zweiseitigen Mannigfaltigkeiten $U_i^{(m)}, V_i^{(m)}$ ein bestimmter Sinn mitbestimmt. Fällt dieser Sinn bei jeder $U_i^{(m)}$ mit ihrem positiven, bei jeder $V_i^{(m)}$ mit ihrem negativen Sinn zusammen, so besteht bezüglich V die Homologie

$$U_1^{(m)} + U_2^{(m)} + \ldots + U_h^{(m)} \sim V_1^{(m)} + V_2^{(m)} + \ldots + V_k^{(m)}.$$

Daß aber nicht jede Homologie der Ausdruck eines derart einfachen Sachverhaltes ist[15]), zeigt in dem oben durchgeführten Beispiel die zuletzt angeschriebene Homologie zwischen g^1, f_1, c^1.[16])

§ 6.
Definition der Bettischen Zahlen.

Wir gehen zur Poincaréschen Definition der Bettischen Zahlen einer Mannigfaltigkeit V über.[1]) Nehmen wir an, es gäbe

[14]) Diese Bedingung der Zweiseitigkeit ist offenbar wesentlich. Dies wird besonders deutlich, wenn man in irgend einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $V\,(n > 2)$ ein längs einer beliebigen geschlossenen Linie l^1 von V verlaufendes Möbius'sches Band betrachtet, dessen Randlinie mit $2\,l^1$ homolog ist, während die Homologie

$$2\,l^1 \sim 0 \text{ (bezügl. } V)$$

offenbar im allgemeinen nicht gilt.

[15]) Die Einführung der Homologien geschieht vielfach unter vorzugsweiser Berücksichtigung dieser speziellen Homologien. Vgl. die Bemerkungen, die hiezu Heegaard in der bereits zitierten Dissert. p. 64, 65 macht.

[16]) Man betrachte etwa auch das Beispiel einer verknoteten geschlossenen Linie l^1 in der dreidimensionalen Elementarmannigfaltigkeit E_3, für welche die Homologie

$$l^1 \sim 0 \text{ (bezügl. } E_3)$$

besteht, wie im Anschlusse an die Erörterungen des Textes leicht gefolgert wird. — Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Darstellung des Textes ohne weiteres auch sich selbst durchsetzende Mannigfaltigkeiten in Homologien einzuführen gestattet.

[1]) Es sind noch in verschiedener anderer Weise definierte Zusammenhangszahlen mit dem Namen „Bettische Zahlen" bezw. „Riemann-Bettische Zahlen" (in Picard-Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes t. I., chap. 2.) belegt worden (im Hinblick auf den Aufsatz von Betti, Sugli spazi di un numero qualunque di dimensioni, Ann. di mat. ser. 2., t. 4. und das Fragment 29 in Riemanns Ges. Werken, 2. Aufl., p. 479). Die einzige Art, solche Zusammenhangszahlen zu definieren, die von gewissen Einwänden, auf die wir in § 21 zu sprechen kommen, frei ist, verdankt man Poincaré (derselbe erläutert seine in An. Sit. p. 19 gegebene Definition noch ausführlicher in Compl. 1., § 1) und die nach seinem Vorgang definierten Zusammenhangszahlen sind die Bettischen Zahlen des Textes.

ein System von zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen in V gelegenen Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}, W_2^{(m)}, \ldots W_t^{(m)}$, zwischen denen keine Homologie

$$k_1 W_1^{(m)} + k_2 W_2^{(m)} + \cdots + k_t W_t^{(m)} \sim 0 \quad (\text{bezügl. } V)$$

besteht,[2]) während jede zweiseitige geschlossene m-dimensionale in V gelegene Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$ einer Homologie

$$k W^{(m)} + k_1 W_1^{(m)} + k_2 W_2^{(m)} + \cdots + k_t W_t^{(m)} \sim 0 \quad (k \neq 0)$$

genügt. Ist dann $V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \ldots V_{t'}^{(m)}$ ein anderes System von Mannigfaltigkeiten mit den gleichen Eigenschaften wie das System $W_1^{(m)}, W_2^{(m)}, \ldots W_t^{(m)}$, so ist ohne weiteres klar, daß $t' = t$ sein muß. Die Anzahl t der Mannigfaltigkeiten eines solchen Systems ist also eine für die Mannigfaltigkeit V charakteristische Zahl, die offenbar auch für alle zu V homöomorphen Mannigfaltigkeiten den gleichen Wert hat. Es ist also die Zahl t eine topologische Invariante. Die topologische Invariante $t+1$ wird dann die m^{te} Bettische Zahl der Mannigfaltigkeit V genannt und mit P_m bezeichnet. Man hat $t = 0$, $P_m = 1$ zu setzen, wenn in V jede zweiseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$ einer Homologie $k W^{(m)} \sim 0$ $(k \neq 0)$ genügt.[3])

Die gegebene Definition der Bettischen Zahlen legt — worauf besonders Heegaard[4]) hingewiesen hat — die Annahme zu Grunde, daß in jeder Mannigfaltigkeit V ein (endliches) System m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}, W_2^{(m)}, \ldots W_t^{(m)}$ mit den genannten Eigenschaften tatsächlich existiert. Diese im folgenden als Annahme I bezeichnete Annahme ohne weiteres und unter Beibehaltung des Homologiebegriffes in der oben auseinandergesetzten Fassung zuzulassen, stößt auf gewisse Schwierigkeiten, die hier kurz angedeutet werden mögen.

Betrachten wir ein Beispiel, auf das wir auch später noch zurückgreifen werden. Man ziehe im dreidimensionalen Raume eine im Innern einer Zylinderfläche Z verlaufende, einen Knoten

[2]) Von dem Falle $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$ wird hiebei natürlich abgesehen.

[3]) Ist n die Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit V, so pflegt man für m die Werte $1, 2, \ldots n-1$ in Betracht zu ziehen. Doch hat es keine Schwierigkeit, die Definition der Bettischen Zahl P_m auch auf die Fälle $m = 0$ und $m = n$ anzuwenden. Im Falle $m = 0$, wo die geschlossenen zweiseitigen m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten Punktepaare werden, ist offenbar P_0 gleich der Anzahl der zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, aus denen V besteht. (Für $n = 0$ soll $P_0 = \alpha_0 - 1$ gesetzt werden, wenn α_0 die Anzahl der Punkte ist, aus denen V besteht.) P_n aber ist die Anzahl der zweiseitigen geschlossenen unter diesen P_0 zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten.

[4]) Dissertation p. 64.

bildende Linie AB (siehe Fig. 1). An diese setze man eine wieder innerhalb Z liegende kongruente Linie BC und so fahre man fort, nach beiden Seiten unendlich viele zu AB kongruente Linien zu einer einzigen Linie K zusammenzufügen. Durch eine projektive Transformation des Raumes, die den unendlich fernen Punkt des Zylinders in einen im Endlichen gelegenen Punkt S überführt, wird Z in eine Kegelfläche mit der Spitze in S und K in eine im Innern derselben verlaufende Linie L transformiert (siehe Fig. 2). Sei R ein Berührungspunkt von L mit der Kegelfläche, so werde R mit S durch eine außerhalb der Kegelfläche verlaufende Linie s verbunden, die zusammen mit dem zwischen R und S liegenden Teil von L eine geschlossene Linie U^1 bildet. Wir ziehen eine U^1 vollständig umschließende Kugelfläche und betrachten die ein-

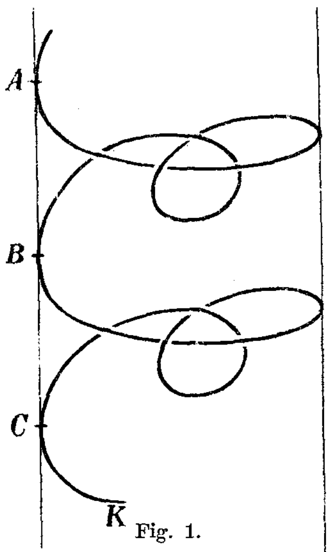

Fig. 1.

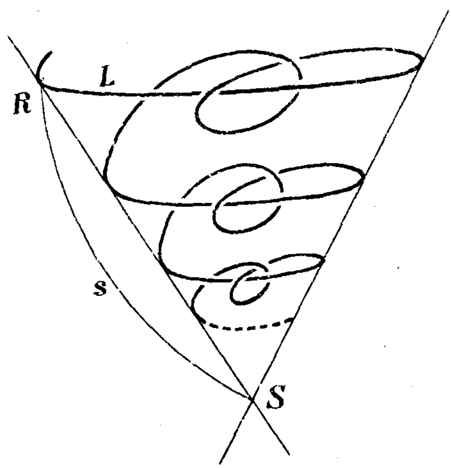

Fig. 2.

fach zusammenhängende berandete Mannigfaltigkeit V aller im Innern dieser Kugel liegenden Punkte. U^1 ist eine in dieser Mannigfaltigkeit V gelegene geschlossene Linie.

Nun ist man es gewöhnt, der berandeten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit V die Bettische Zahl $P_1 = 1$ beizulegen, was so viel bedeutet, als daß es zu jeder geschlossenen Linie W^1 in V eine ganze Zahl k gibt, so daß $k W^1 \sim 0$ bezüglich V ist. Es ist indes wohl kaum zweifelhaft, daß die geschlossene Linie U^1 sich diesem Satze entzieht. Aber noch mehr. Wenn man nämlich bedenkt, wie mannigfach man nach dem Muster von U^1 oder in komplizierterer Weise geschlossene Linien bilden kann, die alle sozusagen unendlich verknotet sind, aber wohl immer wieder neue Typen liefern, die den früheren nicht homolog sind, so erscheint die Zulässigkeit der (zumindest als unbewiesen anzusehenden) Annahme I recht fraglich.

Solche Erweiterungen des Begriffes der Homologie (etwa durch Summenbildung von unendlich vielen Homologien), mit deren Hilfe eine Beseitigung der besprochenen Schwierigkeiten eventuell möglich wäre, sollen uns hier nicht beschäftigen. Vielmehr soll, anstatt an der obigen Definition der Bettischen Zahlen weiter festzuhalten, eine andere, zumindest formal gänzlich verschiedene Definition für dieselben eingeführt werden, die sich durchaus an den Begriff des Schema einer Mannigfaltigkeit anlehnt. Wir gehen hiezu folgendermaßen vor.

Sei V die betrachtete n-dimensionale Mannigfaltigkeit, von der wir der Einfachheit halber annehmen wollen, daß sie, wenn überhaupt, nur $(n-1)$-dimensionale, also nur eigentliche Randmannigfaltigkeiten besitze, und sei

$$a_i^m \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{m-1}} \varepsilon_{ij}^m a_j^{m-1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots \alpha_m; \; m = 1, 2, \ldots n)$$

das Poincarésche Relationensystem von V. Bedeutet dann γ_m den Rang der aus den Zahlen ε_{ij}^m gebildeten Matrix, so werde die m^{te} Bettische Zahl P_m durch die Gleichung[5])

$$(5) \qquad P_m - 1 = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1}$$

$$(m = 1, 2, \ldots n-1)$$

definiert.[6])

Von der so definierten Zahl P_m, die sich zunächst nur auf ein ganz bestimmtes Schema der Mannigfaltigkeit V bezieht, ist unschwer zu beweisen (siehe § 8), daß sie für homöomorphe Schemata den gleichen Wert hat, also tatsächlich eine topologische Invariante[7])

---

[5]) Man beweist leicht, daß $\alpha_0 - \gamma_1$ gleich ist der Anzahl der zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, aus denen V besteht (vgl. hiezu Anm. 1, § 10) und $\alpha_n - \gamma_n$ gleich der Anzahl der zweiseitigen geschlossenen unter den zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, aus denen V besteht. Wird also sowohl γ_0, als γ_{n+1} gleich 1 gesetzt, so kann die Formel (5) auch zur Definition von P_0 und P_n dienen. Doch ist in den Ausführungen der §§ 6, 7 unter P_m nur eine der Zahlen $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ zu verstehen.

[6]) Eine andere Fassung dieser Definition findet man auf der letzten Seite des § 9.

[7]) Allerdings ist damit nur gezeigt, daß P_m eine topologische Invariante der Schemata, nicht aber, daß es eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeiten ist. Bezüglich dieses Unterschiedes vergleiche man § 2.

ist. Über die Stellung der eben eingeführten zu der früheren Definition der Bettischen Zahlen möge folgendes gesagt werden.

Der zweiten und dritten von den Arbeiten Poincarés über Analysis situs[8]) liegt im wesentlichen die zuletzt gegebene Definition der Bettischen Zahlen zu Grunde. Zwar erscheint in denselben die Formel (5) nur als ein Mittel, um die in der früheren Weise definierten Bettischen Zahlen aus einem Schema der betrachteten Mannigfaltigkeit zu berechnen. Doch scheinen die sofort zu besprechenden Überlegungen, die die Gleichheit der auf die frühere Art mit den durch die Formel (5) definierten Zahlen P_m erweisen sollen, immerhin gewisser Ergänzungen und Modifikationen zu bedürfen, und da von der ursprünglichen Definition der Bettischen Zahlen in den zitierten Arbeiten strenge genommen kein Gebrauch gemacht wird, so kann die Formel (5) tatsächlich als die in denselben zu Grunde gelegte Definition von P_m angesehen werden.

Den genannten Überlegungen,[9]) die den Übergang von der früheren Definition der Bettischen Zahlen zur Formel (5) vermittelt haben und gewissermaßen eine Motivierung dafür bilden, daß die durch (5) definierten Zahlen P_m als Bettische Zahlen benannt werden, liegt zunächst die Annahme (im folgenden als Annahme II bezeichnet) zu Grunde, daß jede zweiseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit in V einem aus den m-dimensionalen Zellen des Schema Σ von V zusammengesetzten zweiseitigen geschlossenen Gebilde $\Sigma k_i a_i^m$ homolog ist.

Die Annahme II führt dazu, nach einem System von aus den Zellen von Σ zusammengesetzten zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Gebilden $G_1^{(m)}, G_2^{(m)}, \ldots G_s^{(m)}$ zu fragen, welches so beschaffen ist, daß zwischen den Gebilden $G_i^{(m)}$ keine Homologie, hingegen zwischen jedem aus den Zellen von Σ zusammengesetzten zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Gebilde und den $G_i^{(m)}$ eine Homologie besteht.[10]) Es ist leicht zu zeigen, daß solche Systeme sich tatsächlich auffinden lassen und daß die Anzahl s der Gebilde eines solchen Systems, die von der Wahl des Systems offenbar unabhängig sein muß, durch die rechte Seite der Gleichung (5) gegeben ist.

---

[8]) Compl. 1 und 2.

[9]) Siehe Compl. 1.

[10]) Falls man den in § 7 bei der Besprechung der Annahme II ausgesprochenen Satz B als gültig ansieht, kann man sagen, ein solches System $G_1^{(m)}, G_2^{(m)}, \ldots G_s^{(m)}$ habe die Eigenschaft, daß jedes aus Zellen irgend eines Schema von V zusammensetzbare zweiseitige geschlossene m-dimensionale Gebilde zusammen mit den $G_i^{(m)}$ einer Homologie genügt.

Hiezu werde das Poincarésche Relationensystem in eine reduzierte Form transformiert,[11]) deren Bildung auf dem aus der Theorie der linearen Formen bekannten Satze beruht, daß man durch gleichzeitig auf die beiden Variablenreihen der a_i^m und der a_j^{m-1} ausgeübte linear homogene ganzzahlige Substitutionen von der Determinante 1 neue Variablenreihen

$$b_1^m, b_2^m, \ldots b_{\alpha_m}^m \text{ und } c_1^{m-1}, c_2^{m-1}, \ldots c_{\alpha_{m-1}}^{m-1}$$

so einführen kann, daß die Relationen

$$a_i^m \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{m-1}} \varepsilon_{ij}^m a_j^{m-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots \alpha_m)$$

übergehen in

$$(6) \qquad \begin{aligned} b_i^m &\equiv \omega_i^m c_i^{m-1}, & (i &= 1, 2, \ldots \gamma_m) \\ b_i^m &\equiv 0 & (i &= \gamma_m + 1, \ldots \alpha_m) \end{aligned}$$

Dabei bedeuten $\omega_1^m, \omega_2^m, \ldots \omega_{\gamma_m}^m$ die von Null verschiedenen Elementarteiler der aus den Zahlen ε_{ij}^m gebildeten Matrix.[12]) Die Gesamtheit der Relationen (6) für $m = 1, 2, \ldots n$ bildet dann eine reduzierte Form des Poincaréschen Relationensystems.

Es ist nun sofort ersichtlich, daß ein Gebilde

$$\sum_{i=1}^{\alpha_m} h_i a_i^m = \sum_{i=1}^{\alpha_m} k_i b_i^m$$

nur dann zweiseitig und geschlossen sein kann, wenn $k_1 = k_2 = \cdots$ $\cdots = k_{\gamma_m} = 0$ sind, wenn es also die Form

$$\sum_{i=\gamma_m+1}^{\alpha_m} k_i b_i^m$$

hat, und daß umgekehrt jedes Gebilde von dieser Form zweiseitig geschlossen ist.

Anderseits hat es keine Schwierigkeit, die zwischen den zweiseitigen geschlossenen Gebilden

$$(7) \qquad b_{\gamma_m+1}^m, b_{\gamma_m+2}^m, \ldots b_{\alpha_m}^m$$

---

[11]) Vgl. Compl. 2, §§ 2, 3 (S. 281 ff.).

[12]) Also $\omega_{\gamma_m}^m = d_1$, $\omega_{\gamma_m - k}^m = d_{k+1}/d_k$, unter d_k den größten gemeinsamen Teiler aller k-reihigen Determinanten $\left| \varepsilon_{ij}^m \right|$ verstanden.

bestehenden Homologien aufzustellen. Das Poincarésche Relationensystem in der ursprünglichen Form liefert nämlich die Homologien

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_m} \varepsilon_{ij}^{m+1} a_j^m \sim 0, \quad (i = 1, 2, \ldots \alpha_{m+1})$$

die sich als Homologien zwischen den Gebilden (7) müssen darstellen lassen, da die linken Seiten dieser Homologien (man vergleiche einen in § 5 angeführten Satz) zweiseitige geschlossene m-dimensionale Gebilde sind. Doch werden im allgemeinen die angeschriebenen α_{m+1} Homologien nicht unabhängig sein, d. h. einige derselben werden sich aus den übrigen berechnen lassen. Hingegen bilden die aus der reduzierten Form (6) des Poincaréschen Relationensystems abgelesenen Homologien

$$(9) \qquad \omega_i^{m+1} c_i^m \sim 0 \quad (i = 1, 2, \ldots \gamma_{m+1})$$

ein System unabhängiger Homologien, da ja die c_i^m nach Voraussetzung linear unabhängige Formen der a_i^m sind, und offenbar können alle Homologien (8) durch Rechnung aus den γ_{m+1} Homologien (9) gefolgert werden. Die Homologien (9) gestatten nun γ_{m+1} von den Gebilden (7) durch die übrigen $s = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1}$ Gebilde auszudrücken, d. h. ausführlicher gesagt: Man kann aus den Gebilden (7) s geeignet auswählen und aus den Homologien (9) γ_{m+1} neue Homologien bilden, derart, daß die linke Seite dieser neuen Homologien der Reihe nach je ein nicht verschwindendes Vielfaches eines der nicht ausgewählten Gebilde, die rechte Seite jedesmal eine Linearform der s ausgewählten Gebilde ist. Wird nun die Annahme gemacht (im folgenden als Annahme III bezeichnet), daß zwischen den Gebilden (7) keine anderen Homologien bestehen, als solche, die aus den Homologien (8) und somit aus den Homologien (9) rechnerisch gefolgert werden können, so stellen die s ausgewählten Gebilde ein System von der gesuchten Beschaffenheit vor, und die Anzahl der Gebilde des Systems ist gleich $\alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1}$, wie behauptet wurde.

Unter Verwendung der Annahme II kann man nun sagen, daß jede zweiseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit in V einer ganzzahligen Linearform der $s = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1}$ ausgewählten Gebilde homolog ist, daß also die Bettische Zahl P_m (im Sinne der früheren Definition) sicher nicht größer als $s + 1$ sein kann. Wenn aber auf Grund der bisherigen Überlegungen die Bettische Zahl P_m geradezu gleich $s + 1$ gesetzt wird, so wird dabei von einer weiteren Annahme Gebrauch gemacht, die in gewissem Sinne eine Art Umkehrung der Annahme II vorstellt. Diese Annahme (Annahme IV) besagt:

Es lassen sich s aus den Zellen von Σ zusammengesetzte zweiseitige geschlossene m-dimensionale Gebilde, die untereinander durch keine Homologie, mit jedem anderen solchen Gebilde aber durch eine Homologie verbunden sind, speziell auch so auswählen, daß jedes einzelne der s Gebilde einer in V gelegenen zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Mannigfaltigkeit homolog ist.

Gibt man diese Annahme zu, so ist klar, daß die s Mannigfaltigkeiten, deren Existenz durch dieselbe behauptet wird, ein System von den Eigenschaften des bei der Definition der Bettischen Zahlen besprochenen Systems der $W_i^{(m)}$ bilden, daß also die Bettische Zahl P_m tatsächlich gleich $s+1=\alpha_m-\gamma_m-\gamma_{m+1}+1$ zu setzen ist. Damit ist aber der Weg, der von der Definition der Bettischen Zahlen zur Formel (5) geführt hat, durchlaufen.

§ 7.

Über die im § 6 verwendeten Annahmen.

Es möge eine, wenngleich keineswegs erschöpfende Besprechung der in § 6 gebrauchten Annahmen gegeben werden. Dabei werde vorweg bemerkt: Daß manche der von Poincaré zum Beweise der besprochenen Annahmen gemachten Schlüsse im folgenden als nicht bindend bezeichnet werden, hat einen wesentlichen Grund in der verschiedenen Abgrenzung des Mannigfaltigkeitsbegriffes. So hat Poincaré, wie es scheint, vorwiegend nur analytische Mannigfaltigkeiten im Auge. Hiedurch fallen manche Schwierigkeiten fort, wobei es übrigens von Bedeutung werden kann, ob man sich auf überall analytische oder aus analytischen Stücken in endlicher Anzahl bestehende Mannigfaltigkeiten beschränkt.

Was zunächst die Annahme IV betrifft, so muß es als unentschieden bezeichnet werden, ob sie sich als richtig erweisen läßt.[1]) Für die Beurteilung dieser Frage ist es wichtig zu beachten, daß durch die dem Mannigfaltigkeitsbegriff in Abschnitt I gegebene Fassung Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten und somit auch sich selbst durchdringende Mannigfaltigkeiten ausgeschlossen wurden.

Die Richtigkeit der Annahme III kann wohl in hohem Grade als wahrscheinlich angesehen werden. Einen Beweis derselben gibt

---

[1]) Jedenfalls ist nicht jedes in einer Mannigfaltigkeit V gelegene zweiseitige geschlossene m-dimensionale Gebilde einer zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Mannigfaltigkeit in V homolog, z. B. nicht das Gebilde $2F^2$, wenn V die dreidimensionale Elementarmannigfaltigkeit, F^2 eine Kugelfläche in V ist. Die in der Anm. auf der zweiten Seite meiner oben zitierten Note in den Wien. Ber. (1906) berührte Frage ist also zu verneinen.

Poincaré[2]) für den Fall einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit und $m = 1$ und 2. Derselbe bedarf wohl einiger Ergänzungen infolge ähnlicher Umstände, wie sie weiter unten bei Besprechung des Satzes a und in § 2 bei Besprechung des Satzes von der Homöomorphie der Schemata homöomorpher Mannigfaltigkeiten geltend gemacht werden, wobei auch hier für höhere Dimensionszahlen von V noch kompliziertere Verhältnisse eintreten können. Die Notwendigkeit gewisser Ergänzungen tritt allerdings vorwiegend durch den eingangs erwähnten Umstand ein, daß im Texte die Art der in Betracht genommenen Mannigfaltigkeiten eine allgemeinere ist als bei Poincaré, der sich vorzüglich auf analytische Mannigfaltigkeiten beschränkt.

Es erübrigt noch die Annahme II zu besprechen. Dieselbe stützt sich auf Überlegungen ungefähr von folgender Art.[3]) Zu Grunde gelegt werden die beiden Sätze:

A. Zu irgend einer vorgelegten in V liegenden m-dimensionalen Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$ läßt sich stets eine solche Zerlegung von V in ein Zellensystem (Schema) finden, daß $W^{(m)}$ aus m-dimensionalen Zellen dieses Schema zusammengesetzt erscheint (d. h. es gibt eine Anzahl m-dimensionaler Zellen, so daß $W^{(m)}$ gerade aus allen Punkten besteht, die einer oder mehreren dieser Zellen angehören).

B. Wenn zwei Einteilungen Σ_1, Σ_2 von V in ein Zellsystem vorliegen,[4]) so sind die zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Gebilde, die aus den Zellen von Σ_1 zusammengesetzt sind, eben solchen aus den Zellen von Σ_2 zusammengesetzten Gebilden homolog.

Von diesen Sätzen ist II eine unmittelbare Folge. Ist nämlich Σ_1 das gegebene Schema von V und Σ_2 ein Schema von V, aus dessen m-dimensionalen Zellen $W^{(m)}$ zusammengesetzt werden kann, so folgt hieraus, daß $W^{(m)}$ einem aus den Zellen von Σ_1 zusammengesetzten Gebilde homolog sei, und da $W^{(m)}$ eine beliebig herausgegriffene m-dimensionale Mannigfaltigkeit vorstellt, so ist damit die Annahme II gerechtfertigt.

---

[2]) Compl. 1, § 6.

[3]) Es sind dies in etwas anderer Anordnung die Überlegungen Poincarés in Compl. 1, §§ 5, 6.

[4]) Hierunter ist folgendes zu verstehen: Die Mannigfaltigkeit V denke man sich in irgend einer Weise, etwa durch ein Schema Σ definiert. Man denke sich dann eine „Einteilung von V in ein Schema Σ_1" gegeben, nicht nur durch Angabe jener Bestimmungsstücke, welche das Schema Σ_1 selbst charakterisieren, sondern auch durch Angabe jener Punktmengen von Punkten aus V, aus welchen jede einzelne Zelle von Σ_1 bestehen soll. In gleicher Weise ist die „Einteilung von V in das Schema Σ_2" gegeben zu denken. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß z. B. die Einteilung von V in das Schema Σ_1 mit der durch Σ gelieferten Einteilung zusammenfällt (wozu natürlich notwendig, aber nicht hinreichend ist, daß die Schemata Σ und Σ_1 für sich, auch abgesehen von ihrer „Lagerung" in V, identisch sind).

Um B zu begründen, werden die beiden folgenden Sätze herangezogen:

a) Wenn zwei Einteilungen Σ_1 bezw. Σ_2 von V in ein Zellsystem vorliegen, so gibt es eine Einteilung von V in ein Schema Σ_3, derart, daß diese Einteilung sowohl aus der Einteilung in das Schema Σ_1 als aus der Einteilung in das Schema Σ_2 durch Unterteilung gewonnen werden kann.[5])

b) Wenn aus dem Schema Σ einer Mannigfaltigkeit durch Unterteilung ein Schema Σ' abgeleitet wird, so sind alle aus den Zellen von Σ' zusammengesetzten m-dimensionalen Gebilde homolog mit aus den Zellen von Σ zusammengesetzten m-dimensionalen Gebilden.

Aus diesen Sätzen ergibt sich tatsächlich der Satz B sofort. Denn ein aus den Zellen von Σ_2 zusammengesetztes Gebilde kann auch als zusammengesetzt aus den Zellen von Σ_3 aufgefaßt werden, und ist somit zufolge b einem aus den Zellen von Σ_1 zusammengesetzten Gebilde homolog.

Von den Sätzen a, b, auf die Satz B zurückgeführt ist, wird sich b unschwer als richtig erweisen (siehe § 8). Nicht das Gleiche gilt von a.[6]) Das folgende einfache Beispiel genügt, dies zu zeigen. Man nehme für V die Kreisfläche $x^2+y^2\leq 1$ und betrachte die beiden Einteilungen von V in zwei Lamellen, in die V durch den in V verlaufenden Teil der Linie $y=0$, bezw. der Linie $y=x\sin\frac{1}{x}$ ($y=0$ für $x=0$) zerlegt wird. Da diese beiden Linien einander innerhalb V unendlich oft schneiden, versagt hier offenbar die Gültigkeit des Satzes a.[7])

Ein allen Verhältnissen Rechnung tragender Beweis des Satzes B ist also noch ausständig. Hingegen erscheint der Satz A, zu dessen Besprechung wir uns nun wenden, direkt als unhaltbar, so plausibel er zunächst auch sein mag. Ziehen wir, dies zu erörtern, jenes Beispiel heran, das in § 6 bei der Diskussion der Annahme I eingeführt wurde. Da die geschlossene Linie U^1 dieses Beispiels eine in der einfach zusammenhängenden berandeten Mannigfaltigkeit V gelegene Linie ist, so müßte es dem Satze A zufolge eine Zerlegung von V in ein Zellsystem geben von der Art, daß U^1 aus Kanten dieses Zellsystems zusammengesetzt erscheint. Die Anschauung lehrt, daß ein solches Zellsystem nicht möglich ist. Damit

[5]) Dies bedeutet (vgl. Anm. 4): 1. Σ_3 ist ein abgeleitetes Schema von Σ_1 (die Zellen von Σ_3 lassen sich also unterscheiden in Zellen ζ', die mit Zellen ζ von Σ_1 oder Teilen derselben übereinstimmen, und neue Zellen ζ''); 2. bilden $\zeta'_1, \dots \zeta'_\mu$ die Zelle ζ_1, so besteht ζ_1 gerade aus jenen Punkten von V, die einer der Zellen ζ'_i angehören; 3. die gleiche Beziehung besteht zwischen den Einteilungen von V in Σ_3 und Σ_2.

[6]) Wäre dieser Satz a zutreffend, so würde aus ihm ohne weiteres der in § 2 besprochene hypothetische Satz über die Homöomorphie der Schemata homöomorpher Mannigfaltigkeiten folgen.

[7]) Hingegen behält Satz B für dieses Beispiel ersichtlich seine Richtigkeit.

ist gezeigt, daß der Satz A (wenigstens wenn man keine Erweiterung des Begriffes der Schemata auf solche mit unendlich vielen Zellen versucht) keine allgemeine Gültigkeit besitzt.

Das gegebene Beispiel zeigt aber auch, daß die Annahme II selbst unzutreffend ist. Es ist ja anschaulich einleuchtend, daß U^1 nicht einem Kantenzug eines Schema von V homolog sein kann. Dies wäre vielmehr nur möglich, wenn man den Homologiebegriff so erweitern wollte, daß auch Summen von unendlich vielen Homologien gebildet werden dürfen. Eine derartige Erweiterung zu versuchen, liegt uns hier ferne.

Es stützen sich dem Gesagten zufolge die Überlegungen, die von der zuerst gegebenen Definition der Bettischen Zahlen zu der Formel (5) führen, auf verschiedene Annahmen, die entweder (bei Beibehaltung der adoptierten Definitionen) als unzulässig oder doch als nicht strenge erwiesen anzusehen sind. Der bedeutsame heuristische Wert, der gerade in diesem Übergange von der ursprünglichen Definition zu der neuen, allein auf das Schema basierten Formulierung liegt, bleibt von den gemachten Einwänden völlig unberührt. Doch bieten dieselben immerhin Grund genug, von der früheren Definition absehend, für das Folgende an der durch die Formel (5) gegebenen Definition der Zahlen P_m festzuhalten.

§ 8.

Über die topologischen Invarianten P_m.

Dieser Paragraph enthält zunächst die Ausführung eines der Lektüre von Poincarés Compl. 2. zu entnehmenden Beweises dafür, daß die Zahlen $P_m = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1} + 1$ topologische Invarianten der Schemata sind. Weiterhin mögen der fundamentale Satz Poincarés über die Bettischen Zahlen zweiseitiger geschlossener Mannigfaltigkeiten und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Homöomorphie zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten besprochen und schließlich einige Bemerkungen über die aus den Zahlen P_m errechenbare Invariante $N = \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots \pm \alpha_n$ beigefügt werden.

Der zunächst zu erbringende Nachweis wird dann geführt sein, wenn gezeigt ist, daß P_m sich bei elementaren Unterteilungen nicht ändert. Es werde also eine elementare Unterteilung des Schema Σ einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V betrachtet, die in der Zerlegung einer l-dimensionalen Zelle von Σ in zwei Zellen durch Einführung einer neuen $(l-1)$-dimensionalen Zelle besteht $(1 \leq l \leq n)$. Die Zahlen α'_m, γ'_m mögen für das abgeleitete Schema Σ' dieselbe Bedeutung haben wie α_m, γ_m für das ursprüngliche Schema Σ. Dann hat man zunächst

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\alpha'_l = \alpha_l + 1, \quad \alpha'_{l-1} = \alpha_{l-1} + 1 \\ &\alpha'_m = \alpha_m \quad \text{für} \quad m \neq l-1, l. \end{aligned}$$

Sei ferner a_r^l die Zelle von Σ, die in zwei Zellen zerlegt wird. Die Berandung dieser Zelle ist eine sphärische $(l-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die mit $S^{(l-1)}$ bezeichnet werde. Die betrachtete Unterteilung besteht dann darin, daß auf $S^{(l-1)}$ eine diese Mannigfaltigkeit in zwei $(l-1)$-dimensionale Elementarmannigfaltigkeiten $E_1^{(l-1)}, E_2^{(l-1)}$ zerlegende[1]) sphärische $(l-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $S^{(l-2)}$, die aus den auf $S^{(l-1)}$ liegenden $(l-2)$-dimensionalen Zellen zusammengesetzt ist, ausgewählt wird und daß durch $S^{(l-2)}$ eine, a_r^l in zwei Zellen $a_{r_1}^l, a_{r_2}^l$ zerlegende $(l-1)$-dimensionale Elementarmannigfaltigkeit a_s^{l-1} gelegt wird.[2]) $S^{(l-2)}$ ist also die Berandung von a_s^{l-1} und der Sinn von a_s^{l-1} werde etwa so festgelegt, daß $+a_s^{l-1}$ zusammen mit $E_1^{(l-1)}$ und ebenso $-a_s^{l-1}$ zusammen mit $E_2^{(l-1)}$, je eine mit einem Sinn versehene sphärische $(l-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden.[3]) Vergleicht man nun

---

[1]) Die Mannigfaltigkeiten $E_1^{(l-1)}$, $E_2^{(l-1)}$ werden mit einem Sinn versehen angenommen, der mit dem für $S^{(l-1)}$ festgelegten Sinne in Übereinstimmung sein soll.

[2]) Im Falle $l=1$ erfährt diese Formulierung eine leichte Modifikation. $S^{(0)}$ ist das Paar der beiden Endpunkte der Kante a_r^1, $E_1^{(0)}$ bedeutet den einen, $E_2^{(0)}$ den anderen dieser Endpunkte und die Unterteilung wird einfach durch Markierung eines Punktes a_s^0 auf a_r^1 bewirkt.

[3]) Es mag beachtet werden, daß die Ausdrucksweise des Textes einer gewissen Verschärfung bedarf. Wenn nämlich von den „sphärischen Mannigfaltigkeiten“ $S^{(l-1)}, S^{(l-2)}$ und von den „Elementarmannigfaltigkeiten“ $E_1^{(l-1)}, E_2^{(l-1)}$ gesprochen wird, so sind diese Ausdrücke sozusagen nicht in bezug auf V, sondern in bezug auf die „durch a_r^l vorgestellte l-dimensionale Elementarmannigfaltigkeit“ zu verstehen. Damit ist folgendes gemeint. Betrachtet man die Gesamtheit aller Vorschriften, die das Schema Σ von V ausmachen, so wird zunächst damit begonnen, Elementarflächen zu definieren, und zwar jede derselben dadurch, daß eine Anzahl Kanten durch Zuordnung ihrer Endpunkte zu einer geschlossenen Linie zusammengefaßt und diese als Randlinie einer Elementarfläche genommen wird. Durch die späteren Zuordnungsvorschriften werden immer neue Zuordnungen zwischen gleichartigen Elementarflächen getroffen, so daß schließlich eine ganze Reihe von Elementarflächen, die einander zugeordnet sind, eine einzige Lamelle (= zweidimensionale Zelle) a_i^2 des Schema bilden. Von irgend einer solcherart zu a_i^2 gehörigen Elementarfläche soll gesagt werden, daß sie die durch a_i^2 vorgestellte zweidimensionale Elementarmannigfaltigkeit repräsentiere. Der weitere Aufbau des Schemas besteht in dem Zusammensetzen sphärischer zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten aus den Elementarflächen vermöge Zuordnungen der Randkanten. Diese sphärischen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten werden dann als Randflächen von dreidimensionalen Elementarmannigfaltigkeiten verwendet. Irgend eine solche Elementarmannigfaltigkeit, die vermöge der späteren Zuordnungen der Zelle a_i^3 zugehört, ist dann ein Repräsentant der durch a_i^3 vorgestellten dreidimensionalen Elementarmannigfaltigkeit. Die Fortführung dieser Betrachtung zeigt, was allgemein unter der durch a_i^m vorgestellten m-dimensionalen Elementarmannigfaltigkeit zu verstehen ist. Es ist aber klar, daß die Gesamtheit der Punkte der Zelle a_i^m im allgemeinen nicht eine in V gelegene Elementar-

die Poincaréschen Relationensysteme von Σ und Σ', so ist zunächst offenbar, daß die Relationen

$$a_i^m \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{m-1}} \varepsilon_{ij}^m a_j^{m-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots \alpha_m) \tag{11}$$

für $m > l + 1$ und $m < l - 1$ in beiden Systemen vollständig übereinstimmen, woraus für diese Werte von m auch $\gamma'_m = \gamma_m$ folgt. Wird ferner der positive Sinn von $a^l_{r_1}$ und $a^l_{r_2}$ übereinstimmend mit dem von a^l_r gewählt,[4]) so sind ersichtlich die im Relationensystem von Σ' stehenden Zahlen $\varepsilon^{l+1}_{ir_1}$, $\varepsilon^{l+1}_{ir_2}$ beide gleich der im Relationensystem von Σ stehenden Zahl ε^{l+1}_{ir}, während alle übrigen Zahlen ε^{l+1}_{ij} von Σ ebenfalls in Σ' vorkommen. Sonach ist auch $\gamma'_{l+1} = \gamma_{l+1}$. Unter den Relationen

$$a^l_i \equiv \sum \varepsilon^l_{ij} a^{l-1}_j \tag{12}$$

kommen außer solchen Relationen, die in beiden Systemen vollständig übereinstimmen, im System von Σ noch die Relation

$$a^l_r \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{rj} a^{l-1}_j$$

und im System von Σ' die zwei Relationen

$$\begin{aligned} a^l_{r_1} &\equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{r_1 j} a^{l-1}_j + a^{l-1}_s \\ a^l_{r_2} &\equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{r_2 j} a^{l-1}_j - a^{l-1}_s \end{aligned} \tag{13}$$

---

mannigfaltigkeit, sondern nur ein in V gelegenes m-dimensionales Raumstück bildet, da ja durch die den Bildungsvorschriften der m-dimensionalen Elementarmannigfaltigkeiten nachfolgenden Vorschriften des Schema von V noch mancherlei Zuordnungen zwischen den verschiedenen Randelementen der m-dimensionalen Elementarmannigfaltigkeiten getroffen werden können. Im allgemeinen wird also auch $S^{(l-1)}$ bezw. $S^{(l-2)}$ keine in V gelegene sphärische Mannigfaltigkeit, sondern nur eine in der durch a^l_r vorgestellten Elementarmannigfaltigkeit liegende sphärische Mannigfaltigkeit sein und das Analoge gilt von den „Elementarmannigfaltigkeiten" $E_1^{(l-1)}$, $E_2^{(l-1)}$. Diesen Verhältnissen in allen Details durch eine vollständig genaue Fassung des Textes Rechnung zu tragen, wurde jedoch unterlassen, um bei diesen an sich ganz einfachen Verhältnissen die Darstellung nicht unnötig und auf Kosten der Deutlichkeit zu komplizieren.

[4]) Diese nur der Einfachheit zuliebe gemachte Annahme ist natürlich unwesentlich.

vor, wobei $\varepsilon^l_{rj} = \varepsilon^l_{r_1 j} + \varepsilon^l_{r_2 j}$ ist, und die Linearformen

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{rj} a^{l-1}_j, \quad \sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{r_1 j} a^{l-1}_j, \quad \sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{r_2 j} a^{l-1}_j$$

der Reihe nach die Ausdrücke von $S^{(l-1)}$, $E^{(l-1)}_1$, $E^{(l-1)}_2$ durch die Zellen von Σ sind. Der Vergleich der Zahlen ε^l_{ij} in den beiden Relationensystemen ergibt $\gamma'_l = \gamma_l + 1$. Endlich ist offenbar, daß alle Relationen

$$a^{l-1}_i \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{l-2}} \varepsilon^{l-1}_{ij} a^{l-2}_j \tag{14}$$

des Systems von Σ auch in dem System von Σ' stehen, welch letzteres außerdem eine Relation

$$a^{l-1}_s \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{l-2}} \varepsilon^{l-1}_{sj} a^{l-2}_j \tag{15}$$

enthält, dessen rechte Seite der Ausdruck für $S^{(l-2)}$ durch die Zellen von Σ ist. Da nun

$$a^{l-1}_s + \sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{r_1 j} a^{l-1}_j \equiv 0$$

ist, so muß die rechte Seite von (15) eine lineare Verbindung der rechten Seiten der Relationen (14) sein, woraus $\gamma'_{l-1} = \gamma_{l-1}$ folgt.

Es werde noch folgende Bemerkung eingeschaltet. Der Anblick der Relationen (12) und (13) zeigt, daß jedes zweiseitige geschlossene aus den Zellen von Σ' zusammengesetzte l-dimensionale Gebilde die Zellen $a^l_{r_1}$, $a^l_{r_2}$ nur mit dem gleichen Zahlenfaktor versehen, also nur in der Verbindung $a^l_{r_1} + a^l_{r_2}$ enthalten kann. Da für $a^l_{r_1} + a^l_{r_2}$ auch a^l_r geschrieben werden kann, so läßt sich jedes solche Gebilde als ein aus den Zellen von Σ zusammengesetztes darstellen. Da ferner

$$a^{l-1}_s \sim -\sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}} \varepsilon^l_{r_1 j} a^{l-1}_j$$

ist, so ist jedes aus den Zellen von Σ' zusammengesetzte $(l-1)$-dimensionale Gebilde einem aus den Zellen von Σ zusammengesetzten homolog. Für alle anderen Dimensionen ist der gleichlautende Satz trivial und damit ist der Satz b des § 7 nachgewiesen.

Die Zusammenstellung der vorstehend abgeleiteten Gleichungen

$$\gamma'_l = \gamma_l + 1,$$
$$\gamma'_m = \gamma_m, \text{ für } m \neq l$$

mit den Gleichungen (10) ergibt die zu beweisende Gleichheit der Zahlen P_m für die beiden Schemata Σ und Σ'.[5])

Es besteht der folgende von Poincaré[6]) bewiesene Satz: Sind $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ die Bettischen Zahlen einer zweiseitigen geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V, so ist[7])

$$P_m = P_{n-m} \quad (m = 1, 2, \ldots n-1).$$

Der Beweis erfolgt mit Hilfe zweier zu einander reziproker Schemata Σ und $\overline{\Sigma}$ von V. Es mögen a_i^m, ε_{ij}^m, α_m, γ_m, P_m für das Schema Σ und das zugehörige Poincarésche Relationensystem die bisherige Bedeutung, $\overline{a}_i^m$, $\overline{\varepsilon}_{ij}^m$, $\overline{\alpha}_m$, $\overline{\gamma}_m$, $\overline{P}_m$ die entsprechende Bedeutung für $\overline{\Sigma}$ haben. Dabei möge $\overline{a}_i^{n-m}$ die der Zelle a_i^m von Σ entsprechende Zelle von $\overline{\Sigma}$ sein; bei geeigneter Wahl des Sinnes der Zellen von $\overline{\Sigma}$[8]) ist dann

$$\overline{\varepsilon}_{ij}^m = \varepsilon_{ji}^{n-m+1} \tag{16}$$

---

[5]) Man sieht, daß natürlich auch die Zahlen $\alpha_0 - \gamma_1$ und $\alpha_n - \gamma_n$, durch die P_0 und P_n definiert werden konnten, für Σ und Σ' den gleichen Wert haben.

[6]) Compl. 1, § 8.

[7]) Diese Gleichung ist offenbar auch richtig für $m = 0$.

[8]) Bedienen wir uns der Vorstellung einer in bestimmter Weise gewählten, den Sinn von V liefernden Indikatrix, so ergibt sich der Sinn der Zelle $\overline{a}_i^{n-m}$ aus dem von a_i^m $(n > m > 0)$ durch folgende Forderung, wobei wir uns der Bezeichnung „m-dimensionales verallgemeinertes Tetraeder" für die m^{te} in jener Reihe von Figuren bedienen, die mit der Strecke, dem Dreieck und dem Tetraeder (Fälle $m = 1, 2, 3$) beginnt: Bedeutet M den Durchschnittspunkt von a_i^m und $\overline{a}_i^{n-m}$ (es wird natürlich vorausgesetzt, daß nur ein solcher Durchschnittspunkt existiert), so läßt sich die Indikatrix J von V in eine solche Lage bringen, daß der Punkt 1 von J auf M fällt, daß das durch die Punkte $1, 2, \ldots m+1$ bestimmte zur Berandung von J gehörige m-dimensionale verallgemeinerte Tetraeder T_m ganz in die Zelle a_i^m zu liegen kommt, die sonst keine Punkte mit J gemein haben soll, daß analog das durch $1, m+2, m+3, \ldots n+1$ bestimmte $(n-m)$-dimensionale verallgemeinerte Tetraeder T_{n-m} ganz in der Zelle $\overline{a}_i^{n-m}$, die sonst mit J keine Punkte gemein haben soll, liegt und daß dabei T_m, bezw. T_{n-m} eine positiv genommene Indikatrix von a_i^m, bezw. $\overline{a}_i^{n-m}$ werden, wenn ihre Eckpunkte in der angeschriebenen Reihenfolge genommen werden. Man denke sich ferner den Punkt $\overline{a}_i^0$ mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen (vgl. § 5, Anm. 2), je nachdem der Sinn von a_i^n mit dem von V übereinstimmt oder nicht, und entsprechend aus den Vorzeichen der Ecken a_i^0 den Sinn der Zellen $\overline{a}_i^n$ bestimmt.

und daher $\bar{\gamma}_m = \gamma_{n-m+1}$, woraus sich wegen $\bar{\alpha}_m = \alpha_{n-m}$

$$\bar{P}_m = \bar{\alpha}_m - \bar{\gamma}_m - \bar{\gamma}_{m+1} + 1 = \alpha_{n-m} - \gamma_{n-m+1} - \gamma_{n-m} + 1 = P_{n-m}$$

ergibt. Da aber infolge der Homöomorphie der Schemata Σ und $\bar{\Sigma}$, $\bar{P}_m = P_m$ ist, so folgt hieraus die Behauptung.

Es möge hier der bekannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Homöomorphie zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten gedacht werden. Man erhält dieselben mit Hilfe des leicht beweisbaren Satzes, daß jedes Schema einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit V einem Fundamentalpolygon Π von dem im folgenden beschriebenen Typus 1. bezw. 2. homöomorph ist, je nachdem V zwei- oder einseitig ist.

1. Π hat $4p + 3r_1 + 2r_0$ Seiten, wobei die paarweise zusammengefaßten Seiten (s_{4k-3}, s_{4k-2}), (s_{4k-1}, s_{4k}) für $k = 1, 2, \ldots p$, $(s_{4p+3l-2}, s_{4p+3l})$ für $l = 1, 2, \ldots r_1$ $(s_{4p+3r_1+2m-1}, s_{4p+3r_1+2m})$ für $m = 1, 2, \ldots r_0$ einander, und zwar durchwegs nach erster Art zugeordnet und die durch die geschlossenen Zyklen von Polygonecken $A_{4p+3r_1+2m-1,2} = A_{4p+3r_1+2m,1}$ repräsentierten Punkte von der Mannigfaltigkeit ausgenommen sind.[9])

2. Π hat $4q - 2 + 3r_1 + 2r_0$ Seiten, wobei die paarweise zusammengefaßten Seiten (s_{2k-1}, s_{4q-2k}) für $k = 1, 2, \ldots q$, nach zweiter Art und $(s_{2k}, s_{4q-2k-1})$ für $k = 1, 2, \ldots q-1$, $(s_{4q-2+3l-2}, s_{4q-2+3l})$ für $l = 1, 2, \ldots r_1$, $(s_{4q-2+3r_1+2m-1}, s_{4q-2+3r_1+2m})$ für $m = 1, 2, \ldots r_0$ nach erster Art einander zugeordnet und die Ecken des Schema $A_{4q-2+3r_1+2m-1,2} = A_{4q-2+3r_1+2m,1}$ von der Mannigfaltigkeit auszunehmende Punkte sind.

r_1, r_0 und p bezw. q sind topologische Invarianten des Schema, denn r_1 ist die Anzahl der Randlinien, r_0 die der isolierten Randpunkte und bezüglich p und q folgt dies, wenn man zunächst $r_0 = 0$ annimmt, aus den Formeln

$P_1 = 2p + r_1$ bezw. $2p + 1$, wenn V geschlossen ist, und

$P_1 = q + r_1$.

Natürlich gilt ebenso für $r_0 > 0$, daß Fundamentalpolygone mit verschiedenem p bezw. q nicht homöomorph sein können.[10]) Sonach ist die Übereinstimmung von r_1, r_0, P_1, d. h. von r_1, r_0, p bezw. r_1, r_0, q für die Homöomorphie zweier Schemata notwendig und hinreichend. p heißt bekanntlich das Geschlecht der Fläche, q die Anzahl der unabhängigen Wege, auf denen sich die Indikatrix umkehrt.

---

[9]) Bezüglich der Bezeichnungsweise vgl. § 2.

[10]) Im Falle $r_0 > 0$ wird $P_1 = 2p + r_1 + r_0$ bezw. $q + r_1 + r_0$ gesetzt; vgl. die Festsetzungen auf der letzten Seite des § 14.

Es sei zum Schluß dieses Paragraphen noch der topologischen Invariante[11]) der Schemata

$$N = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n$$

gedacht (daß dieselbe eine topologische Invariante der Schemata ist, zeigen die Formeln (10) unmittelbar), die mit den Bettischen Zahlen durch die eine Verallgemeinerung der bekannten Eulerschen Polyederformel darstellende Gleichung[12])

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^n \alpha_n =$$
$$= P_0 - P_1 + \cdots + (-1)^n P_n + \tfrac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

verbunden ist, die sich aus den Formeln (5) für $m = 0, 1, \ldots n$ unter Beachtung von $\gamma_0 = \gamma_{n+1} = 1$ sofort ergibt. Aus dieser Gleichung folgt der Satz:[13])

Die Invariante N ist für jede geschlossene Mannigfaltigkeit von ungerader Dimensionszahl gleich Null.

---

11) Es ist leicht zu sehen, daß N die einzige aus den Zahlen α_i gebildete topologische Invariante ist. Eine solche topologische Invariante $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$ kann nämlich in der Form $f(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_n)$ geschrieben werden, wo

$$\eta_i = \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^i \alpha_i$$

gesetzt ist, und die Betrachtung einer elementaren Unterteilung, bei der eine l-dimensionale Zelle in zwei zerlegt wird, liefert

$$f(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{l-2}, \eta_{l-1} \pm 1, \eta_l, \ldots \eta_n) = f(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_n), \quad (l = 1, 2, \ldots n),$$

d. h. f hängt nur von $\eta_n = N$ ab.

In analoger Weise beweist man, daß es außer $P_0, P_1, \ldots P_n$ keine anderen aus den Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ gebildeten topologischen Invarianten gibt, d. h. daß jede andere aus den Zahlen α_i, γ_i gebildete Invariante, die sich offenbar in der Form $f(P_0, P_1, \ldots P_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ ansetzen läßt, von den letzten n Argumenten unabhängig und also eine Funktion der P_i ist.

12) Vgl. Poincaré, An. Sit. § 18 und Compl. 1, § 3, pag. 301.

13) Poincaré, An. Sit. pag. 114. Man vergleiche noch Dyck, Math. Ann. 37, S. 295. Poincaré gab noch einen anderen nur auf die Bedingung von dem einfachen Zusammenhang der „Umgebungsmannigfaltigkeiten" (siehe § 3, Anm. 6 und § 4) sich stützenden Beweis (An. Sit. § 17). Am einfachsten wird der Satz wohl folgendermaßen aus den Eigenschaften der reziproken Schemata erhalten (in deren Konstruktionsmöglichkeit übrigens implicite die Bedingung des einfachen Zusammenhanges aller Umgebungsmannigfaltigkeiten steckt). Ist nämlich die Dimensionszahl $n = 2\nu + 1$, so ist wegen $\overline{\alpha}_m = \alpha_{n-m}$

$$N = \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots - \alpha_{2\nu+1} = -\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 - \cdots + \overline{\alpha}_{2\nu+1}$$

und anderseits als topologische Invariante

$$= \overline{\alpha}_0 - \overline{\alpha}_1 + \cdots - \overline{\alpha}_{2\nu+1}.$$

Die eben gemachten Bemerkungen lassen den Satz auch für einseitige geschlossene Mannigfaltigkeiten als richtig erkennen, während bei dem auf $P_m = P_{n-m}$ gestützten Beweise des Textes, wie bei dem Beweise für diese Formel, die Mannigfaltigkeit als zweiseitig vorausgesetzt ist.

III. In einer Mannigfaltigkeit gelegene einseitige geschlossene Mannigfaltigkeiten.

§ 9.

Den Bettischen Zahlen P_m analoge Invarianten Q_m.

Die ursprüngliche Definition der Bettischen Zahlen einer Mannigfaltigkeit V bezieht sich auf die zweiseitigen in V gelegenen geschlossenen Mannigfaltigkeiten und die Homologien zwischen denselben, wie dies in § 6 ausdrücklich erwähnt wurde.[1]) Es sollen nun auch die in einer Mannigfaltigkeit liegenden einseitigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten in Betracht gezogen werden.

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel. Es sei T_3 diejenige zweiseitige geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die man aus der Gesamtheit der Punkte einer Kugel $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ erhält, wenn man je zwei diametral gegenüberliegende Punkte der Kugeloberfläche als einen einzigen Punkt der zu definierenden Mannigfaltigkeit ansieht. T_3 ist dann ein im Endlichen gelegenes Abbild des projektiven dreidimensionalen Raumes. Man erhält ein Zellsystem Σ von T_3, wenn man die Kugeloberfläche durch einen Meridiankreis M in zwei Halbkugelflächen, den Meridiankreis durch den Nordpunkt A und den Südpunkt B der Kugel in zwei Kreisbögen f, g zerlegt, die Kugel als die einzige dreidimensionale Zelle a^3 ansieht und die beiden sie berandenden Halbkugelflächen einander so zuordnet, daß bezüglich des Kugelzentrums symmetrische Punkte einander entsprechen. (Da diese Zuordnung der beiden Oberflächenpolygone von a^3 von der ersten Art ist, so ist die Mannigfaltigkeit T_3 zweiseitig.) Hiedurch wird die Kante $f=AB$ der Kante $g=BA$, die Ecke A der Ecke B zugeordnet. Die beiden einander zugeordneten Halbkugelflächen stellen eine Lamelle a^2, die Kanten f, g eine Kante a^1, die Ecken A, B eine Ecke a^0 des Schema vor. Die Umgebungsmannigfaltigkeit von a^0 erfüllt die Forderung, einfach zusammenhängend zu sein.

Das Poincarésche Relationensystem für das Schema Σ von T_3 ist:

$$a^3 \equiv 0,$$
$$a^2 \equiv 2a^1;$$
$$a^1 \equiv 0.$$

Unter den aus der einzigen Lamelle des Schema erhältlichen zweidimensionalen Gebilden ha^2 gibt es ersichtlich überhaupt keine geschlossenen zweiseitigen, und im Einklange hiemit ergibt sich aus $\alpha_2=1$, $\gamma_2=1$, $\gamma_3=0$ die Bettische Zahl $P_2=1$. Hingegen

[1]) Dies hebt auch Heegaard, Diss. p. 64, hervor.

stellt die Gesamtheit der Punkte von a^2 offenbar eine geschlossene einseitige in T_3 liegende Fläche dar, die wir als das Abbild einer im projektiven Raume T_3 liegenden projektiven Ebene ansehen können.

Betrachtet man noch jenes Schema Σ', das aus Σ entsteht, indem man die Zelle a^3 durch die, eine neue Lamelle b^2 darstellende Kreisfläche durch M in zwei Zellen a_1^3, a_2^3 zerlegt und dessen Poincarésches Relationensystem aus den Relationen

$$a_1^3 \equiv a^2 - b^2, \quad a_2^3 \equiv -a^2 + b^2;$$
$$a^2 \equiv 2a^1, \qquad b^2 \equiv 2a^1;$$
$$a^1 \equiv 0$$

besteht, so stellt b^2 außer a^2 noch eine zweite einseitige geschlossene Fläche in T_3 vor. Die Fläche b^2 ist mit a^2 durch die Homologie

$$a^2 \sim b^2$$

verbunden. Dies leitet uns zur folgenden Fragestellung, die gleich ganz allgemein ausgesprochen werden soll und die den Betrachtungen, auf welchen die ursprüngliche Definition der Bettischen Zahlen fußt, aufs engste verwandt ist:

Gibt es in jeder n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V ein System von geschlossenen (zwei- oder einseitigen) m-dimensionalen ($m < n$) durch keine Homologie verbundenen Mannigfaltigkeiten $\Phi_1^{(m)}, \Phi_2^{(m)}, \ldots \Phi_r^{(m)}$ von der Art, daß jede, sei es zweiseitige, sei es einseitige geschlossene m-dimensionale in V gelegene Mannigfaltigkeit $\Phi^{(m)}$ bezüglich V einer Homologie

$$k\Phi^{(m)} + k_1\Phi_1^{(m)} + \cdots k_r\Phi_r^{(m)} \sim 0 \quad (k \neq 0)$$

genügt?

Wäre diese Frage zu bejahen, so wäre die Anzahl r offenbar von der Wahl des Systems unabhängig und die um 1 vermehrte Anzahl also eine der Zahl P_m vollständig analoge topologische Invariante Q_m von V. Aus den gleichen Gründen aber, aus denen von der ursprünglich gegebenen Definition der Bettischen Zahlen abgegangen wurde, unterlassen wir es, auf diesem Wege eine Einführung der auf die einseitigen Mannigfaltigkeiten bezüglichen topologischen Invarianten zu versuchen. Vielmehr wird uns in vollständiger Analogie mit dem Falle der Zahlen P_m der Übergang von den in V gelegenen einseitigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu den einseitigen geschlossenen Gebilden, — es soll sofort erklärt werden, was darunter zu verstehen ist, — und zwar insbesondere zu den aus den Zellen eines Schema von V zusammengesetzten Gebilden zu einer einwandfreien Definition der gesuchten topologischen Invarianten verhelfen. Hiezu führen wir zunächst den folgenden Satz an, der einem für zweiseitige geschlossene Mannigfaltigkeiten im § 5 ausgesprochenen Satze analog ist:

Sind $u_1^m, u_2^m, \ldots u_\alpha^m$ in einer Mannigfaltigkeit gelegene m-dimensionale Raumstücke ohne gemeinsame Innenpunkte und

$$\sum_{i=1}^{\alpha} u_i^m \equiv \sum h_i u_i^{m-1}, \tag{17}$$

und stellt die Gesamtheit der einem oder mehreren der Raumstücke u_i^m angehörenden Punkte eine einseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit dar, so sind alle Koeffizienten h_i der verschiedenen u_i^{m-1} auf der rechten Seite von (17) durch 2 teilbar,[2]) was abgekürzt durch

$$\sum_{i=1}^{\alpha} u_i^m \equiv 0 \quad [\text{mod. } 2] \tag{18}$$

bezeichnet werden möge. Diese Aussage ist ersichtlich von einer Wahl des Sinnes der einzelnen u_i^m unabhängig.

In den in der oben eingeführten Mannigfaltigkeit T_3 liegenden, einseitigen geschlossenen Flächen haben wir bereits ein einfaches Beispiel für diesen Satz kennen gelernt. Es ist zu beachten, daß (18) offenbar auch besteht, wenn die Punkte, die einem oder mehreren u_i^m angehören, in ihrer Gesamtheit eine zweiseitige geschlossene Mannigfaltigkeit bilden, nur daß sich in diesem Falle, und nur in diesem, der Sinn der einzelnen u_i^m so wählen läßt, daß die Koeffizienten h_i in (17) geradezu Null werden. Wir werden nun — und der vorstehende Satz enthält hiefür die Motivierung — ein m-dimensionales Gebilde $\sum h_i u_i^m$ als ein geschlossenes bezeichnen, wenn die Relation[3])

$$\sum h_i u_i^m \equiv 0 \quad [\text{mod. } 2]$$

besteht, d. h. also, wenn das betrachtete Gebilde im Sinne der im § 5 eingeführten symbolischen Kongruenzen einem $(m-1)$-dimen-

[2]) Wie in dem angeführten Satze des § 5, ist auch hier die Voraussetzung zu machen, daß die u_i^{m-1}, aus denen die Berandung der u_i^m zusammengesetzt ist, keine Innenpunkte gemeinsam haben.

[3]) Es mögen diese symbolischen Kongruenzen durch das Einschließen des Moduls in eckige Klammern unterschieden werden von Kongruenzen der Form

$$\sum h_i u_i^m \equiv \sum k_i u_i^m \quad (\text{mod. } 2),$$

die, im gewöhnlichen Sinne aufzufassen, die Teilbarkeit aller Zahlen $(h_i - k_i)$ durch m bedeuten.

sionalen Gebilde kongruent ist, dessen sämtliche Koeffizienten durch 2 teilbar sind. Besteht überdies die Relation

$$\sum h_i u_i^m = 0,$$

so heiße das Gebilde, wie bereits gesagt, ein zweiseitiges geschlossenes.

Eine Bemerkung ist hier noch beizufügen. Wenn die Gesamtheit der Raumstücke $u_1^m, u_2^m, \ldots u_\alpha^m$ eine einseitige geschlossene Mannigfaltigkeit bildet, so kann diese Mannigfaltigkeit durch jede der 2^α aus den u_i^m gebildeten Linearformen

$$\sum \delta_i u_i^m, \tag{19}$$

unter δ_i eine der Zahlen $+1$, -1 verstanden, symbolisiert werden und es genügen gleichzeitig alle diese Linearformen der Relation

$$\sum \delta_i u_i^m \equiv 0 \quad [\text{mod. } 2].$$

Bildet hingegen die Gesamtheit der Raumstücke $u_1^m, u_2^m, \ldots u_\alpha^m$ eine zweiseitige geschlossene Mannigfaltigkeit, besteht also die Relation

$$\sum u_i^m \equiv 0,$$

so erfüllt von allen übrigen Linearformen (19) nur noch $\sum(-u_i^m)$ die Relation

$$\sum \delta_i u_i^m \equiv 0.$$

Es stellen also nur die Linearformen $\sum u_i^m$ und $\sum(-u_i^m)$ dieselbe zweiseitige geschlossene Mannigfaltigkeit symbolisch dar, und auch diese beiden Symbole sind auseinanderzuhalten, wenn die zweiseitigen Mannigfaltigkeiten als mit einem Sinne versehen aufgefaßt werden. Aus diesem Grunde mögen, wenn es sich um die Betrachtung geschlossener, eventuell auch einseitiger Gebilde handelt, zwei durch verschiedene Linearformen $\sum h_i u_i^m$, $\sum h_i' u_i^m$ dargestellte, also arithmetisch verschiedene Gebilde, wenn sie der Kongruenz

$$\sum h_i u_i^m \equiv \sum h_i' u_i^m \quad (\text{mod. } 2)$$

genügen, als geometrisch nicht verschieden angesehen werden, während bei der nur auf die zweiseitigen geschlossenen Gebilde beschränkten Betrachtung arithmetisch verschiedene Gebilde als völlig verschieden galten.

Sei nun daran erinnert, daß sich die zuletzt gegebene und für das Weitere maßgebliche Definition der Zahlen P_m einer Mannigfaltigkeit V in folgende Fassung kleiden ließ:

Man mache die (oben mit III bezeichnete) Annahme, daß zwischen den Zellen eines Schema Σ von V keine anderen Homologien bestehen, als die aus dem Poincaréschen Relationensystem von Σ gewonnenen und die aus diesen rechnerisch ableitbaren. Unter dieser Annahme bestimme man ein System von Gebilden, das aus der Gesamtheit Γ aller aus den Zellen von Σ zusammengesetzten zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Gebilde so ausgewählt ist, daß zwischen den Gebilden des Systems keine Homologie, zwischen jedem Gebilde aus Γ und den Gebilden des Systems aber eine Homologie besteht. Die von der speziellen Wahl des Systems unabhängige Anzahl der Gebilde eines solchen Systems, um 1 vermehrt, werde als die der Mannigfaltigkeit V zugehörige Zahl P_m bezeichnet.

Wörtlich mit dieser Definition von P_m übereinstimmend, nur unter Weglassung des Wortes „zweiseitig“, werde nun die der Mannigfaltigkeit V zugehörige Zahl Q_m definiert. Es ergibt sich sofort das Bestehen der Ungleichung:

$$Q_m \geqq P_m .$$

Die gegebene Definition von Q_m bedarf nur insoferne einer Ergänzung, als die Existenz eines Systems geschlossener Gebilde von den geforderten Eigenschaften zu erweisen ist. Daß für zwei solche Systeme die Anzahl der Gebilde die gleiche sein muß, ist dann klar. Der erforderliche Nachweis soll im folgenden Paragraphen auf einem Wege erbracht werden, der gleichzeitig eine Bestimmung der Differenz $Q_m - P_m$ durch bereits bekannte topologische Invarianten, nämlich die von Poincaré entdeckten Torsionszahlen, liefert.

§ 10.

Die Poincaréschen Torsionszahlen. Bestimmung von Q_m.

Es seien in der Bezeichnungsweise der §§ 5, 6 ε_{ij}^m die Koeffizienten des Poincaréschen Relationensystems eines Schema einer Mannigfaltigkeit und $\omega_1^m, \omega_2^m, \ldots \omega_{\gamma_m}^m$ die von Null verschiedenen Elementarteiler der aus den Zahlen ε_{ij}^m gebildeten Matrix. Es sollen dann diejenigen unter den Zahlen ω_h^m, die > 1 sind, als Torsionszahlen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung[1]) der Mannigfaltigkeit bezeichnet werden.

[1]) Bei Poincaré: „Coefficients de torsion“. (Compl. 2, p. 301.) Wenn man die mit ε_{ij}^m, ω_h^m, γ_m, β_m bezeichneten Größen mit ε_{ij}^{m-1}, ω_h^{m-1}; γ_{m-1}, β_{m-1} bezeichnen wollte, würde dies mit der hier eingeführten Zählung der Ordnung der Torsionszahlen (in meiner oben zitierten Note in den Wiener Ber. wurden die Torsionszahlen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Textes Torsionszahlen m^{ter} Ordnung genannt) in besserem Einklang stehen, was jedoch unterlassen wurde, um von der Bezeichnungsweise in den grundlegenden Arbeiten Poincarés nicht abzuweichen. Diese Zählung der Ordnung der Torsionszahlen steht aber einerseits in Übereinstimmung mit dem Resultat des § 14, daß durch die Fundamentalgruppe einer

Wenn man, wie in § 8, das Poincarésche Relationensystem für ein Schema Σ und ein aus Σ durch eine elementare Unterteilung hervorgegangenes Schema Σ' vergleicht, so erkennt man, daß die aus dem Schema Σ abgeleiteten Torsionszahlen mit den aus Σ' abgeleiteten übereinstimmen, und die Torsionszahlen also tatsächlich topologische Invarianten der Schemata sind.[2]) Es wird sich zeigen, daß man bei Kenntnis von P_m und der Poincaréschen Torsionszahlen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung auch Q_m zu berechnen im stande ist.

Um ein System geschlossener m-dimensionaler Gebilde mit den bei der Definition von Q_m besprochenen Eigenschaften zu gewinnen, werde auf das Poincarésche Relationensystem eines Schema Σ und seine im § 6 besproehene reduzierte Form (6) zurückgegriffen. Aus derselben geht hervor, daß ein Gebilde

$$\sum_{i=1}^{\alpha_m} h_i a_i^m = \sum_{i=1}^{\alpha_m} k_i b_i^m$$

nur dann geschlossen sein kann, wenn die Zahlen

$$k_1 \omega_1^m, k_2 \omega_2^m, \ldots k_{\gamma_m} \omega_{\gamma_m}^m$$

Mannigfaltigkeit V — und diese Gruppe bezieht sich ja auf die geschlossenen eindimensionalen Mannigfaltigkeiten in V — sowohl P_1 als die Torsionszahlen „erster Ordnung“ bestimmt sind und findet anderseits ihre Begründung darin, daß die Matrix der Zahlen ε_{ij}^1 keine Elementarteiler > 1 hat (siehe Poincaré, Compl. 2, p. 307). Es beruht dies auf folgender Eigenschaft der Matrix: Falls in der i^{ten} Zeile nicht alle Zahlen ε_{ij}^1 Null sind, so sind nur zwei Zahlen von Null verschieden und von diesen ist die eine gleich $+1$, die andere gleich -1. Sei etwa $\varepsilon_{ih}^1 = +1$ und $\varepsilon_{ik}^1 = -1$. Man kann $i = 1, h = 1, k = 2$ annehmen, da dies durch Umordnungen der Reihenfolge der Zeilen und Kolonnen stets erreicht werden kann. Werden nun die Elemente der ersten Kolonne zu den entsprechenden der zweiten Kolonne addiert und hierauf die erste Zeile mit $-\varepsilon_{i1}^1$ multipliziert zur i^{ten} Zeile addiert, $(i = 2, 3, \ldots)$, so erhält man eine Matrix der Gestalt

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & \ldots \\ 0, & \zeta_{11}, & \zeta_{12}, & \ldots \\ 0, & \zeta_{21}, & \zeta_{22}, & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \tag{20}$$

wobei die Matrix aus den Zahlen ζ_{ij}, die eine Zeile und eine Kolonne weniger hat als die ursprüngliche Matrix, wie man leicht sieht, wieder die oben genannte Eigenschaft der Matrix der ε_{ij}^1 besitzt. Da aber die Matrix (20) die gleichen Elementarteiler hat wie die Matrix der ε_{ij}^1, so erkennt man durch Induktion, daß Elementarteiler > 1 nicht auftreten können. (Das eingeschlagene Schlußverfahren zeigt auch, daß $\gamma_1 = \alpha_0 - P_0$ ist, was in der Anm. 5 des § 6 verwendet wurde.)

[2]) Siehe Poincaré, Compl. 2. Beim Heranziehen des reziproken Schema und der Relation (16) gelangt man zu dem Satze (Poincaré, a. a. O.): Für eine zweiseitige geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit stimmen die Torsionszahlen m^{ter} Ordnung mit denen $(n-m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung überein.

durch zwei teilbar sind. Seien nun β_m von den Zahlen ω_i^m, etwa $\omega^m_{\gamma_m-\beta_m+1}, \ldots \omega^m_{\gamma_m-1}, \omega^m_{\gamma_m}$ gerade, die übrigen ungerade, so müssen $k_1, k_2, \ldots k_{\gamma_m-\beta_m}$ durch zwei teilbar sein, wenn das betrachtete Gebilde geschlossen sein soll, und dieses muß also nach dem Modul 2 einem Gebilde der Form

$$\sum_{i=\gamma_m-\beta_m+1}^{\alpha_m} k_i b_i^m$$

kongruent sein. Diese notwendige Bedingung ist ersichtlich auch hinreichend.

Man sieht also zunächst, daß sich alle geschlossenen m-dimensionalen Gebilde linear aus den $\alpha_m-\gamma_m+\beta_m$ geschlossenen Gebilden

$$b^m_{\gamma_m-\beta_m+1}, b^m_{\gamma_m-\beta_m+2}, \ldots b^m_{\alpha_m} \tag{21}$$

zusammensetzen lassen, wenn man von additiven durch zwei teilbaren Linearformen, die ja zu geometrisch nicht verschiedenen Gebilden führen, absieht. Die Gebilde (21) aber sind nicht nur sämtlich geometrisch von einander verschieden, sondern es kann auch wegen der linearen Unabhängigkeit dieser Formen der a_i^m keines dieser Gebilde nach dem Modul 2 einer linearen Kombination der übrigen kongruent sein. Von den Gebilden (21) sind die letzten $\alpha_m-\gamma_m$ zweiseitig, die ersten β_m einseitig.

Es handelt sich nun um die Homologien zwischen den Gebilden (21), und zwar, da die Annahme III zu Grunde zu legen ist, um die aus dem Poincaréschen Relationensystem abgeleiteten. Diese Homologien lassen sich, wie bereits im § 6 bemerkt, als Homologien zwischen den zweiseitigen geschlossenen Gebilden $b^m_{\gamma_m+1}, \ldots b^m_{\alpha_m}$ darstellen,[3]) und zwar erhält man γ_{m+1} unabhängige Homologien, aus denen sich alle übrigen rechnerisch ableiten lassen. Es ergibt sich hieraus, analog wie im § 6 bei der entsprechenden für zweiseitige geschlossene Gebilde angestellten Betrachtung, daß man ein System von $t=\alpha_m-\gamma_m+\beta_m-\gamma_{m+1}$ durch keine Homologie verbundenen, aus den Zellen des Schema zusammengesetzten, geschlossenen m-dimensionalen Gebilden aufstellen kann, derart, daß jedes andere solche Gebilde zusammen mit diesen t Gebilden

[3]) Wenn also $g_1^m, g_2^m, \ldots$ geschlossene m-dimensionale Gebilde sind, unter denen auch einseitige vorhanden sind, und es besteht zwischen ihnen die Homologie

$$\sum h_i g_i^m \sim 0,$$

so läßt sich die auf der linken Seite stehende Linearform der Zellen a_i^m stets als eine lineare Kombination geeignet gewählter zweiseitiger geschlossener Gebilde darstellen. Am obigen Beispiele der Mannigfaltigkeit T_3 ist dies für die Homologie $a^2-b^2 \sim 0$ sofort zu bestätigen.

einer Homologie genügt. In dem Nachweise der Existenz eines solchen Systems ist die erforderliche Ergänzung zur Definition von Q_m geleistet und gleichzeitig die Formel

$$Q_m = t + 1 = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1} + \beta_m + 1 = P_m + \beta_m$$

gefunden.

β_m, die Anzahl der geraden Zahlen unter den Zahlen $\omega_1^m, \omega_2^m, \ldots \omega_{\gamma_m}^m$, ist nun nichts anderes als die Anzahl der geraden Torsionszahlen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Mannigfaltigkeit und wir haben den Satz:[4])

Die Differenz $Q_m - P_m$ ist gleich der Anzahl der geraden Torsionszahlen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Was die Bestimmung der Zahl β_m anlangt, so sei bemerkt, daß dieselbe nicht notwendig die Bestimmung der Elementarteiler $\omega_1^m, \omega_2^m, \ldots \omega_{\gamma_m}^m$ erfordert. Sei nämlich das Poincarésche Relationensystem irgendwie in eine Gestalt von der Form

$$\begin{aligned} b_i^m &\equiv \tau_i^m c_i^{m-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots \gamma_m) \quad (\tau_i^m > 0) \\ b_i^m &\equiv 0 \qquad\qquad (i = \gamma_m + 1, \ldots \alpha_m) \end{aligned}$$

gebracht, unter $b_1^m, b_2^m, \ldots b_{\alpha_m}^m$ bezw. $c_1^{m-1}, c_{2,1}^{m-1} \ldots c_{\alpha_{m-1}}^{m-1}$ linear homogene Formen der a_i^m bezw. a_i^{m-1} von der Determinante 1 verstanden, dann ist β_m auch die Anzahl der geraden unter den Zahlen τ_i^m. Es beruht dies auf dem leicht einzusehenden Satze, daß die Anzahl der durch irgend eine Primzahl p (also speziell auch durch 2) teilbaren Elementarteiler der Matrix

$$\begin{matrix} \tau_1^m, & 0, & 0 \ldots \\ 0, & \tau_2^m, & 0 \ldots \\ 0, & 0, & \tau_3^m, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

gleich ist der Anzahl der durch p teilbaren Zahlen τ_i^m.

IV. Die Fundamentalgruppe.

§ 11.

Die Poincaréschen Zahlen einer diskreten Gruppe.

Es mögen in diesem Paragraphen einige der Gruppentheorie angehörige Betrachtungen eingeschaltet werden, da uns im folgenden gewisse den zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten zugehörige diskrete Gruppen beschäftigen werden. Dabei ist zu bemerken,

[4]) Siehe § 1 der oben zitierten Note in den Wien. Ber. (1906).

daß die Elemente dieser Gruppen nicht Operationen von bestimmter Bedeutung sind, daß vielmehr nur die Gesetze für die Zusammensetzung dieser Elemente in Betracht kommen, und wir es also mit dem allgemeinen Gruppenbegriff zu tun haben.

Diese Zusammensetzungsgesetze der zu betrachtenden Gruppen und damit nach der genannten Auffassung diese Gruppen selbst, sollen in der folgenden bekannten Weise gegeben sein. Zunächst sei eine Anzahl[1]) von Elementen (Operationen) $s_1, s_2, \ldots s_n$ der Gruppe gegeben, die die erzeugenden Operationen der Gruppe heißen sollen.[2]) Man erhält dann die Gesamtheit der Elemente der Gruppe durch Zusammensetzung aus den Operationen $s_1, s_2, \ldots s_n$ und den inversen Operationen $s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots s_n^{-1}$. Jedes Element der Gruppe läßt sich somit in die Gestalt setzen

$$s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_n^{\alpha_n} s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} \ldots \tag{22}$$

wo die $\alpha_i, \beta_i \ldots$ ganze Zahlen (positiv, negativ oder Null) bedeuten, und jedes Symbol (22) stellt ein bestimmtes Element der Gruppe dar. Hingegen wird im allgemeinen ein Element der Gruppe auf verschiedene Arten in der Form (22) darstellbar sein. Außer durch die Angabe der erzeugenden Operationen soll die Gruppe nämlich noch definiert sein durch gewisse zwischen denselben bestehende „definierende Relationen"

$$F_i(s_1, s_2, \ldots s_n) = 1 \quad (i = 1, 2 \ldots m), \tag{23}$$

deren linke Seiten $F_i(s_1, s_2, \ldots s_n)$ Ausdrücke von der Form (22) sind und welche besagen, daß die Ausdrücke $F_1(s_1, s_2, \ldots s_n)$, $F_2(s_1, s_2, \ldots s_n), \ldots F_m(s_1, s_2, \ldots s_n)$ sämtlich Symbole für die identische Operation 1 der Gruppe vorstellen und daß überhaupt zwei Ausdrücke, die sich unter Zuhilfenahme der Relationen (23) als gleich erweisen lassen, Symbole für ein und dasselbe Element der Gruppe sein sollen. In dieser Weise ist also durch Angabe der erzeugenden Operationen und der definierenden Relationen eine Gruppe vollständig bestimmt.

Man bemerkt sofort, daß es vorkommen kann, daß durch zwei verschiedene Systeme von erzeugenden Operationen und definierenden Relationen, Gruppen definiert werden, die einander isomorph[3]) sind und also im Sinne des allgemeinen Gruppenbegriffes eine und dieselbe Gruppe repräsentieren. Doch ist weder das allgemeine Problem gelöst, die Gesamtheit all der verschiedenen Erzeugungsweisen, welche eine und dieselbe Gruppe definieren,

[1]) Wir beschränken uns auf Gruppen, die aus einer endlichen Anzahl erzeugender Operationen zusammensetzbar sind.

[2]) Die identische Gruppe kann man durch das Fehlen sowohl von erzeugenden Operationen als auch von den später besprochenen definierenden Relationen definiert denken.

[3]) Unter „isomorph" ist hier stets „holoedrisch isomorph" zu verstehen.

theoretisch zu überblicken, noch auch nur ein Mittel gefunden,[4]) um im speziellen Falle zu entscheiden, ob zwei durch verschiedene Systeme erzeugender Operationen und definierender Relationen gegebene Gruppen identisch, d. h. also isomorph sind. Eine notwendige Bedingung aber dafür, daß zwei in verschiedener Weise erzeugte Gruppen isomorph seien, wird im folgenden beigebracht werden. Sie besteht in der Gleichheit der aus den Systemen definierender Relationen abzuleitenden Poincaréschen Zahlen der beiden Gruppen. Doch möge, ehe die Definition dieser Zahlen gegeben werden soll, der Beziehung zwischen zwei definierenden Relationensystemen, welche isomorphe Gruppen bestimmen, gedacht werden.

Es werde zunächst eine Bemerkung über die Relationen eingeschaltet, die aus einem gegebenen System von Relationen

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \ldots A_k = 1 \tag{24}$$

gefolgert werden können. Unter $A_1, A_2, \ldots A_k$ sind dabei aus den erzeugenden Operationen nach Art des Ausdruckes (22) zusammengesetzte Potenzprodukte zu verstehen. Aus jeder der Relationen (24) folgt dann diejenige, die man erhält, indem man den inversen Ausdruck der linken Seite bildet und der identischen Operation gleichsetzt. Man erhält so die Relationen[5])

$$A_1^{-1} = 1, \; A_2^{-1} = 1, \ldots A_k^{-1} = 1. \tag{25}$$

Bedeutet weiters L irgend einen Ausdruck derselben Art wie die Ausdrücke $A_1, A_2, \ldots$, so erhält man, wenn man eine der Relationen (24) etwa $A_1 = 1$ herausgreift, eine Folgerelation, indem man

$$L^{-1} A_1 L = 1$$

bildet. Eine andere Art, aus (24) eine Folgerelation zu bilden, besteht darin, irgend zwei Relationen aus (24) (die jedoch nicht notwendig verschieden sein müssen) herauszugreifen, etwa $A_1 = 1$ und $A_2 = 1$, und aus ihnen die Relation

$$A_1 A_2 = 1$$

abzuleiten. Setzt man voraus, daß das Relationensystem (24) so beschaffen ist, daß es die Relationen (25) bereits enthält, so kann man sagen: Durch sukzessive Anwendung der beiden zuletzt angegebenen Bildungsarten von Folgerelationen läßt sich jede Relation, die aus (24) gefolgert werden kann, gewinnen, wenn man jedesmal,

[4]) Im Falle endlicher Gruppen läßt sich diese Entscheidung selbstverständlich immer herbeiführen. Doch fehlt es an einem Kriterium, welches im Falle einer vorgelegten nach der besprochenen Erzeugungsweise definierten Gruppe jederzeit zu entscheiden gestattet, ob die Gruppe endlich sei oder nicht.

[5]) Der inverse Ausdruck A_i^{-1} von A_i ist dadurch definiert, daß identisch $A_i A_i^{-1} = 1$ sein muß.

wenn man eine Folgerelation gebildet hat, dieselbe dem Relationensystem als neue Relation beifügt und die nächste Folgerelation aus dem so erweiterten Relationensystem ableitet. Man kann dies auch in folgender Weise zusammenfassen:

Enthält das Relationensystem (24) die inversen Relationen (25), so stellt sich jede Folgerelation aus demselben in der Form

$$L_1 A_{i_1} L_2 A_{i_2} L_3 \ldots A_{i_r} L_{r+1} = 1$$

dar, wenn $i_1, i_2, \ldots i_r$ irgend welche Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots k$ und $L_1, L_2, \ldots L_{r+1}$ aus den erzeugenden Operationen zusammengesetzte Ausdrücke der Form (22) sind, die die Gleichung

$$L_1 L_2 \ldots L_{r+1} = 1$$

identisch befriedigen.

Zur Betrachtung von Relationensystemen, welche dieselbe Gruppe definieren, übergehend, führen wir zunächst zwei spezielle Fälle an.

Im ersten Falle seien $s_1, s_2, \ldots s_n$ die erzeugenden Operationen und

$$F_1(s_1, \ldots s_n) = 1, \ldots F_m(s_1, \ldots s_n) = 1 \tag{26}$$

die definierenden Relationen des einen Systems, während das zweite System dieselben erzeugenden Operationen, aber außer den Relationen (26) noch eine weitere definierende Relation

$$F_{m+1}(s_1, s_2, \ldots s_n) = 1$$

enthalte, die eine Folgerelation der Relationen (26) sei. Daß die beiden Relationensysteme dieselbe Gruppe definieren, ist evident. Der Übergang vom ersten zum zweiten System soll eine Erweiterung erster Art des definierenden Relationensystems genannt werden, der Übergang vom zweiten zum ersten System, also das Weglassen einer Folgerelation, eine Reduktion erster Art.

Im zweiten Falle seien wieder $s_1, s_2, \ldots s_n$ die erzeugenden Operationen und die Relationen (26) die definierenden Relationen des einen Systems. Hingegen habe das zweite System die Elemente $s_1, s_2, \ldots s_n, t$ zu erzeugenden Operationen und die definierenden Relationen seien außer den Relationen (26) noch eine Relation von der Form

$$A^{-1} t = 1, \tag{27}$$

wo A einen aus den Elementen $s_1, s_2, \ldots s_n$ nach Art von (22) zusammengesetzten Ausdruck bedeutet. Da sich das zweite System vom ersten nur dadurch unterscheidet, daß die im ersten System bereits vorhandene Operation $t = A$ als neue erzeugende Operation eingeführt ist, so ist auch hier klar, daß durch die beiden Relationensysteme dieselbe Gruppe definiert wird. In diesem Falle werde der Übergang vom ersten zum zweiten System, also die Einführung einer überzähligen erzeugenden Operation eine Erweiterung zweiter Art genannt. Wird anderseits in einem Relationensystem, in welchem eine der erzeugenden Operationen t nur in einer einzigen der definierenden Relationen, und in dieser nur so wie in der Relation (27) vorkommt, sowohl die erzeugende Operation t, als auch diese Relation weggelassen, so heiße eine solche Abänderung des Relationensystems eine Reduktion zweiter Art.

Es werde nun der allgemeine Fall zweier dieselbe Gruppe definierender Relationensysteme[6]) betrachtet. Die erzeugenden Operationen des einen Systems seien $s_1, s_2, \ldots s_n$ und

$$(28) \qquad F_i(s_1, s_2, \ldots s_n) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

die definierenden Relationen. Für das zweite System seien $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ die erzeugenden Operationen,

$$(29) \qquad G_j(t_1, t_2 \ldots t_\nu) = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots \mu)$$

die definierenden Relationen. Da wir annehmen, daß die beiden Systeme dieselbe Gruppe definieren, so muß jede Operation t_h als Operation der durch das erste System definierten Gruppe ausdrückbar sein durch die Operationen $s_1, s_2, \ldots s_n$. Es müssen also Relationen

$$t_h = S_h(s_1, s_2, \ldots s_n) \quad (h = 1, 2, \ldots \nu)$$

oder

$$(30) \qquad S_h^{-1} t_h = 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots \nu)$$

bestehen. Ferner müssen zwischen den Operationen $S_h(s_1, s_2, \ldots s_n)$ der durch das erste System definierten Gruppe dieselben Relationen bestehen, wie zwischen den Operationen t_h. Es müssen also die Relationen

$$(31) \quad G_j\bigl(S_1(s_1, s_2, \ldots s_n),\ S_2(s_1, \ldots s_n), \ldots S_\nu(s_1, \ldots s_n)\bigr) = 1$$
$$(j = 1, 2, \ldots \mu)$$

Folgerelationen der Relationen (28) sein. In gleicher Weise müssen umgekehrt n Relationen

$$(32) \qquad T_k^{-1} s_k = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

[6]) Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß die durch zwei Relationensysteme definierten Gruppen in mehr als einer Weise isomorph aufeinander bezogen werden können. Wenn wir sagen, die beiden Relationensysteme definieren dieselbe Gruppe, so nehmen wir dabei an, die Operationen der beiden Gruppen seien in einer bestimmten für die weitere Betrachtung festzuhaltenden Weise isomorph aufeinander bezogen und dadurch gewissermaßen identifiziert.

bestehen unter $T_k = T_k(t_1, t_2, \ldots t_\nu)$ aus den Operationen $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ zusammengesetzte Operationen verstanden, und die Relationen

$$(33)\quad F_i\big(T_1(t_1, t_2, \ldots t_\nu),\ T_2(t_1, \ldots t_\nu), \ldots\ T_n(t_1, t_2, \ldots t_\nu)\big) = 1$$
$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

müssen Folgerelationen der Relationen (29) sein. Diese Bemerkungen gestatten einen schrittweisen Übergang vom ersten zum zweiten Relationensystem aufzustellen, dessen einzelne Schritte in Erweiterungen oder Reduktionen von einer der beiden besprochenen Arten bestehen. Zunächst möge nämlich das erste System der Reihe nach jene μ Erweiterungen erster Art erfahren, die in der Hinzufügung je einer der Relationen (31) bestehen, hierauf die ν in der Hinzunahme der neuen erzeugenden Operationen t_h und der Relationen (30) bestehenden Erweiterungen zweiter Art. Die Relationen (29) sind offenbar Folgerelationen des so erweiterten Relationensystems. Nach Beifügung auch dieser Relationen erhält man ein aus allen Relationen (28), (31), (30), (29) bestehendes Relationensystems R_1 zwischen den erzeugenden Operationen $s_1, s_2, \ldots s_n,\ t_1, t_2, \ldots t_\nu$. Die Relationen (32), (33) sind ersichtlich Folgerelationen des Systems R_1. Durch Hinzunahme derselben werde R_1 zum Relationensystem R erweitert. In gleicher Weise läßt sich aber durch Erweiterungen der ersten und zweiten Art das Relationensystem R aus dem System der definierenden Relationen (29) zwischen den erzeugenden Operationen $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ gewinnen, indem man zunächst durch Hinzunahme der Folgerelationen (33) nach der ersten Art erweitert, dann nach der zweiten Art durch Einführung der neuen erzeugenden Operationen $s_1, s_2, \ldots s_n$ mit Hilfe der Relationen (32), hierauf durch Beifügung der aus den bisherigen Relationen folgenden Relationen (28) das aus den Relationen (29), (33), (32), (28) zwischen den erzeugenden Operationen $s_1, s_2, \ldots s_n,\ t_1, t_2, \ldots t_\nu$ bestehende Relationensystem R_2 gewinnt und dieses durch Hinzunahme der Folgerelationen (30) und (31) von R_2 zum System R erweitert. Man kann demzufolge, nachdem man durch eine Reihe von Erweiterungen vom ersten System der Relationen (28) zwischen den erzeugenden Operationen $s_1, s_2, \ldots s_n$ zum Relationensystem R gelangt ist, von diesem durch eine Reihe von Reduktionen der ersten und zweiten Art zum System der Relationen (29) zwischen den erzeugenden Operationen $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ kommen. Die Eigenschaft zweier definierender Relationensysteme dieselbe Gruppe zu bestimmen, ist daher gleichbedeutend mit der Möglichkeit, durch eine Reihe von Erweiterungen und Reduktionen der ersten und zweiten Art von dem einen Relationensystem ausgehend, zu dem anderen zu gelangen.

Nachdem dies vorausgeschickt, mögen gewisse Zahlen definiert werden, die sich zu jedem definierenden Relationensystem bestimmen lassen. Seien $s_1, s_2, \ldots s_n$ die erzeugenden Operationen und (28)die definierenden Relationen einer Gruppe. Dabei sei

$$F_i(s_1, s_2, \ldots s_n) = s_1^{\varkappa'_{i1}} s_2^{\varkappa'_{i2}} \ldots s_n^{\varkappa'_{in}} s_1^{\varkappa''_{i1}} s_2^{\varkappa''_{i2}} \ldots$$

und es werde

$$\lambda_{ij} = \varkappa'_{ij} + \varkappa''_{ij} + \cdots$$

gesetzt. Diejenigen Elementarteiler der aus den Zahlen λ_{ij} gebildeten Matrix, welche > 1 sind, mögen mit $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\varrho$ bezeichnet werden, und wir werden nachweisen, daß diese Zahlen für zwei dieselbe Gruppe definierende Relationensysteme gleich ausfallen.[7]) Für diese für eine Gruppe charakteristischen Zahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\varrho$, die sich also ebenso für die nicht-kommutativen wie für die Abelschen Gruppen[8]) definieren lassen, stellen die Poincaréschen Torsionszahlen[9]) einer Mannigfaltigkeit, die für die gleichfalls von Poincaré eingeführte Fundamentalgruppe der betreffenden Mannigfaltigkeit die Rolle der Zahlen π_i spielen,[10]) ein wichtiges auf Gruppen von großer Allgemeinheit bezügliches Beispiel dar. Es mögen deshalb die Zahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\varrho$ als die Poincaréschen Zahlen der betrachteten Gruppe bezeichnet werden.

Daß die Poincaréschen Zahlen einer Gruppe tatsächlich von der Wahl des die Gruppe definierenden Relationensystems unabhängig sind, wird auf Grund der früheren Bemerkungen erwiesen sein, wenn gezeigt ist, daß sich diese Zahlen bei einer Erweiterung erster oder zweiter Art des Relationensystems (und dann natürlich auch bei einer Reduktion von einer der beiden Arten) nicht ändern. Um dies für eine Erweiterung erster Art einzusehen, sei folgendes bemerkt. Die Zahlen λ_{ij} kann man dadurch gewonnen denken,

---

[7]) Es kann natürlich vorkommen, daß keine Elementarteiler > 1 vorhanden sind. In diesem Falle lehrt der besprochene Nachweis, daß die Eigenschaft, keine Elementarteiler > 1 der Matrix der λ_{ij} zu liefern, in gleicher Weise allen dieselbe Gruppe definierenden Relationensystemen zukommt.

[8]) Für die endlichen Abelschen (kommutativen) Gruppen fallen diese Zahlen im Wesen mit den Invarianten derselben, die die Abelsche Gruppe bekanntlich vollständig charakterisieren, zusammen. Stellt man nämlich eine solche Gruppe durch eine Basis so dar, daß von den Gradzahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\sigma$ der erzeugenden Operationen jede die vorhergehenden teilt, so werden die Zahlen ν_i (vgl. Frobenius und Stickelberger, Crelles J. 86, S. 238) oder aber die Zahlen, die man durch Zerlegung jeder der Zahlen ν_i in zu einander teilerfremde Primzahlpotenzen erhält (vgl. H. Weber, Algebra, 2. Aufl., Bd. 2, § 12), die Invarianten der Abelschen Gruppe genannt. Man findet nun $\rho = \sigma$ und $\pi_i = \nu_i$.

[9]) und zwar die Torsionszahlen erster Ordnung.

[10]) Siehe § 14.

daß man die betrachtete Gruppe als eine kommutative ansieht, auf Grund der supponierten Vertauschbarkeit der Operationen die linken Seiten der Relationen (28) in die Form $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \ldots s_n^{a_n}$ setzt, und den Exponenten von s_j in der i^{ten} derart modifizierten Relation bestimmt. Eine Erweiterung erster Art besteht nun in dem Hinzufügen einer Folgerelation des ursprünglichen Systems $F_{m+1}(s_1 \ldots s_n) = 1$, wobei zwei Arten von Folgerelationen zu unterscheiden sind. Die erste Art besteht in der Bildung der inversen Relation zu einer der ursprünglichen Relationen, etwa der Relation $F_1 = 1$. Es ist klar, daß in diesem Falle

$$\lambda_{m+1,j} = -\lambda_{1j} \quad (j = 1, 2, \ldots n)$$

wird, und die von Null verschiedenen Elementarteiler der aus den λ_{ij} gebildeten Matrix dieselben bleiben. Die zweite Art von Folgerelationen hat die Form

$$L_1 F_{i_1} L_2 F_{i_2} \ldots F_{i_r} L_{r+1} = 1,$$

wobei identisch $L_1 L_2 \ldots L_{r+1} = 1$ ist. Man kann also die Ausdrücke $L_1, L_2, \ldots L_{r+1}$ völlig außer Betracht lassen, da man, wie bemerkt, bei Bildung der Zahlen λ_{ij} so verfahren kann, als wären alle Operationen vertauschbar. Bedeutet nun h_i die Anzahl derjenigen unter den Ausdrücken $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots F_{i_r}$, welche gleich F_i sind, so ist offenbar

$$\lambda_{m+1,j} = h_1 \lambda_{1j} + h_2 \lambda_{2j} + \cdots + h_m \lambda_{mj} \quad (j = 1, 2, \ldots n),$$

woraus wieder die Gleichheit der Poincaréschen Zahlen für das ursprüngliche und das erweiterte System sofort ersichtlich ist.

Hat man es schließlich mit einer Erweiterung zweiter Art zu tun, so tritt zu dem ursprünglichen System eine neue erzeugende Operation t und eine Relation

$$St = 1,$$

wo S nur die Operationen $s_1, s_2, \ldots s_n$ enthält. Die Matrix der λ_{ij} wird also sowohl um eine neue dieser Relation entsprechende $(m+1)^{\text{ste}}$ Zeile als um eine neue der Operation t entsprechende $(n+1)^{\text{ste}}$ Kolonne erweitert. Diese Kolonne enthält in der ersten bis m^{ten} Zeile lauter Nullen, in der $(m+1)^{\text{sten}}$ Zeile die Zahl $\lambda_{m+1,n+1} = 1$. Daraus folgt, daß zu den Elementarteilern der ursprünglichen Matrix der λ_{ij} ein neuer, der gleich 1 ist, hinzutritt. Die Poincaréschen Zahlen bleiben also auch in diesem Falle dieselben. Damit ist die Behauptung erwiesen. Man kann ihr die Form geben:

Eine notwendige Bedingung dafür, daß zwei Gruppen holoedrisch isomorph sind, besteht in der Gleichheit ihrer Poincaréschen Zahlen.

Es sei noch auf eine weitere Zahl hingewiesen, die für isomorphe Gruppen denselben Wert hat, mit anderen Worten eine Zahl, die von der speziellen Wahl des definierenden Relationensystems einer und derselben Gruppe unabhängig ist. Es ist das ein Resultat, das ohne weiteres aus den Betrachtungen Poincarés über die Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten[11]) abgelesen werden kann. Bedeutet nämlich n die Anzahl der erzeugenden Operationen einer Gruppe und r den Rang der oben definierten Matrix der Zahlen λ_{ij} (anders ausgedrückt erhält man also r, wenn man für die Zusammensetzung der Operationen der Gruppe das kommutative Gesetz als giltig ansieht und unter dieser Annahme die Anzahl der unabhängigen unter den definierenden Relationen bestimmt), so hat die Zahl $\zeta = n - r$ für Relationensysteme, welche dieselbe Gruppe definieren, denselben Wert, wie man wieder aus der Betrachtung der Erweiterungen erster und zweiter Art unschwer erkennt. Ist die betrachtete Gruppe die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit V, so ist die Zahl ζ, um 1 vermehrt, nichts anderes als die Bettische Zahl P_1 von V.

Damit zwei Gruppen isomorph seien, ist also auch notwendig, daß außer den Zahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\varrho$ die Zahl ζ für beide Gruppen den gleichen Wert hat.[12]) Daß diese Bedingungen nicht hinreichen, ist leicht aus Beispielen zu sehen. Man nehme etwa die durch die Operation s und die definierende Relation $s^2 = 1$ erzeugte zyklische Gruppe zweiter Ordnung und die Gruppe mit den erzeugenden Operationen t, u und den definierenden Relationen

$$t^2 = 1, \quad u^2 t u^{-1} t^{-1} = 1, \quad u^3 = 1,$$ [13])

die offenbar nichts anderes ist, als die Permutationsgruppe von drei Elementen, wenn man

$$t = (1, 2), \quad u = (1, 2, 3)$$

setzt. Beide Gruppen haben eine Poincarésche Zahl $\pi_1 = 2$ und die gleiche Zahl $\zeta = 0$. Ein anderes Beispiel liefert die durch die Relationen

$$s^4 t s^{-1} t = 1, \quad t^{-2} s^{-1} t s^{-1} = 1$$

---

[11]) Man beachte eine Bemerkung in An. sit. § 13, p. 65.

[12]) Man überzeugt sich leicht, daß es stets Gruppen gibt, für welche die Zahlen $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_\varrho$ und ζ beliebig vorgegebene Werte haben. Z. B. liefert die Gruppe mit den erzeugenden Operationen $s_1, s_2, \ldots s_\varrho$, $t_1, t_2, \ldots t_\zeta$ und den definierenden Relationen $s_1^{\pi_1} = 1$, $s_2^{\pi_2} = 1, \ldots s_\varrho^{\pi_\varrho} = 1$ offenbar die gewünschten Werte. Für alle endlichen Gruppen ist $\zeta = 0$, also $m \geq n$.

[13]) Die (unendliche) Gruppe, die bloß die definierenden Relationen $t^2 = 1$, $u^2 t u^{-1} t^{-1} = 1$ hat, würde für das betrachtete Beispiel ersichtlich dasselbe leisten.

zwischen den erzeugenden Operationen s, t definierte Gruppe Γ, welche $\zeta = 0$ und keine Poincaréschen Zahlen hat.[14]) Das gleiche gilt von der offenbar mit Γ nicht isomorphen[15]) identischen Gruppe.

§ 12.

Einführung der Fundamentalgruppe.

Die bisher besprochenen topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten waren ganze Zahlen oder, wie die Torsionszahlen, Systeme ganzer Zahlen. Es soll nun eine topologische Invariante von anderer Art betrachtet werden, nämlich die von Poincaré eingeführte Fundamentalgruppe.[1]) Wenn diese Gruppe als eine den zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten zukommende topologische Invariante bezeichnet wird, so ist darunter zu verstehen, daß sich jeder zusammenhängenden Mannigfaltigkeit eine Gruppe zuordnen läßt, deren Bau, d. h. die Zusammensetzungsregeln ihrer Operationen, eine der Mannigfaltigkeit und allen ihr homöomorphen Mannigfaltigkeiten eigentümliche Eigenschaft darstellt. Doch werden wir uns, entsprechend dem bei den anderen topologischen Invarianten bisher eingehaltenen Vorgang, darauf beschränken, eine an das Schema einer Mannigfaltigkeit anschließende Definition ihrer Fundamentalgruppe und den Nachweis der Invarianz derselben beim Übergang zu homöomorphen Schematen zu geben. So werden wir auch den Zusammenhang der Fundamentalgruppe mit den auf der Mannigfaltigkeit ausgebreitet gedachten mehrdeutigen, jedoch unverzweigten Funktionen[2]) nur anmerkungsweise streifen.

Es möge in diesem Paragraphen das Verfahren Poincarés zur Bestimmung der Fundamentalgruppe aus einem Schema der Mannigfaltigkeit wiedergegeben werden.[3]) Nehmen wir etwa den Fall eines zweidimensionalen Schema. Sei dann $M^{(i)}$ der Mittelpunkt des durch einen Kreis repräsentierten Flächenstückes a_i^2 des Schema. Es werde dann in jedem Paar zugeordneter Polygonseiten auf einer der Seiten ein Punkt N', auf der anderen der entsprechende Punkt N'' markiert. N' und N'' stellen also einen einzigen auf der durch die beiden Polygonseiten repräsentierten Kante liegenden Punkt N der

[14]) Es ist das die Fundamentalgruppe jener von Poincaré angegebenen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, welche genau ebenso wie die sphärische dreidimensionale Mannigfaltigkeit $P_1 = P_2 = 1$ und keine Torsionszahlen hat, ohne mit dieser Mannigfaltigkeit homöomorph zu sein. (Compl. 5, pag. 109.)

[15]) Von Poincaré a. a. O. p. 110 dadurch bewiesen, daß die Hinzunahme der Relation $s^{-1}ts^{-1}t = 1$ auf die Ikosaedergruppe: $s^{-1}ts^{-1}t = 1$, $s^5 = 1$, $t^3 = 1$ führt.

[1]) An. Sit. § 12, 13.

[2]) a. a. O. pag. 60, 61.

[3]) Mit geringfügigen Abänderungen. Wir lassen z. B. die Beschränkung auf Schemata, die aus einer einzigen n-dimensionalen Zelle bestehen (unter n die Dimensionszahl des Schema verstanden), fallen.

Mannigfaltigkeit dar. In jedem Polygon des Schema ziehen wir nun von $M^{(i)}$ alle Radienvektoren nach den Punkten N' bezw. N'', die auf Seiten dieses Polygons liegen. Je zwei Radienvektoren nach entsprechenden Punkten N' und N'', $M^{(i)} N'$ und $M^{(j)} N''$ (es kann natürlich auch $j = i$ sein), denken wir uns nun zu einer von $M^{(i)}$ nach $M^{(j)}$ führenden Linie $M^{(i)} N' + N'' M^{(j)}$ zusammengefaßt. Die Richtung jeder einzelnen Linie kann dabei beliebig gewählt werden, ist aber, einmal gewählt, weiterhin stets zu beachten. Die so konstruierten mit einer Richtung versehenen Linien sollen mit S_1, S_2, S_3 ... bezeichnet und die die Punkte $M^{(i)}$ verbindenden „fundamentalen Wegstücke" genannt werden.

Man ziehe ferner alle jene geschlossenen Zyklen einander zugeordneter Polygonecken in Betracht, welche nicht etwa vermöge besonderer Verfügung von der Mannigfaltigkeit auszunehmende Punkte darstellen. Sei A eine durch einen solchen Zyklus repräsentierte Ecke des Schema. Der Punkt A sei μ-facher Kantenendpunkt.[4]) Zieht man um A eine kleine geschlossene Linie L_A, so zerfällt diese durch die Schnittpunkte mit den μ Kanten in μ Segmente. Auf jedem dieser Segmente nehme man einen Punkt an, der die Bezeichnung $M_A^{(i)}$ erhalten soll, wenn das Segment im Flächenstück a_i^2 gelegen ist. (Es ist also nicht ausgeschlossen, daß dasselbe Zeichen $M_A^{(i)}$ mehreren Punkten zuerteilt wird.) Man betrachte ferner eine der μ in A endenden Kanten $k_1, k_2, \ldots k_\mu$ des Schema, etwa k_1, und ihren Schnittpunkt $N_{A,1}$ mit L_A.[5]) Dem Punkt $N_{A,1}$ gehören dann zwei einander entsprechende Punkte auf den beiden die Kante k_1 bildenden einander zugeordneten Polygonseiten zu, und diese beiden Punkte mögen mit $N'_{A,1}$ und $N''_{A,1}$ bezeichnet werden. Von den beiden genannten Polygonseiten trägt nun, wie oben besprochen, die eine einen mit N', die andere einen mit N'' bezeichneten Punkt und die Bezeichnung der Punkte $N'_{A,1}$, $N''_{A,1}$ möge so gewählt sein, daß die Punkte $N'_{A,1}$ und N' auf der einen, die Punkte $N''_{A,1}$ und N'' auf der andern der beiden Seiten liegen. Man fasse nun je zwei Segmenthälften $M_A^{(i)} N'_{A,h}$ und $M_A^{(j)} N''_{A,h}$, die zu demselben Punkte $N_{A,h}$ führen, zu einer einzigen Linie $M_A^{(i)} N'_{A,h} + N''_{A,h} M_A^{(j)}$ zusammen und lege ihr, in der entsprechenden Richtung genommen, die gleiche Bezeichnung S_λ bei,

[4]) Wenn hiefür bisweilen kurzweg gesagt werden wird: in A stoßen μ Kanten zusammen, so ist zu beachten, daß es Kanten geben kann, die von A nach A führen. Eine solche Kante trägt zur Zahl μ zwei Einheiten bei, so daß μ genau genommen die Zahl der Kantenendpunkte, nicht der Kanten ist, die in A zusammenstoßen.

[5]) Die durch die Punkte $N_{A,i}$ in eine Anzahl Strecken zerlegte Linie L_A stellt nichts anderes dar, als die eindimensionale „Umgebungsmannigfaltigkeit" (siehe § 3, Anm. 6 und § 4) der Ecke A.

wie der ihr entsprechenden Linie $M^{(i)} N' + N'' M^{(j)}$. Bei einem in einem bestimmten Sinne durchgeführten Durchlaufen von L_A werden dann der Reihe nach verschiedene Linien S_λ, etwa S_{λ_1}, $S_{\lambda_2}, \ldots S_{\lambda_\mu}$ durchlaufen, und es werde $\varepsilon_i = +1$ oder -1 gesetzt, je nachdem S_{λ_i} hiebei in positiver oder in negativer Richtung durchlaufen wird. Es werde dann die Relation angeschrieben:[6])

$$S_{\lambda_1}^{\varepsilon_1} S_{\lambda_2}^{\varepsilon_2} \ldots \ldots S_{\lambda_\mu}^{\varepsilon_\mu} = 1. \tag{34}$$

Für diese Relation ist offenbar die zyklische Anordnung der S_{λ_i} wesentlich, die Wahl des S_{λ_1}, mit dem begonnen wird, unwesentlich. Jeder der in Betracht gezogenen geschlossenen Zyklen zugeordneter Polygonecken liefert eine solche Relation zwischen den fundamentalen Wegstücken.

Betrachten wir als Beispiel die ein Bild der projektiven Ebene darstellende zweidimensionale Mannigfaltigkeit T_2 (es ist das die durch $q = 1, r_1 = r_0 = 0$ gemäß § 8 charakterisierte Fläche), die durch ein Schema definiert ist, das aus einem einzigen Polygon mit zwei Seiten, die einander nach der zweiten Art zugeordnet sind, besteht. Man erhält ein einziges Wegstück $S_1 = M^{(1)} N' + N'' M^{(1)}$ und die um die einzige Ecke des Schema gezogene Linie L_A besteht aus zwei Segmenten, auf deren jedem ein mit $M_A^{(1)}$ bezeichneter Punkt liegt, und liefert die Relation $S_1^2 = 1$. Auf Grund der nun folgenden Ausführungen ergibt sich hieraus, als Fundamentalgruppe von T_2 die zyklische Gruppe 2. Ordnung.

Im allgemeinen Falle eines n-dimensionalen Schema erfolgt die Bestimmung der fundamentalen Wegstücke und der zwischen

---

[6]) Die Fundamentalgruppe erwächst aus der Vorstellung auf der Mannigfaltigkeit ausgebreiteter mehrdeutiger, jedoch unverzweigter Funktionen. Ist $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots$ die Gesamtheit der Werte einer solchen Funktion y im Punkt $M^{(i)}$, $y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \ldots$ die entsprechende Gesamtheit im Punkte $M^{(j)}$, so kann das einem Wegstück von $M^{(i)}$ nach $M^{(j)}$ entsprechende S_λ aufgefaßt werden als die Substitution

$$\begin{pmatrix} y_1^{(i)}, & y_2^{(i)}, & \ldots \\ y_{\nu_1}^{(j)}, & y_{\nu_2}^{(j)}, & \ldots \end{pmatrix}$$

wenn auf dem betrachteten Wegstück die Funktionswerte $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots$ der Reihe nach in die Funktionswerte $y_{\nu_1}^{(j)}, y_{\nu_2}^{(j)}, \ldots$ übergehen. Die geschlossene Linie L_A um A können wir uns nun so deformiert und immer weiter ausgedehnt denken, bis sie schließlich statt aus den Segmenten $M_A^{(i)} N'_{A,h} + N''_{A,h} M^{(j)}$ aus den entsprechenden Wegstücken $M^{(i)} N' + N'' M^{(j)}$ zusammengesetzt erscheint. Die so deformierte Linie L_A stellt einen geschlossenen Weg um A dar, der aus den fundamentalen Wegstücken zusammengesetzt ist, und die Relation (34) besagt dann nichts anderes, als daß auf diesem Wege jeder Funktionswert unverändert wiederkehrt, wie dies ja für eine unverzweigte Funktion y der Fall sein muß.

ihnen bestehenden Relationen ganz analog. Im Innern jeder n-dimensionalen Zelle wird ein Punkt $M^{(i)}$ angenommen, ferner in jeder zur Berandung einer n-dimensionalen Zelle gehörenden $(n-1)$-dimensionalen Zelle, falls derselben eine andere $(n-1)$-dimensionale Randzelle einer n-dimensionalen Zelle zugeordnet ist, ein Punkt N' markiert, und in der zugeordneten Randzelle der entsprechende Punkt N''. Die Linien $M^{(i)} N' + N'' M^{(j)}$ stellen dann die fundamentalen Wegstücke S_λ vor. Die $(n-2)$-dimensionalen Randzellen der n-dimensionalen Zellen des Schema ordnen sich in Zyklen. Es werden dann alle jene geschlossenen Zyklen $(n-2)$-dimensionaler Randzellen betrachtet, die nicht etwa durch besondere Festsetzung von der Mannigfaltigkeit auszunehmende $(n-2)$-dimensionale Raumstücke vorstellen. Sei A eine $(n-2)$-dimensionale Zelle des Schema, die durch einen der betrachteten Zyklen vorgestellt wird. Eine A umkreisende geschlossene Linie L_A schneidet dann jede der an A anstoßenden $(n-1)$-dimensionalen Zellen des Schema in einem Punkt und durch diese Schnittpunkte zerfällt L_A in eine Anzahl von Segmenten. In vollständig analoger Weise wie beim zweidimensionalen Schema ergeben sich nun aus der Betrachtung der Linien L_A die Relationen (34) zwischen den S_λ.

Um von dem System der fundamentalen Wegstücke S_λ und den Relationen (34) zwischen denselben zur Fundamentalgruppe zu gelangen, werde einer der Punkte $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots$, etwa $M^{(g)}$ ausgezeichnet. Er möge als Grundpunkt bezeichnet werden. Ist dann $M^{(i)}$ von $M^{(g)}$ verschieden, so kann man, da das Schema zusammenhängend vorausgesetzt wurde, (übrigens im allgemeinen auf mannigfache Weise) eine Folge von fundamentalen Wegstücken

$$S_{\nu_1}^{\delta_1} = M^{(g)} M^{(\mu_1)},\ S_{\nu_2}^{\delta_2} = M^{(\mu_1)} M^{(\mu_2)},\ \ldots\ S_{\nu_k}^{\delta_k} = M^{(\mu_{k-1})} M^{(i)}$$
$$(\delta_h = \pm 1)$$

so wählen, daß sie zusammen einen Weg von $M^{(g)}$ nach $M^{(i)}$ darstellen. An einer bestimmten derart gewählten Folge, die als ein „Hilfsweg" bezeichnet werden mag, soll für das Weitere festgehalten und für dieselbe die Bezeichnung

$$S_{\nu_1}^{\delta_1} S_{\nu_2}^{\delta_2} \ldots S_{\nu_k}^{\delta_k} = U_{g,i}$$

eingeführt werden. Unter $U_{g,g}$ werde die identische Operation verstanden. Ist nun S_λ irgend ein vom Punkt $M^{(h)}$ zum Punkt $M^{(k)}$ führendes fundamentales Wegstück, so werde

$$S_\lambda = U_{g,h}^{-1}\, s_\lambda\, U_{g,k} \tag{35}$$

gesetzt, so daß s_λ einen geschlossenen Weg von $M^{(g)}$ nach $M^{(g)}$ vorstellt. Die Wege s_λ sollen die geschlossenen Fundamentalwege[7]) heißen.

[7]) Von Poincaré (An. Sit. § 13, p. 64) „contours fermés fondamentaux" genannt.

Es werde nun die Gesamtheit $\mathfrak{R}$ aller jener Relationen zwischen den s_λ betrachtet, die man aus den Relationen (34) und (35), in welche letzteren die $U_{g,i}$ durch die S_λ ausgedrückt zu denken sind, durch Elimination der S_λ erhalten kann. Aus der Gesamtheit $\mathfrak{R}$ läßt sich, wie sich im folgenden von selbst herausstellen wird, eine endliche Anzahl von Relationen so auswählen, daß alle übrigen Relationen von $\mathfrak{R}$ Folgerelationen dieser endlichen Anzahl von Relationen sind, deren Gesamtheit $\mathfrak{F}$ heißen möge. Die durch das Relationensystem $\mathfrak{F}$ zwischen den erzeugenden Operationen s_λ definierte Gruppe soll als Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit bezeichnet werden.[8]) Von der Auswahl des Systems $\mathfrak{F}$ aus dem Relationensystem $\mathfrak{R}$ ist diese Gruppe ersichtlich unabhängig.

§ 13.

Beweis, daß die Fundamentalgruppe eine topologische Invariante ist.

Es werde im folgenden ein Nachweis dafür gegeben, daß die Fundamentalgruppe tatsächlich eine topologische Invariante ist,[1]) wobei wir uns jedoch so, wie bei den bisher besprochenen Invarianten, auch hier darauf beschränken, die Fundamentalgruppe als topologische Invariante der Schemata nachzuweisen. Was wir zu zeigen haben, ist, daß die Fundamentalgruppe einerseits für ein bestimmtes Schema von der Wahl des Grundpunktes und der vom Grundpunkt ausgehenden „Hilfswege“ $U_{g,i}$ unabhängig ist, anderseits aber für zwei homöomorphe Schemata übereinstimmt. Hiezu denken wir uns zunächst, wenn ein Schema vorgelegt ist, zu jeder möglichen Art, den Grundpunkt und die Hilfswege $U_{g,i}$ zu wählen, die zugehörige Gruppe auf Grund des oben angegebenen Verfahrens der Herleitung der Fundamentalgruppe bestimmt. Die verschiedenen (d. h. einander nicht isomorphen) unter den so erhältlichen Gruppen sollen als die zu dem betreffenden Schema gehörigen Gruppen bezeichnet werden. Wir werden nun beweisen, daß wenn Σ und Σ' zwei Schemata sind, deren eines, Σ', durch

[8]) Wählt man die Hilfswege $U_{g,i}$ derart, daß sich aus der Gesamtheit aller sie zusammensetzenden S_{ν_h} keine geschlossenen Wege bilden lassen, so kann man als definierendes Relationensystem $\mathfrak{F}$ der Fundamentalgruppe einfach die Relationen

$$s_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}\, s_{\lambda_2}^{\varepsilon_2} \ldots s_{\lambda_\mu}^{\varepsilon_\mu} = 1$$

nehmen, die sich ergeben, wenn man die aus (35) folgenden Ausdrücke für die S_λ in die Relationen (34) einführt.

[1]) In der Darstellung Poincarés geht dies aus der Bedeutung der Fundamentalgruppe für die in der Mannigfaltigkeit ausgebreiteten unverzweigten Funktionen hervor.

eine elementare Unterteilung aus dem anderen, Σ, abgeleitet ist, zu jeder Art, in dem einen der beiden Schemata Grundpunkt und Hilfswege festzulegen, sich eine entsprechende Wahl für das andere Schema so treffen läßt, daß die hiedurch definierten zu Σ und Σ' gehörigen Gruppen isomorph sind. Daraus folgt, daß für irgend zwei homöomorphe Schemata die Gesamtheit der zugehörigen Gruppen zusammenfällt. Es ist nun leicht zu sehen, daß jedes zusammenhängende n-dimensionale Schema einem n-dimensionalen Fundamentalpolyeder, d. h. einem Schema mit nur einer einzigen n-dimensionalen Zelle, homöomorph ist. Ein zusammenhängendes Schema mit mehr als einer n-dimensionalen Zelle muß nämlich definitionsgemäß zu jeder n-dimensionalen Zelle a_i^n mindestens eine weitere mit ihr direkt zusammenhängende Zelle a_j^n aufweisen, d. h. eine Zelle a_j^n, so daß unter den sie berandenden $(n-1)$-dimensionalen Zellen sich mindestens eine findet, die einer $(n-1)$-dimensionalen Randzelle von a_i^n zugeordnet ist. Diese beiden einander zugeordneten Randzellen von a_i^n und a_j^n stellen eine $(n-1)$-dimensionale Zelle a_k^{n-1} des Schema dar. Man kann dann durch einen zu einer elementaren Unterteilung inversen Prozeß, längs a_k^{n-1} die Zellen a_i^n, a_j^n zu einer einzigen Zelle verschmelzen und erhält so ein neues Schema, aus dem das ursprüngliche durch eine elementare Unterteilung gewonnen werden kann. Setzt man dieses Verfahren fort, so gelangt man schließlich zu einem dem ursprünglichen Schema homöomorphen Fundamentalpolyeder. Da nun bei einem Fundamentalpolyeder weder eine willkürliche Wahl des Grundpunktes möglich ist, noch Hilfswege auftreten, so gehört demselben nur eine einzige Gruppe zu, nämlich die durch die Relationen (34) zwischen den erzeugenden Operationen $s_\lambda = S_\lambda$ definierte Gruppe. Dann kann aber auch für jedes dem Fundamentalpolyeder homöomorphe Schema die Gesamtheit der zugehörigen Gruppen nur aus dieser einen Gruppe bestehen und die Unabhängigkeit der Fundamentalgruppe sowohl von der speziellen Wahl ihrer Herstellungsart aus einem Schema, als von der Auswahl eines Schema aus einer Klasse einander homöomorpher Schemata ist damit erwiesen. Daneben ergibt sich hieraus auch, daß für jede Bestimmungsart der Gruppe, die oben genannte Gesamtheit $\mathfrak{R}$ von Relationen so beschaffen ist, daß sie aus den Folgerelationen eines endlichen Systems $\mathfrak{F}$ von Relationen besteht.

Gehen wir nun an den Beweis dafür, daß sich für zwei Schemata Σ und Σ', wo Σ' durch eine elementare Unterteilung aus Σ hervorgeht, zu jeder dem einen Schema zugehörigen Gruppe eine isomorphe Gruppe, die dem anderen Schema zugehört, finden läßt.

Dabei mögen die fundamentalen Wegstücke von Σ mit S_λ, die von Σ' mit S'_λ bezeichnet werden. Aus einem Schema ergeben sich die Relationen (34) zwischen den fundamentalen Wegstücken.

Diese zwischen den fundamentalen Wegstücken S_λ von Σ bestehenden Relationen sollen die Relationen R, die entsprechenden Relationen für das Schema Σ' die Relationen R' genannt werden. Hilfswege für das eine Schema sollen mit U, solche des anderen mit U' bezeichnet werden und entsprechend mögen mit s_λ bezw. s'_λ die fundamentalen geschlossenen Wege der beiden Schemata bezeichnet werden. Die Relationen (35), durch die diese Wege eingeführt werden, sollen für das eine Schema r, für das andere r' heißen.

Durch die elementare Unterteilung, die Σ in Σ' überführt, werde die l-dimensionale Zelle a_r^l von Σ vermittels einer neuen $(l-1)$-dimensionalen Zelle a_s^{l-1} in zwei Zellen $a_{r_1}^l$, $a_{r_2}^l$ zerlegt. Die Fälle $l=1, 2, \ldots n-1$ lassen sich dann sofort erledigen. In allen Fällen $l \leqq n-2$ ändert sich nämlich bei der Unterteilung die Gesamtheit der $(n-1)$-dimensionalen Zellen des Schema nicht und die diesen Zellen zugeordneten Wegstücke S_λ und S'_λ in den beiden Schematen entsprechen einander vollständig. Da die Relationen (34) zwischen den fundamentalen Wegstücken auf die einzelnen $(n-2)$-dimensionalen Zellen des Schema, sofern dieselben im Innern der Mannigfaltigkeit gelegen sind, sich beziehen, diese aber in allen Fällen $l < n-2$ durch die Unterteilung nicht modifiziert werden, so erhält man in diesen Fällen die Relationen R' aus den Relationen R, indem man in diesen jedes S_λ durch das entsprechende S'_λ ersetzt. Im Falle $l=n-2$ gehen die Relationen R' aus den Relationen R einfach dadurch hervor, daß jeder Relation R, die sich auf eine andere $(n-2)$-dimensionale Zelle als a_r^{n-2} bezieht, eine Relation R' entspricht, die aus der Relation R durch Ersetzen eines jeden S_λ durch das entsprechende S'_λ entsteht, daß aber an Stelle jener Relation R zwischen den S_λ, die sich auf a_r^{n-2} bezieht (eine solche Relation ist natürlich nur vorhanden, wenn a_r^{n-2} keine zur Berandung der Mannigfaltigkeit gehörende Zelle ist) zwei ganz gleichlautende Relationen R' zwischen den entsprechenden S'_λ stehen. Die Wahl des Grundpunktes und der Hilfswege kann in den betrachteten Fällen $l \leqq n-2$ in den beiden Schematen ganz gleichartig ausgeführt werden, so daß für eine derart getroffene Wahl die Relationen r und r' auseinander einfach durch Vertauschen der S_λ, s_λ mit den S'_λ, s'_λ hervorgehen. In den Fällen $l \leqq n-2$ ist damit die Behauptung erwiesen und kaum schwieriger ist der nun zu besprechende Fall $l=n-1$.

Seien S_ϱ, S'_{ϱ_1}, S'_{ϱ_2} die den Zellen a_r^{n-1}, $a_{r_1}^{n-1}$, $a_{r_2}^{n-1}$ entsprechenden fundamentalen Wegstücke. Jedem Wegstück S_λ $(\lambda \neq \rho)$ entspricht dann ein Wegstück S'_λ und jedem S'_λ $(\lambda \neq \rho_1, \rho_2)$ ein Wegstück S_λ und das System der Relationen R' unterscheidet sich von dem der Relationen R außer durch das Hinzutreten einer Relation

$$S'_{\varrho_1} S'^{-1}_{\varrho_2} = 1,$$

die der neuen Zelle a_s^{n-2} ihre Entstehung verdankt, nur dadurch, daß überall dort, wo in einer Relation R das Wegstück S_ϱ steht, in einer entsprechenden Relation R' eines der Wegstücke S'_{ϱ_1}, S'_{ϱ_2} steht, während alle übrigen S_λ durch die ihnen entsprechenden S'_λ ersetzt sind. Sei nun etwa für das Schema Σ' ein System von Hilfswegen U' vorgelegt, aus dem die Relationen r' sich ergeben, so sollen die entsprechenden Hilfswege U so gezogen werden, daß man jedes in dem Ausdrucke für U' auftretende S'_{ϱ_1} oder S'_{ϱ_2} durch S_ϱ, jedes andere S'_λ durch das entsprechende S_λ ersetzt. Man erkennt dann, daß jeder Relation r' eine Relation r entspricht, die aus der ersteren durch Ersetzen von S'_λ, s'_λ $(\lambda \neq \rho_1, \rho_2)$ durch S_λ, s_λ, von S'_{ϱ_1} oder S'_{ϱ_2}, s'_{ϱ_1} oder s'_{ϱ_2} durch S_ϱ bezw. s_ϱ entsteht. Den beiden Relationen r' für s'_{ϱ_1} und s'_{ϱ_2} entspricht dabei die gleiche Relation r für s_ϱ. Da offenbar die Relation

$$s_{\varrho_1} s^{-1}_{\varrho_2} = 1$$

besteht, ist die Isomorphie der so definierten Gruppen sofort einzusehen. Wäre umgekehrt ein System von Hilfswegen U von Σ vorgelegt, so hätte man die entsprechenden Hilfswege U' von Σ einfach dadurch zu bilden, daß man jedes in ihnen auftretende S_ϱ nach Belieben durch das eine oder andere Wegstück S_{ϱ_1} oder S_{ϱ_2} ersetzt.

Es bleibt nun noch der Fall $l = n$ zu erledigen. Bei dem Schema Σ' tritt dann ein Punkt $M^{(i)}$ mehr auf, als bei dem Schema Σ, da an Stelle des einen Punktes $M^{(r)}$ die beiden Punkte $M^{(r_1)}$, $M^{(r_2)}$ vorhanden sind. Das Schema Σ' enthält ein die Punkte $M^{(r_1)}$, $M^{(r_2)}$ verbindendes fundamentales Wegstück S'_σ, das die $(n-1)$-dimensionale Zelle a_s^{n-1} durchsetzt und für das etwa die Richtung von $M^{(r_1)}$ nach $M^{(r_2)}$ die positive sei. Abgesehen von S'_σ läßt sich jedem fundamentalen Wegstück S'_λ ein Wegstück S_λ in leicht ersichtlicher Weise zuordnen. Diese einander entsprechenden Wegstücke S_λ und S'_λ mögen in verschiedene Kategorien eingeteilt werden. Eine erste Kategorie von Wegstücken S'_λ umfaßt diejenigen, die von $M^{(r_1)}$ ausgehen und in $M^{(r_1)}$ endigen. Diese Wegstücke sollen durch den oberen Index α_1, also mit $S_\lambda^{(\alpha_1)'}$ bezeichnet werden. Die ihnen entsprechenden Wegstücke S_λ werden mit $S_\lambda^{(\alpha_1)}$ bezeichnet. Diese Wegstücke $S_\lambda^{(\alpha_1)}$ können folgendermaßen charakterisiert werden. Die die Berandung von a_r^n bildende $(n-1)$-

dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit wird durch die $(n-2)$-dimensionale Randmannigfaltigkeit von a_s^{n-1} in zwei Elementarmannigfaltigkeiten $E_1^{(n-1)}$, $E_2^{(n-1)}$ zerlegt. Betrachtet man nun jene Zellen a_i^{n-1} des Schema, die aus der Zuordnung zweier in $E_1^{(n-1)}$ gelegener $(n-1)$-dimensionaler Randzellen von a_r^n entstanden sind, so sind die ihnen entsprechenden fundamentalen Wegstücke nichts anderes als die $S_\lambda^{(\alpha_1)}$. Diejenigen Wegstücke, die $M^{(r_1)}$ mit einem von $M^{(r_1)}$ und $M^{(r_2)}$ verschiedenen Punkt $M^{(i)}$ verbinden und für die die Richtung von $M^{(i)}$ nach $M^{(r_1)}$ als positive gewählt sei, mögen mit $S_\lambda^{(\beta_1)'}$ bezeichnet werden. Analog seien $S_\lambda^{(\alpha_2)'}$ die $M^{(r_2)}$ mit $M^{(r_2)}$, und $S_\lambda^{(\beta_2)'}$ die $M^{(r_2)}$ mit einem Punkt $M^{(i)}$ $(i \neq r_1, r_2)$ verbindenden Wegstücke, die letzteren in der Richtung von $M^{(r_2)}$ nach $M^{(i)}$ positiv genommen. Ferner seien $S_\lambda^{(\gamma)'}$ die außer S'_σ etwa vorhandenen $M^{(r_1)}$ mit $M^{(r_2)}$ verbindenden und von $M^{(r_2)}$ nach $M^{(r_1)}$ positiv genommenen Wegstücke, $S_\lambda^{(\delta)'}$ die Wegstücke, die zwei von $M^{(r_1)}$ und $M^{(r_2)}$ verschiedene Punkte verbinden. Die den eben erklärten Wegstücken von Σ' entsprechenden Wegstücke von Σ sollen mit $S_\lambda^{(\beta_1)}$, $S_\lambda^{(\alpha_2)}$, $S_\lambda^{(\beta_2)}$, $S_\lambda^{(\gamma)}$, $S_\lambda^{(\delta)}$ bezeichnet werden.

Es möge noch gesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
S_\lambda^{(\alpha_1)'} &= T_\lambda^{(\alpha_1)}, & S'_\sigma S_\lambda^{(\alpha_2)'} S_\sigma'^{-1} &= T_\lambda^{(\alpha_2)},\\
S_\lambda^{(\beta_1)'} &= T_\lambda^{(\beta_1)}, & S'_\sigma S_\lambda^{(\beta_2)'} &= T_\lambda^{(\beta_2)},\\
S_\lambda^{(\delta)'} &= T_\lambda^{(\delta)}, & S'_\sigma S_\lambda^{(\gamma)'} &= T_\lambda^{(\gamma)}.
\end{aligned}
$$

Wir können dann sagen, daß man die Relationen R' aus den Relationen R einfach dadurch erhält, daß man jedes in einer Relation R stehende Wegstück $S_\lambda^{(\varepsilon)}$, unter ε einen der Indices α_1, α_2, β_1, β_2, γ, δ verstanden, durch den Ausdruck $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ ersetzt. Ist umgekehrt das System der Relationen R' zwischen den Wegstücken $S_\lambda^{(\alpha_1)'}$, $S_\lambda^{(\alpha_2)'}$, $S_\lambda^{(\beta_1)'}$, $S_\lambda^{(\beta_2)'}$, $S_\lambda^{(\gamma)'}$, $S_\lambda^{(\delta)'}$, S'_σ vorgelegt, so muß sich jede Relation R', wie man leicht sieht, als eine Relation zwischen den Ausdrücken $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ schreiben lassen, d. h. wenn man jedes $S_\lambda^{(\varepsilon)'}$ durch das entsprechende $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ und S'_σ ausdrückt, so muß S'_σ aus der Relation hinausfallen. Die Relationen R ergeben sich dann aus den Relationen R', indem man in diesen für die $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ die $S_\lambda^{(\varepsilon)}$ substituiert.

Es handelt sich noch darum, einer vorgelegten Wahl von Grundpunkt und Hilfswegen für eines der Schemata Σ, Σ' eine geeignete Wahl dieser Bestimmungsstücke für das andere Schema zuzuweisen. Seien etwa der Grundpunkt $M^{(g')}$ und die Hilfswege $U'_{g',i}$

für Σ' vorgelegt, so mögen der Grundpunkt $M^{(g)}$ und die Wege $U_{g,i}$ für Σ folgendermaßen bestimmt werden. Falls g' von r_1 und r_2 verschieden ist, also die Zelle von Σ', in deren Innerem $M^{(g')}$ liegt, aus einer ganz gleichbeschaffenen durch die Unterteilung nicht modifizierten Zelle von Σ hervorgegangen ist, so möge in dieser Zelle von Σ der Grundpunkt $M^{(g)}$ angenommen, also $g = g'$ gesetzt werden. Ist anderseits $M^{(g')}$ einer der Punkte $M^{(r_1)}$, $M^{(r_2)}$, und wir können dann die Bezeichnungsweise so gewählt denken, daß $M^{(g')} = M^{(r_1)}$ sei,[2]) so werde $M^{(g)} = M^{(r)}$ gesetzt. Ist nun $M^{(i)}$ von $M^{(r_1)}$ und $M^{(r_2)}$ verschieden, so werde aus dem Hilfswege $U'_{g',i}$, der sich, wie leicht zu sehen, als ein bloß die $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ enthaltender Ausdruck anschreiben läßt, der Hilfsweg $U_{g,i}$ gebildet, indem jedes $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ durch das entsprechende $S_\lambda^{(\varepsilon)}$ ersetzt wird. Durch das gleiche Verfahren werde $U_{g,r}$ aus U'_{g',r_1} abgeleitet. Hingegen entspricht dem Hilfsweg U'_{g',r_2}, der auch mit V' bezeichnet werden soll, kein Hilfsweg des Schema Σ.

Sind umgekehrt Grundpunkt $M^{(g)}$ und Hilfswege $U_{g,i}$ von Σ vorgelegt, so möge, wenn $g \neq r$ ist, der Grundpunkt $M^{(g')}$ von Σ' gleich $M^{(g)}$, und wenn $M^{(g)} = M^{(r)}$ ist, $M^{(g')} = M^{(r_1)}$ gesetzt werden. Die Hilfswege $U'_{g',i}$ $(i \neq r_1, r_2)$ und U'_{g',r_1} mögen gebildet werden, indem man in $U_{g,i}$ bezw. $U_{g,r}$ jedes $S_\lambda^{(\varepsilon)}$ durch $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ ersetzt. Der Hilfsweg U'_{g',r_2} werde gleich einem beliebigen Weg V' von $M^{(g')}$ nach $M^{(r_2)}$ angenommen.[3])

Unsere Festsetzungen sind so beschaffen, daß die Ermittlung von Grundpunkt und Hilfswegen für das abgeleitete Schema aus dem Grundpunkte und den Hilfswegen des ursprünglichen Schema und umgekehrt sich ganz gleichartig gestaltet, für welches von den beiden Schematen man auch diese Bestimmungsstücke als vorgegeben anzusehen hat. Der Vergleich der Relationen r und r' kann also durchgeführt werden, ohne daß diese beiden Fälle hiebei auseinandergehalten zu werden brauchen.

Da ausgenommen für S'_σ für alle Wegstücke S_λ und S'_λ von Σ und Σ' ein paarweises Entsprechen stattfindet, so gilt das gleiche auch für die geschlossenen Wege s_λ und s'_λ, den Weg

$$s'_\sigma = U'_{g',r_1} S'_\sigma V'^{-1} \tag{36}$$

---

[2]) Die Art der Einführung der Ausdrücke $T_\lambda^{(\varepsilon)}$, bei denen ja $M^{(r_1)}$ und $M^{(r_2)}$ nicht die gleiche Rolle spielen, ist schon im Hinblicke auf diese Festsetzung erfolgt.

[3]) Man kann z. B. $V' = U'_{g',r_1} S'_\sigma$ setzen. Um aber für die beiden Fälle, daß einmal für Σ, das anderemal für Σ' Grundpunkt und Hilfswege vorgegeben sind, die weitere Betrachtung der Relationen r und r' nicht gesondert durchführen zu müssen, soll V' nicht weiter spezialisiert werden.

ausgenommen. Betrachten wir jene Relationen r und r', durch die einander entsprechende Wege s_λ, s'_λ eingeführt werden. Sei beispielsweise $S_\lambda^{(\beta_2)'}$ ein Weg von $M^{(r_2)}$ nach $M^{(i)}$ $(i \neq r_1, r_2)$ und $S_\lambda^{(\beta_2)}$ der entsprechende Weg von $M^{(r)}$ nach $M^{(i)}$, dann sind die $s_\lambda^{(\beta_2)}$ und $s_\lambda^{(\beta_2)'}$ bestimmenden Relationen:

$$s_\lambda^{(\beta_2)} = U_{g,r}\, S_\lambda^{(\beta_2)}\, U_{g,i}^{-1}$$

$$s_\lambda^{(\beta_2)'} = U'_{g',r_2}\, S_\lambda^{(\beta_2)'}\, U'^{-1}_{g',i}\,.$$

Wird nun

$$\begin{aligned} s_\lambda^{(\alpha_1)'} &= t_\lambda^{(\alpha_1)}, & s'_\sigma\, s_\lambda^{(\alpha_2)'}\, s'^{-1}_\sigma &= t_\lambda^{(\alpha_2)} \\ s_\lambda^{(\beta_1)'} &= t_\lambda^{(\beta_1)}, & s'_\sigma\, s_\lambda^{(\beta_2)'} &= t_\lambda^{(\beta_2)} \\ s_\lambda^{(\delta)'} &= t_\lambda^{(\delta)}, & s'_\sigma\, s_\lambda^{(\gamma)'} &= t_\lambda^{(\gamma)} \end{aligned}$$

gesetzt, so kann man die betrachteten Relationen auch in der Gestalt schreiben:

$$s_\lambda^{(\beta_2)} = U_{g,r}\, S_\lambda^{(\beta_2)}\, U_{g,i}^{-1},$$

$$t_\lambda^{(\beta_2)} = U'_{g',r_1}\, T_\lambda^{(\beta_2)}\, U'^{-1}_{g',i},$$

und man erkennt, daß man die zweite dieser Relationen aus der ersten erhält, indem man $s_\lambda^{(\beta_2)}$ durch $t_\lambda^{(\beta_2)}$ und jedes $S_\lambda^{(\varepsilon)}$ durch $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ ersetzt. Ganz allgemein erhält man die Relationen r', indem man auf die Relationen r die Operation Π des Ersetzens der $S_\lambda^{(\varepsilon)}, s_\lambda^{(\varepsilon)}$ durch die $T_\lambda^{(\varepsilon)}, t_\lambda^{(\varepsilon)}$ anwendet und den so erhaltenen Relationen noch die Relation (36). beifügt. Sind umgekehrt die Relationen r' gegeben, so kann man dieselben in solcher Form geschrieben denken, daß, abgesehen von (36) jede andere Relation r' auf der linken Seite ein $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ und rechts einen solchen Ausdruck in den $S_\lambda'^{(\varepsilon)}$ und S'_σ, der sich als ein Ausdruck in den $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ darstellen läßt, stehen hat. Aus einer solchen Relation r' für ein $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ erhält man dann die entsprechende Relation r durch die Operation Π^{-1}.

Zusammenfassend können wir sagen: Die Gesamtheit ρ' der Relationen R' und r' erhält man aus der Gesamtheit ρ der Relationen R und r, indem man auf jede Relation ρ die Operation Π anwendet und den so erhaltenen Relationen die Relation (36) beifügt. Der zu leistende Nachweis, daß die dem Relationensystem ρ' des Schema Σ' zugehörige Gruppe Γ mit der dem Relationensystem ρ von Σ zugehörigen Gruppe Γ' isomorph ist, ist nun unschwer zu erbringen. Die erzeugenden Operationen von Γ sind die Elemente $s_\lambda^{(\varepsilon)}$, und Γ ist dadurch charakterisiert, daß zwischen diesen

Elementen alle jene und nur solche Relationen bestehen sollen, die aus den Relationen ρ (durch Elimination der S_λ) abgeleitet werden können. Die analoge Bedeutung haben die Relationen ρ' für die Gruppe Γ', deren erzeugende Operationen s'_σ und die $s_\lambda^{(\varepsilon)\prime}$ sind. Wir können aber offenbar und wollen s'_σ und die $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ als erzeugende Operationen von Γ' ansehen. Es ist nun unschwer einzusehen, daß s'_σ durch die $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ ausgedrückt werden kann. Die in dem Ausdrucke für s'_σ auf der rechten Seite von (36) auftretenden Wegstücke S' stellen nämlich einen geschlossenen von $M^{(g')}$ ausgehenden und nach $M^{(g')}$ zurückkehrenden Weg dar, und dieser Ausdruck muß sich daher mit Hilfe der $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ darstellen lassen, so daß man schreiben kann

$$s'_\sigma = T_{\mu_1} T_{\mu_2} \ldots T_{\mu_\nu}.$$

Dabei sind die T_{μ_i} selbst Wege zwischen zwei Punkten $M^{(i)}$ von Σ' (und zwar so, daß keiner dieser Punkte der Punkt $M^{(r_2)}$ ist), derart, daß der Endpunkt jedes $T_{\mu_{i-1}}$ mit dem Anfangspunkte von T_{μ_i} übereinstimmt und der Anfangspunkt von T_{μ_1} sowohl als der Endpunkt von T_{μ_ν} der Punkt $M^{(g')}$ ist. Infolgedessen ergeben die Formeln

$$T_\lambda^{(\varepsilon)} = U'^{-1}_{g', j}\, t_\lambda^{(\varepsilon)}\, U'_{g' k},$$

unter $M^{(j)}$, $M^{(k)}$ Anfangs- und Endpunkt von $T_\lambda^{(\varepsilon)}$ verstanden, die Gleichung

$$s'_\sigma = t_{\mu_1} t_{\mu_2} \ldots t_{\mu_\nu}. \tag{37}$$

Die Gesamtheit $\mathfrak{R}'$ der zwischen den $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ und s'_σ bestehenden Relationen, unter denen sich auch (37) findet, ist daher gleichwertig mit der Gesamtheit $\overline{\mathfrak{R}}'$ jener Relationen, die man erhält, wenn man in jeder von (37) verschiedenen Relation s'_σ durch $t_{\mu_1} t_{\mu_2} \ldots t_{\mu_\nu}$ ersetzt. $\overline{\mathfrak{R}}'$ besteht dann aus der Relation (37) und im übrigen aus lauter Relationen, die nur die $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ enthalten, woraus folgt, daß man s'_σ als erzeugende Operation von Γ' fortlassen kann. Γ' erscheint sonach durch die Elemente $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ erzeugt, und durch alle jene Relationen zwischen den $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ charakterisiert, die aus den Relationen ρ' ableitbar sind. Nunmehr ist aber offenbar, daß jeder zwischen den erzeugenden Operationen $s_\lambda^{(\varepsilon)}$ von Γ bestehenden Relation eine gleichgebaute Relation zwischen den entsprechenden Operationen $t_\lambda^{(\varepsilon)}$ von Γ' entspricht und umgekehrt. Sei nämlich eine Relation zwischen den $s_\lambda^{(\varepsilon)}$ gegeben, die sich als Folgerelation der Relationen ρ in die Gestalt

$$L_1 A_{i_1} L_2 A_{i_2} L_3 \ldots A_{i_r} L_{r+1} = 1$$

setzen lassen muß, unter

$$A_1 = 1, \ A_2 = 1, \ldots$$

das System der Relationen ρ und ihrer inversen Relationen und unter $L_1, L_2, \ldots$ Ausdrücke in den S_λ und s_λ verstanden, die der Bedingung

$$L_1 \, L_2 \ldots L_{r+1} = 1$$

identisch genügen. Dann werde mit A'_i, L'_i der Ausdruck bezeichnet, der aus A_i bezw. L_i durch Anwendung der Operation Π entsteht und die Relationen

$$A'_1 = 1, \ A'_2 = 1, \ldots$$

sind dann zusammen mit (37) und der zu (37) inversen Relation offenbar nichts anderes als die Relationen ρ' und ihre inversen Relationen. Die Relation

$$L'_1 \, A'_{i_1} \, L'_2 \, A'_{i_2} \, L'_3 \ldots A'_{i_r} \, L'_{r+1} = 1$$

stellt nun offenbar eine Folgerelation der Relationen ρ' dar, die nur die $t_\lambda^{(e)}$ enthält und aus der gegebenen Relation durch die Operation Π gewonnen wird. Ist anderseits eine Folgerelation der Relationen ρ' gegeben, die nur die $t_\lambda^{(e)}$ enthält, so kann man offenbar annehmen, sie sei ohne Zuziehung von (37) abgeleitet und lasse sich also in die Gestalt

$$L'_1 \, A'_{i_1} \, L'_2 \, A'_{i_2} \ldots A'_{i_r} \, L'_{r+1} = 1$$

setzen, unter L'_i Ausdrücke in den t_λ, T_λ verstanden. Die Operation Π^{-1} führt dann zur entsprechenden Folgerelation der Relationen ρ. Die Isomorphie von Γ und Γ' ist damit erwiesen.

Der Nachweis, daß die Fundamentalgruppe eine topologische Invariante der Schemata sei, ist somit erbracht.

§ 14.

Bestimmung von P_1 und den Torsionszahlen erster Ordnung aus der Fundamentalgruppe.

Betrachtet man das eingangs auseinandergesetzte Verfahren zur Bestimmung der Fundamentalgruppe für den speziellen Fall einer geschlossenen Mannigfaltigkeit, so erkennt man, daß dasselbe mit der Bildung des reziproken Schema in einer einfachen Beziehung steht. Jedes fundamentale Wegstück S_λ, das die im Innern der Zellen a_i^n, a_j^n gelegenen Punkte $M^{(i)}$, $M^{(j)}$ miteinander verbindet und dabei über einen auf einer Zelle a_k^{n-1} gelegenen Punkt N führt, kann nämlich als die die Ecken $M^{(i)} = \overline{a}_i^0$, $M^{(j)} = \overline{a}_j^0$ des reziproken Schema verbindende Kante $\overline{a}_k^1$ angesehen werden. Ist dann

$$S_{\lambda_1}^{\varepsilon_1} S_{\lambda_2}^{\varepsilon_2} \dots S_{\lambda_\mu}^{\varepsilon_\mu} = 1$$

die aus der Betrachtung der $(n-2)$-dimensionalen Zelle $A = a_l^{n-2}$ folgende Relation, so kann man dies auch so ausdrücken: Wenn $\overline{a}_l^2$ die der Zelle a_l^{n-2} im reziproken Schema entsprechende Lamelle ist, so beschreibt man bei einem Umlauf um $\overline{a}_l^2$ der Reihe nach die durch die S_{λ_i} dargestellten Kanten des reziproken Schema, jede mit der durch ε_i angegebenen Richtung versehen. Man erhält also die Fundamentalgruppe einer geschlossenen Mannigfaltigkeit, indem man das zum vorgelegten Schema Σ reziproke Schema $\overline{\Sigma}$ bildet, in diesem aus den geschlossenen Umläufen um die Lamellen die Relationen (34) zwischen den mit S_λ bezeichneten Kanten ableitet, hierauf von einer als Grundpunkt genommenen Ecke von $\overline{\Sigma}$ zu den übrigen Ecken aus den Kanten zusammengesetzte Hilfswege bildet, welche in der auseinandergesetzten Weise zu den als erzeugende Operationen der Fundamentalgruppe dienenden geschlossenen Fundamentalwegen s_λ und den definierenden Relationen zwischen denselben verhelfen. Da aber die Fundamentalgruppen homöomorpher Schemata isomorph sind, so kann man offenbar das beschriebene Verfahren statt am reziproken Schema $\overline{\Sigma}$ bereits am ursprünglichen Schema Σ ausführen. Es ist das ein Verfahren, das besonders, wenn es sich um die tatsächliche Bestimmung der Fundamentalgruppe aus einem vorgelegten Schema einer Mannigfaltigkeit handelt, mit Vorteil anzuwenden ist.

Wendet man dieses Verfahren auf das Beispiel des Schema σ_3 der sphärischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit an, so hat man hier zwei von der Ecke a_1^0 nach der Ecke a_2^0 laufende Kanten S_1, S_2 und das Umlaufen jeder der beiden Lamellen liefert die gleiche Relation $S_1 S_2^{-1} = 1$. Wird nun als Hilfsweg vom Grundpunkte a_1^0 nach a_2^0 der Weg $U_{12} = S_2$ genommen, so erhält man die geschlossenen Fundamentalwege $s_1 = S_1 S_2^{-1}$ und $s_2 = 1$ und somit die definierenden Relationen $s_1 = s_2 = 1$ und als Fundamentalgruppe die identische Gruppe. — Für das erste (als Σ bezeichnete) im § 9 betrachtete Schema der projektiven dreidimensionalen Mannigfaltigkeit T_3 erhält man die Relation $S_1^2 = 1$ für die eine Kante $S_1 = a^1$, und da das Schema nur eine Ecke hat, so ist $S_1 = s_1$ die eine erzeugende Operation der Fundamentalgruppe, die also die zyklische Gruppe zweiter Ordnung ist.

Man überzeugt sich übrigens, daß das hier angewendete Verfahren auch für berandete Mannigfaltigkeiten mit nur eigentlichen Randmannigfaltigkeiten anwendbar bleibt. Betrachtet man z. B.

als Schema eines Kreisringes ein Rechteck $ABCD$, in dem die Seiten AD, BC einander zugeordnet sind: $A = B = a_1^0$, $C = D = a_2^0$, $AB = S_1$, $CD = S_2$, $AD = BC = S_3$, $U_{12} = S_3$, $s_1 = S_1$, $s_2 = S_3 S_2 S_3^{-1}$, $s_3 = 1$, so erhält man die Relation $S_1 S_3 S_2 S_3^{-1} = 1$ und daher für die Fundamentalgruppe die Relationen $s_1 s_3 s_2 s_3^{-1} = 1$, $s_3 = 1$, durch die die zyklische Gruppe unendlich hoher Ordnung definiert ist.

Das eben besprochene Verfahren gestattet nun in der einfachsten Weise zu erkennen, daß aus der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Mannigfaltigkeit, sowohl die Bettische Zahl P_1 als auch die Torsionszahlen erster Ordnung sich bestimmen lassen.

Hiezu denken wir uns ein solches Schema der Mannigfaltigkeit zu Grunde gelegt, für welches die Zahl α_0 der Ecken gleich 1 ist. Ein solches Schema läßt sich stets finden, da man nur von einem Fundamentalpolyeder zu dem ihm reziproken Schema übergehen braucht. Für ein solches Schema fallen nun die geschlossenen Fundamentalwege mit den fundamentalen Wegstücken S_λ zusammen, die durch die Kanten des Schema repräsentiert werden. Die aus der Betrachtung der Lamellen abgeleiteten Relationen stellen dann bereits das definierende Relationensystem zwischen den die Fundamentalgruppe erzeugenden Elementen S_λ dar. Sei nun S_j der durch die Kante a_j^1 repräsentierte Fundamentalweg und

$$S_1^{k'_{i1}} S_2^{k'_{i2}} \dots S_n^{k'_{in}} S_1^{k''_{i1}} S_2^{k''_{i2}} \dots = 1$$

die aus dem Umlaufen der Lamelle a_i^2 abgelesene definierende Relation. Dann ist offenbar $k'_{ij} + k''_{ij} + \cdots$ nichts anderes als der Koeffizient ε_{ij}^2 des Poincaréschen Relationensystems für das betrachtete Schema. Da α_1 die Zahl der erzeugenden Operationen der Fundamentalgruppe, γ_2 der Rang der aus den Zahlen $\varepsilon_{ij}^2 = k'_{ij} + k''_{ij} + \cdots$ gebildeten Matrix ist, so ist die in § 11 mit ζ bezeichnete charakteristische Zahl der Fundamentalgruppe gleich $\alpha_1 - \gamma_2 = P_1 - 1$. Es ist nämlich zu berücksichtigen, daß für das betrachtete Schema $\gamma_1 = \alpha_0 - P_0 = 0$ ist.

Die Bettische Zahl P_1 ist also gleich der um 1 vermehrten Zahl ζ der Fundamentalgruppe.[1])

Es ergibt sich aber auch aus der Bedeutung der Matrix der ε_{ij}^2 für das betrachtete definierende Relationensystem der Fundamentalgruppe der Satz:

Die Torsionszahlen erster Ordnung einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit sind die Poincaréschen Zahlen ihrer Fundamentalgruppe.

---

[1]) Vgl. Poincaré, An. Sit. p. 65.

Eine Ausführung der Beweise für diese Sätze für den Fall berandeter Mannigfaltigkeiten mit bloß eigentlichen Randmannigfaltigkeiten mag unterbleiben. Für Mannigfaltigkeiten mit uneigentlichen Randmannigfaltigkeiten (also solchen von niedrigerer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Dimension), für die bisher eine Definition der Bettischen Zahlen sowohl als der Torsionszahlen nicht gegeben wurde, mögen die ausgesprochenen Sätze als Definition dieser Zahlen angesehen werden.

Für die geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten stellen nun die Bettischen Zahlen und die Torsionszahlen außer der Fundamentalgruppe die einzigen bekannten topologischen Invarianten vor. Die Zahl N und die Zahlen Q_m des § 3 sind ja von diesen Zahlen nicht unabhängig. Die eben ausgesprochenen Sätze zeigen nun, daß wegen $P_1 = P_2$ für zweiseitige geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten aus der Fundamentalgruppe allein alle übrigen bekannten topologischen Invarianten sich ableiten lassen.

Da es anderseits, wie Poincaré[2]) gezeigt hat, Mannigfaltigkeiten gibt, welche gleiche Bettische Zahlen und Torsionszahlen, aber verschiedene Fundamentalgruppen aufweisen, so dient die Angabe der Fundamentalgruppe mehr zur Charakterisierung einer zweiseitigen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit als die aller übrigen bis jetzt bekannten topologischen Invarianten zusammengenommen. Eine Einschränkung ist bei dieser Aussage allerdings zu machen. Während sich nämlich die Gleichheit von zwei Zahlenreihen stets feststellen läßt, ist (vgl. § 11) die Frage, ob zwei Gruppen isomorph seien, nicht allgemein lösbar. Sonach ist im Gegensatze zu den anderen topologischen Invarianten die Fundamentalgruppe eine solche, deren Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung für zwei Mannigfaltigkeiten nicht auf alle Fälle entschieden werden kann.

V. Sätze und Probleme über Developpabilität und Transformationen.

§ 15.

Developpable Mannigfaltigkeiten.

Während die bisherigen Ausführungen hauptsächlich die Schemata mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten zum Gegenstand hatten, und also der kombinatorischen Analysis situs zuzuzählen sind, werden in diesem Abschnitte vorwiegend nicht auf Schemata, sondern auf Punktmannigfaltigkeiten bezügliche Begriffe erörtert werden. Doch wird eine ins Einzelne durchgeführte Begründung der mitgeteilten Sätze oder eine genaue Abgrenzung der allgemeinsten Punktmengen, für welche diese Sätze noch gelten, nicht gegeben

---

[2]) Compl. 5.

werden und bei den besprochenen Beispielen vielfach unter Berufung auf die Anschauung vorgegangen werden. Man mag sonach in den Ausführungen dieses Abschnittes V nur einen Hinweis auf noch in mancher Hinsicht der Erledigung bedürftige Fragen der Analysis situs erblicken.

Eine Mannigfaltigkeit W heiße auf eine Mannigfaltigkeit V developpabel, wenn W von gleicher Dimension wie V und einem Teil der Mannigfaltigkeit V oder der Mannigfaltigkeit V selbst homöomorph ist. Developpabel schlechthin heißen die auf eine sphärische Mannigfaltigkeit developpablen Manigfaltigkeiten.[1]) Eine auf V developpable Mannigfaltigkeit W soll auch als eine Teilmannigfaltigkeit von V bezeichnet werden und als eine echte Teilmannigfaltigkeit, wenn es einen Teil von V gibt, der mit W homöomorph ist. Wählt man aus der Gesamtheit der Teilmannigfaltigkeiten von V ein vollständiges System von einander nicht homöomorphen Mannigfaltigkeiten aus, so möge dieses System mit $\Delta(V)$ bezeichnet werden. Mit $\Delta^*(V)$ werde das in gleicher Weise für die echten Teilmannigfaltigkeiten von V gebildete System bezeichnet. Offenbar kann $\Delta(V) = \Delta^*(V)$ sein (z. B. für eine Kreisfläche oder für die Fläche zwischen zwei Kreisen), natürlich nur für berandete Mannigfaltigkeiten. Bezeichnet S_n die sphärische n-dimensionale Mannigfaltigkeit, so werde mit Δ_n die Menge $\Delta(S_n)$ aller developpablen, mit Δ_n^* die Menge $\Delta^*(S_n)$ aller berandeten developpablen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bezeichnet. Es gilt die Gleichung $\Delta(E_n) = \Delta^*(E_n) = \Delta^*(S_n)$, unter E_n die n-dimensionale Elementarmannigfaltigkeit verstanden, woraus folgt, daß, wenn V eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen ist, Δ_n^* in $\Delta(V)$ und $\Delta^*(V)$ enthalten ist.

Zwei Mannigfaltigkeiten U, V sollen nebengeordnet heißen, wenn $\Delta^*(U) = \Delta^*(V)$ ist. Hingegen soll U der Mannigfaltigkeit V untergeordnet, V der Mannigfaltigkeit U übergeordnet heißen, wenn $\Delta^*(U)$ eine echte Teilmenge von $\Delta^*(V)$ ist. Wenn U, V Mannigfaltigkeiten von gleicher Dimension sind und die gemeinsamen Elemente der Mengen $\Delta^*(U)$, $\Delta^*(V)$ eine echte Teilmenge sowohl von $\Delta^*(U)$ als von $\Delta^*(V)$ bilden, so mögen U, V etwa neutral genannt werden. Die eingeführten Anordnungsbeziehungen des Neben-, Über- oder Untergeordnetseins erfüllen die bekannten Gesetze einfacher Anordnungen. So sind z. B. zwei Mannigfaltigkeiten, die einer dritten nebengeordnet sind, auch einander nebengeordnet, so daß man die Mannigfaltigkeiten in Systeme einander nebengeordneter zusammenfassen kann. Ein solches System bilden z. B. alle in Δ_n enthaltenen Mannigfaltigkeiten. Jede auf eine Mannigfaltigkeit V developpable Mannigfaltigkeit ist V entweder unter- oder nebengeordnet. Ein Beispiel zueinander neutraler Mannigfaltigkeiten bilden die projektive Ebene T_2 und die zweiseitige geschlossene Fläche vom Geschlecht $p = 1$. Es ist nicht unwahr-

[1]) Diese Bezeichnung rührt von Poincaré her (Compl. 5, § 5, p. 90).

scheinlich, daß es im Falle von drei Dimensionen bereits unter den zweiseitigen Mannigfaltigkeiten zu einander neutrale Mannigfaltigkeiten gibt.

Wenn die Mannigfaltigkeit U der Mannigfaltigkeit V übergeordnet, bezw. untergordnet, bezw. zu ihr neutral ist, so möge auch das System der zu U nebengeordneten Mannigfaltigkeiten dem System der zu V nebengeordneten Mannigfaltigkeiten übergeordnet, bezw. untergeordnet, bezw. zu ihm neutral heißen. Ein System S von einander nebengeordneten Mannigfaltigkeiten heiße einem anderen System T μ-stufig übergeordnet, wenn sich $(\mu - 1)$ aber nicht mehr Systeme nebengeordneter Mannigfaltigkeiten $S_1, S_2, \ldots S_{\mu-1}$ finden lassen, so daß S_i dem System S_{i+1}, S dem S_1 und $S_{\mu-1}$ dem T übergeordnet ist. Wenn das System S dem System Δ_n μ-stufig übergeordnet ist, so heiße μ die Stufe des Systems S und jeder demselben angehörenden Mannigfaltigkeit. Als Beispiel mögen die zweiseitigen Flächen vom Geschlechte p (mit p die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitten) betrachtet werden. Alle Flächen von gleichem Geschlechte bilden ein System nebengeordneter Mannigfaltigkeiten, das System der Flächen vom Geschlechte $p+q$ ist dem System der Flächen vom Geschlechte p q-stufig übergeordnet, und die Stufe einer Fläche ist gleich ihrem Geschlechte.

In den besprochenen Anordnungsverhältnissen (z. B. der Stufe) haben wir topologische Invarianten vor uns, die wir freilich im Falle von mehr als zwei Dimensionen noch keineswegs beherrschen. Wir haben nicht einmal eine Übersicht über die Gesamtheit der Mannigfaltigkeiten des Systems Δ_3, also über die developpablen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, selbst dann nicht, wenn wir uns auf einfache Fälle beschränken. Greifen wir etwa die von einer einzigen Fläche vom Geschlechte 1 berandeten developpablen Mannigfaltigkeiten heraus. Das einfachste Beispiel einer solchen Mannigfaltigkeit stellt der von einer Torusfläche berandete Teil des $\mathfrak{R}_3$ vor. Die Fundamentalgruppe dieser Mannigfaltigkeit ist die aus einer Operation, für die keine definierende Relation besteht, erzeugte zyklische Gruppe unendlich hoher Ordnung. Eine dieser Mannigfaltigkeit homöomorphe erhält man, wenn man aus einer Kugel einen zylindrischen Kanal ausbohrt. Würde man statt dessen einen verknoteten Kanal wie in Fig. 3 aus der Kugel ausbohren, so wäre die Fundamentalgruppe der so entstandenen Mannigfaltigkeit aus zwei erzeugenden Operationen mit der Relation $sts = tst$ aufgebaut, so daß diese Mannigfaltigkeit mit der erstgenannten nicht homöomorph sein kann.[2]) Würde man den ausgebohrten Kanal in komplizierterer Weise verknotet annehmen, so erhielte man wieder andere Mannigfaltigkeiten. Die auf diese Weise er-

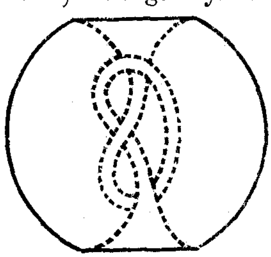

Fig. 3.

[2]) Vgl. meine Note in den Wr. Ber., Punkt 3.

haltenen Mannigfaltigkeiten kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß man in der sphärischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit eine geschlcssene Linie L, die irgendwie verknotet sein kann, zieht, längs dieser Linie eine kleine Kugel wandern läßt und den von der Kugel überstrichenen Raum von der sphärischen Mannigfaltigkeit fortnimmt. Ob zwei derart entstandene Mannigfaltigkeiten nur dann homöomorph sein können, wenn die Linie L die bei der Herstellung der einen Mannigfaltigkeit verwendet wurde, mit der zur anderen Mannigfaltigkeit gehörenden Linie L oder mit deren Spiegelbild „gleichartig verknotet" ist (so daß die Linien ineinander oder die eine in das Spiegelbild der anderen deformiert werden können), ist nicht untersucht worden. Ja, es ist mir nicht einmal ein Beweis dafür bekannt, daß jede von einer einzigen Fläche $p = 1$ berandete developpable dreidimensionale Mannigfaltigkeit einer auf die genannte Art entstandenen Mannigfaltigkeit homöomorph ist, daß also durch die so herstellbaren Mannigfaltigkeiten die Gesamtheit aller von einer Fläche $p = 1$ berandeten Mannigfaltigkeiten erschöpft ist.

Sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß für die zweidimensionalen developpablen Mannigfaltigkeiten eine Eigenschaft charakteristisch ist, die bei größerer Dimensionszahl auch bei anderen als developpablen Mannigfaltigkeiten auftreten kann. Offenbar zerfällt nämlich eine developpable n-dimensionale Mannigfaltigkeit durch jede im Innern derselben konstruierte $(n-1)$-dimensionale geschlossene Schnittmannigfaltigkeit. Umgekehrt ist jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die durch jede geschlossene Schnittlinie zerfällt, auch developpabel. Diese Umkehrung ist bereits für $n = 3$ nicht richtig, wie das von Poincaré (Compl. 5, § 6) mitgeteilte Beispiel einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit V zeigt, deren Bettische Zahl $P_2 = 1$ ist, so daß es keine die Mannigfaltigkeit nicht zerstückende geschlossene Schnittfläche geben kann. V ist aber offenbar nicht developpabel, da V geschlossen, aber von der sphärischen Mannigfaltigkeit verschieden ist.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, welche keine anderen als uneigentliche Randmannigfaltigkeiten[3]) besitzen, beigefügt werden. Eine solche Mannigfaltigkeit W ist durch ein n-dimensionales Schema definiert, in welchem durch besondere Verfügungen die Punkte gewisser m-dimensionaler Zellen $(m = 0, 1, \ldots n-2)$ von der Mannigfaltigkeit ausgeschlossen werden. Sieht man von diesen Verfügungen ab, so hat man das Schema einer geschlossenen Mannigfaltigkeit V vor sich, auf die W developpabel ist. Es mögen nun für den Fall $n = 3$ einige Sätze entwickelt werden, welche zeigen, daß es unter den auf eine und dieselbe geschlossene Mannigfaltigkeit V

[3]) Siehe § 2, Anm. 4. Der Ausdruck Randmannigfaltigkeit wird in diesem Abschnitt auf aus Randpunkten bestehende „Komplexe" (also keine Mannigfaltigkeiten im Sinne des Abschnittes I) ausgedehnt.

developpablen, nur uneigentliche Randmannigfaltigkeiten besitzenden Mannigfaltigkeiten solche gibt, die homöomorph sind, obwohl sie anscheinend von ganz verschiedenem Charakter und durch nicht homöomorphe Schemata definiert sind.

Nehmen wir etwa an, das Schema der Mannigfaltigkeit W sei aus dem der geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit V dadurch erhältlich, daß eine Anzahl von Kanten des Schema von V, jedoch keine isolierten (d. h. nicht auf von V ausgeschlossenen Kanten liegenden) Ecken, von der Mannigfaltigkeit ausgeschieden werden. Die Gesamtheit dieser Kanten bildet einen sogenannten eindimensionalen Komplex K und wir wollen voraussetzen, derselbe sei zusammenhängend, d. h. man könne von jeder Kante a des Komplexes zu jeder anderen Kante des Komplexes, die mit a keinen Endpunkt gemein hat, über Kanten des Komplexes gelangen. Eine Ecke des Schema V heiße ein freier Endpunkt des Komplexes K, wenn in ihm eine und nur eine Kante des Komplexes und diese Kante nur mit einem ihrer Endpunkte, endet. Mit $V(K)$ werde diejenige berandete Mannnigfaltigkeit bezeichnet, die aus V durch Ausscheiden des eindimensionalen Komplexes K entsteht. Man kann nun den Satz beweisen:

Ist K ein zusammenhängender eindimensionaler Komplex, so ist die dreidimensionale Mannigfaltigkeit $V(K)$ einer Mannigfaltigkeit $V(L)$ homöomorph, für welche L entweder keine freien Endpunkte hat oder aus einer einzigen Kante besteht.

Ist nämlich k eine Kante von K mit einem freien Endpunkt A, während der andere Endpunkt B noch an anderen Kanten von K liegt, so lege man um A als Mittelpunkt eine kleine Kugel und lasse diese Kugel sich so in V bewegen, daß ihr Mittelpunkt die Kante $k = AB$ beschreibt, während gleichzeitig ihr Radius bei Annäherung an B stetig gegen Null abnimmt. Das von der variablen Kugel überstrichene Stück von V stellt dann einen die Kante k umschließenden, einfach zusammenhängenden Raum R vor, in dessen Innern A, auf dessen Rand B liegt. Die bewegliche Kugel sei in jeder ihrer Lagen so klein gewählt, daß R mit K außer den Punkten von k keine anderen Punkte gemein hat. Unter R_1 werde die Mannigfaltigkeit verstanden, die man erhält, wenn man aus der Gesamtheit der Punkte von R, zu denen auch die Randpunkte zu zählen sind, die Punkte von k (einschließlich der Punkte A, B) ausscheidet. Mit R_2 werde die Gesamtheit aller Punkte von R mit Ausschluß von B, mit S die Gesamtheit aller Randpunkte von R mit Ausschluß von B bezeichnet.

Es lassen sich nun R_1 und R_2 eineindeutig und stetig so aufeinander abbilden, daß dabei jeder Punkt von S sich selbst entspricht. Um dies einzusehen, denke man sich R in die durch die Ungleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4, \quad z \geqq 0$$

definierte Punktmannigfaltigkeit M so deformiert, daß dabei die Punkte A, B und die Kante k in die Punkte $A' = (0, 0, 1)$, $B' = (0, 0, 0)$ und die Strecke $A'B'$ übergehen. Mit M_1, M_2, N mögen die Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden, in die dabei R_1, R_2, S übergehen. Nun vermitteln die Formeln

$$\rho = \rho', \ \varphi = \varphi', \ z = \frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} + \frac{z'}{2},$$

wo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ ist und ρ, φ, z bezw. ρ', φ', z' auf M_1, bezw. M_2 sich beziehende Koordinaten sind, eine eineindeutige stetige Abbildung t von M_1 auf M_2, bei der die Punkte von N sich selbst entsprechen, und daher leistet $u t u^{-1}$ die gewünschte Abbildung von R_1 auf R_2, unter u die Transformation von R in M verstanden. Die Möglichkeit dieser Abbildung zeigt aber, daß $V(K)$ mit $V(K_1)$ homöomorph ist, wenn K_1 jenen Komplex bedeutet, der aus K durch Weglassung der Kante k entsteht. Durch fortgesetzte Anwendung derartiger Abbildungen kann man aber alle Kanten des Komplexes, deren einer Endpunkt ein freier Endpunkt ist, wegschaffen.[4])

Eine andere Abbildung, die gleichfalls zeigt, daß verschiedenartige Komplexe K, L auf homöomorphe Mannigfaltigkeiten $V(K)$, $V(L)$ führen, erhält man folgendermaßen. Man greife eine Kante $k = AB$ eines Komplexes K heraus, die etwa so beschaffen sei, daß sowohl in A als in B noch mindestens zwei andere Kanten von K endigen. Man führe nun eine kleine bewegliche Kugel so, daß ihr Mittelpunkt k beschreibt und ihr Radius bei Annäherung an A sowohl wie an B auf Null herabsinkt. Den von der Kugel beschriebenen Raum R denken wir uns nun abgebildet auf den durch

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \leqq 1, \ -1 \leqq z \leqq +1,$$

definierten zylindrischen Raum M, und zwar derart, daß dabei der Kante k das M angehörende Stück der z-Achse entspricht. R_1 heiße die Gesamtheit der Punkte von R mit Ausschluß von k, M_1 die Gesamtheit der Punkte von M, für die $\rho > 0$. Man setze $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$. Die durch die Formeln

$$\rho' = \rho, \ \varphi' = \varphi, \ z' = \rho z$$

geleistete Abbildung der Punkte von M_1 auf die Menge der Punkte

$$0 < \rho'^2 \leqq 1, \ z'^2 \leqq \rho'^2$$

[4]) Führt das angewendete Verfahren schließlich auf $V(L)$, wo L aus einer einzigen Kante k mit zwei freien Endpunkten besteht, so gelangt man durch nochmalige Anwendung der beschriebenen Abbildung auf eine Mannigfaltigkeit $V(B)$, die aus V durch Weglassung eines einzigen Punktes B entsteht.

zeigt nun die Möglichkeit $V(K)$ auf eine Mannigfaltigkeit $V(L)$ eineindeutig stetig abzubilden, die durch einen Komplex L erzeugt wird, der aus K dadurch entsteht, daß man k immer kürzer und kürzer werden läßt, bis A und B zusammenfallen. — Durch Abbildungen von inversem Charakter kann man zeigen, daß, wenn K eine Ecke e enthält, in der $r\,(\geq 4)$ Kanten $k_1, \ldots k_r$ endigen, $V(K)$ einer Mannigfaltigkeit $V(K')$ homöomorph ist, wobei K' aus K dadurch entsteht, daß e durch zwei durch eine neue Kante k verbundene Ecken e_1, e_2 ersetzt ist, derart, daß $k_1, k_2, \ldots k_s, k$ in e_1 und $k_{s+1}, \ldots k_r, k$ in e_2 endigen. Man erhält so den Satz:

Jede dreidimensionale Mannigfaltigkeit $V(K)$ ist einer Mannigfaltigkeit $V(L)$ homöomorph, derart, daß in jeder Ecke von L höchstens drei Kanten endigen.[5])

So sind z. B. die beiden Mannigfaltigkeiten $V(K)$ und $V(L)$ homöomorph, die man erhält, wenn man für V die dreidimensionale sphärische Mannigfaltigkeit S_3 wählt, die man sich durch den Euklidischen Raum repräsentiert denken kann, wenn man denselben durch einen unendlich fernen Punkt zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ergänzt, für K zwei in einer Ebene α von S_3 liegende einander berührende Kreise und für L die Gesamtheit der Punkte zweier auseinanderliegender Kreise C, C' von α und der Verbindungsstrecke eines Punktes von C mit einem Punkt von C'. Man kann alle diejenigen in einer Mannigfaltigkeit V gelegenen eindimensionalen Komplexe K in eine Klasse zusammenfassen, die zu untereinander homöomorphen Mannigfaltigkeiten $V(K)$ führen. Wählt man für V die sphärische Mannigfaltigkeit S_3, so kann man speziell nach jenen geschlossenen Linien in S_3 fragen, die mit einer vorgelegten geschlossenen Linie in dieselbe Klasse gehören. Nennt man (wie oben) zwei Linien des S_3 „gleichartig verknotet", wenn sich der S_3 so in sich deformieren läßt (über den Begriff der Deformation in sich siehe § 16), daß dabei die eine Linie in die andere übergeführt wird,[6]) so ist klar, daß $S_3(L_1)$ und $S_3(L_2)$ homöomorph sind, wenn L_1 mit L_2 oder dem Spiegelbild von L_2 gleichartig verknotet ist, und das gleiche gilt, wenn L_1, L_2 zwei Systeme geschlossener Linien sind, deren eines mit dem anderen oder mit dessen Spiegelbild gleichartig verschlungen ist. Es entsteht die Frage, ob umgekehrt, wenn zwei in S_3 gelegene

[5]) Sowohl bei diesem als bei dem oben ausgesprochenen Satze sind die Schemata der beiden Mannigfaltigkeiten im allgemeinen nicht homöomorph. Daraus ergibt sich, daß, wenn uneigentliche Randmannigfaltigkeiten auftreten, der Satz von der Homöomorphie der Schemata homöomorpher Mannigfaltigkeiten nicht mehr giltig ist (siehe § 2, Anm. 9). Für eigentliche Randmannigfaltigkeiten liegt die Sache deswegen anders, weil für diese festgesetzt wurde (§ 2, Anm. 4), daß ihre Punkte der berandeten Mannigfaltigkeit zuzuzählen sind.

[6]) In gleicher Weise werde für zwei Systeme geschlossener Linien und überhaupt für zwei eindimensionale Komplexe der Begriff „gleichartig verschlungen" definiert.

geschlossene Linien L_1, L_2 (bezw. Systeme geschlossener Linien) in dieselbe Klasse gehören, dann stets L_1 mit L_2 oder dem Spiegelbild von L_2 gleichartig verknotet (bezw. verschlungen ist.[7])

Sei noch bemerkt, daß jede dreidimensionale[8]) Mannigfaltigkeit W mit nur uneigentlichen Randmannigfaltigkeiten — dieselbe möge aus der geschlossenen Mannigfaltigkeit V durch Ausschließen gewisser Ecken und Kanten entstanden sein — homöomorph ist mit einer gleichfalls auf V developpablen Mannigfaltigkeit U mit eigentlichen Randmannigfaltigkeiten, wobei jedoch die Randpunkte von U nicht zu U zu zählen sind.[9])

Sei nämlich A eine ausgeschlossene isolierte Ecke. Dann lege man um A als Mittelpunkt eine kleine Kugel mit dem Radius 2ρ. Sind r, φ, ϑ Polarkoordinaten mit dem Punkt A als Ursprung, so wird durch die Transformation

$$\varphi' = \varphi,\ \vartheta' = \vartheta,\ r' = \frac{1}{2} r + \rho$$

die Gesamtheit der Punkte $0 < r \leqq 2\rho$ eineindeutig stetig auf die Gesamtheit der Punkte $\rho < r' \leqq 2\rho$ abgebildet. Der Randpunkt A ist also durch die Randfläche $r = \rho$ ersetzt. Handelt es sich anderseits darum, eine durch einen eindimensionalen Komplex K vorgestellte uneigentliche Randmannigfaltigkeit durch eine eigentliche Randmannigfaltigkeit zu ersetzen, so mögen zunächst die Punkte, in denen Kanten endigen, ins Auge gefaßt werden. Um jeden solchen Punkt B werde eine kleine Kugel vom Radius 2ρ gelegt und angenommen, was ja durch eine Deformation erreicht werden kann, die in B endenden Kanten verliefen innerhalb dieser Kugel geradlinig. Wenden wir dann auf die Punkte $0 < r \leqq 2\rho$ wieder die oben angeschriebene Transformation an, so wird jeder Kantenendpunkt B durch eine Kugel vom Radius ρ ersetzt, deren Punkte von der Mannigfaltigkeit ausgeschlossen sind. Jede einzelne Kante k von K verbindet jetzt zwei Punkte P, Q, deren jeder auf einer dieser Kugeln σ liegt. Die so gewonnene, mit W homöomorphe Mannigfaltigkeit heiße W_1. Läßt man nun eine kleine Kugel sich so bewegen, daß ihr Mittelpunkt die Kante k beschreibt, so besteht der von der Kugel überstrichene Raum von W_1 aus einem zylindri-

[7]) In meiner bereits zitierten Note habe ich diese Frage bejahend beantwortet, mich dabei aber auf den (wie die Ausführungen des Textes zeigen) irrtümlich als giltig angenommenen Satz gestützt, daß aus der Homöomorphie von $S_3(K)$ und $S_3(L)$, unter K, L irgendwelche eindimensionale Komplexe verstanden, stets geschlossen werden könne, K sei mit L oder mit dem Spiegelbild von L gleichartig verschlungen.

[8]) Das gleiche gilt, wie man sich leicht überzeugt, für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten mit isolierten Randpunkten.

[9]) Vgl. Anm. 4 u. 5 des § 2. Obwohl also alle uneigentlichen Randmannigfaltigkeiten durch eigentliche ersetzt werden können, ist es trotzdem nützlich, die uneigentlich berandeten Mannigfaltigkeiten besonders in Betracht zu nehmen, da sie z. B. bei der in § 18 besprochenen Darstellungsform eine Rolle spielen.

schen Stück, von dem die Punkte der Linie k ausgeschlossen sind, und läßt sich also eineindeutig stetig auf die durch

$$0 < R^2 = x^2 + y^2 \leqq 4, \quad -1 < z < +1$$

definierte Mannigfaltigkeit M abbilden. Wird $\varphi = \operatorname{arc\,tg} y/x$ gesetzt, und die durch

$$R' = \frac{1}{2} R + 1, \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = z$$

gelieferte Abbildung von M auf die Mannigfaltigkeit $1 < R' \leqq 2$, $-1 < z' < +1$ betrachtet, so wird ersichtlich, daß die Randkante $k = PQ$ von W_1 ersetzt werden kann durch eine zylindrische Randfläche, deren Punkte nicht zur Mannigfaltigkeit zu rechnen sind. Die Kugeln σ zusammen mit diesen zylindrischen Flächenstücken liefern so viele geschlossene Randflächen, als zusammenhängende eindimensionale Komplexe von W ausgeschieden waren.

Sei schließlich noch angeführt, daß man den Developpabilitätsbegriff erweitern kann, indem man eine Mannigfaltigkeit W, die einem Teil von V homöomorph ist, auch dann auf V developpabel nennt, wenn W von niedrigerer Dimension als V ist. Man kann noch weitergehen und beliebige auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit V oder aber auf irgend eine Punktmenge „developpable“ Punktmengen in Betracht ziehen. So kann man z. B., wenn irgend eine Punktmenge P vorgegeben ist, nach der kleinsten Dimensionszahl m einer Elementarmannigfaltigkeit E_m fragen, auf die P developpabel ist.[10])

§ 16.

Transformationen und Deformationen von Mannigfaltigkeiten in sich.[1])

Eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung einer Mannigfaltigkeit V auf sich selbst werde als eine **Transformation** der Mannigfaltigkeit in sich bezeichnet. Seien t', t'' zwei Transformationen von V in sich, P ein Punkt von V und P', P'' die Punkte, in welche P durch t', bezw. t'' transformiert wird. Wir wollen dann sagen, die beiden Transformationen t', t'' seien um weniger als ε voneinander entfernt, wenn für jeden Punkt P von V die beiden Bildpunkte P', P'' voneinander um weniger als ε entfernt sind.[2]) Zwei Transformationen t_1, t_2 von V in sich sollen

[10]) In diesen Fragenkreis läßt sich auch die in § 2, Anm. 13 aufgeworfene Frage einordnen.

[1]) Auf die im Folgenden besprochenen Beziehungen zwischen den Transformationen einer Mannigfaltigkeit in sich und den Isomorphien der Fundamentalgruppe habe ich bereits in meiner oben zitierten Note hingewiesen.

[2]) Es wurde bereits in § 1 darauf hingewiesen, daß für den Begriff der Mannigfaltigkeiten und ihrer stetigen Abbildungen, auf dem die Analysis situs der Punktmannigfaltigkeiten beruht, die eingeführte Definition der Entfernung zweier Punkte maßgebend ist.

gleichartig heißen, wenn sich eine Folge von Transformationen $t(a)$ angeben läßt, so daß zu jedem Werte des Parameters a, der den Ungleichungen $0 \leqq a \leqq 1$ genügt, eine Transformation $t(a)$ gehört, wenn dabei $t(0) = t_1$ und $t(1) = t_2$ ist, und wenn $t(a)$ stetig von a abhängt. Hierunter ist zu verstehen, daß für jedes a_0 $(0 \leqq a_0 \leqq 1)$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ sich so finden läßt, daß für $|a - a_0| < \delta$ die Transformationen $t(a_0)$ und $t(a)$ um weniger als ε voneinander entfernt sind. Die mit der identischen Transformation gleichartigen Transformationen sollen D e f o r m a t i o n e n von V in sich heißen.

Erläutern wir diese Definitionen, die sich übrigens von Mannigfaltigkeiten auf beliebige Punktmengen übertragen lassen[3]), kurz an dem Beispiel der zweiseitigen geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 1, die wir uns durch eine Ringfläche versinnlicht denken. Die Anschauung liefert uns hier ohne weiteres einen Überblick über den Sachverhalt. Bedeutet x einen Meridiankreis, y einen Breitenkreis der Ringfläche, jede dieser geschlossenen Linien in einer bestimmten Richtung genommen, und ω_x, ω_y die Perioden, die ein auf der Fläche ausgebreitetes elliptisches Integral erster Gattung längs des Weges x, bezw. y erfährt, so wird durch jede Deformation der Fläche in sich x in einen sich nicht durchsetzenden Weg x', y in einen ebensolchen Weg y' transformiert, derart daß die Perioden des Integrals längs x' und y' wieder gleich ω_x und ω_y sind. Hingegen werden die Perioden $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ längs jener Wege x', y', in welche x, y durch eine beliebige Transformation der Fläche in sich übergeführt werden, durch Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \alpha \,.\, \omega_x + \beta\, \omega_y \\ \omega_{y'} &= \gamma \,.\, \omega_x + \delta\, \omega_y \end{aligned} \tag{38}$$

dargestellt sein, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind, für welche $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich $+1$ oder -1 ist. Umgekehrt wird es zu jedem Quadrupel ganzer Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von der Determinante $+1$ oder -1 auch Transformationen der Fläche in sich geben, für welche die Perioden $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ durch (38) gegeben sind, und alle Transformationen mit übereinstimmenden Werten der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind gleichartige. Erteilt man der Fläche in bestimmter Weise, etwa mittelst einer Indikatrix, einen Sinn, so wird dieser Sinn bei einer Transformation der Fläche in sich erhalten bleiben oder in den entgegengesetzten verwandelt werden, je nachdem für die Transformation $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich $+1$ oder gleich -1 ist. Die Gruppe T^* aller jener Transformationen der Fläche in sich, bei denen der Sinn der Fläche erhalten bleibt, bildet eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2 der Gruppe T der sämtlichen Trans-

[3]) Die für die kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten in der genannten Note gegebene Definition der Deformationen deckt sich offenbar für dieselben mit der im Text gegebenen Definition.

formationen der Fläche in sich. Die Gruppe D aller Deformationen in sich ist eine ausgezeichnete Untergruppe von T sowohl wie von T^*, und die komplementäre Gruppe T/D ist der Gruppe A der ganzzahligen binären linearhomogenen Substitutionen der Determinante $+1$ oder -1, die Gruppe T^*/D der Gruppe B der ganzzahligen binären linearhomogenen Substitutionen der Determinante $+1$ holoedrisch isomorph. Ziehen wir nun die Fundamentalgruppe F der betrachteten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit heran, die sich aus zwei erzeugenden Operationen s, t, die durch die Relation $s t s^{-1} t^{-1} = 1$ verbunden sind, aufbauen läßt und sich also als die aus zwei erzeugenden Operationen gebildete kommutative Gruppe darstellt, so repräsentiert A offenbar auch die Gruppe aller Isomorphien von F in sich (wenn wir wieder, auf den Standpunkt des allgemeinen Gruppenbegriffes uns stellend, holoedrisch isomorphe Gruppen als nicht verschieden erklären).

So wie in dem vorliegenden Beispiel, so gelten zwischen den betrachteten Gruppen ganz allgemein analoge Beziehungen. Die Gruppe D aller Deformationen einer Mannigfaltigkeit V in sich ist in der Gruppe aller Transformationen von V in sich ausgezeichnet enthalten und ebenso, wenn die Mannigfaltigkeit zweiseitig ist, in der Gruppe T^* aller den Sinn der Mannigfaltigkeit nicht ändernden Transformationen in sich. Ist die Mannigfaltigkeit zusammenhängend, so sind die komplementären Gruppen $G = \frac{T}{D}$, $G^* = \frac{T^*}{D}$ mit den Gruppen $\frac{T^0}{D^0}$, bezw. $\frac{T^{*0}}{D^0}$ identisch, wenn unter D^0, T^0, T^{*0} die Gruppe aller jener Deformationen bezw. Transformationen, bezw. den Sinn erhaltenden Transformationen der Mannigfaltigkeit in sich verstanden wird, bei denen ein beliebig ausgewählter Innenpunkt M_0 der Mannigfaltigkeit fest bleibt. Nun können wir als Elemente der Fundamentalgruppe F von V ein System von nicht ineinander überführbaren von M_0 ausgehenden und nach M_0 zurückkehrenden Wegen $a_1, a_2, \ldots$ wählen und den Charakter von F durch die Gesetze der Zusammensetzung dieser Wege [4]) bestimmt ansehen.

Jeder Transformation aus T^0 entspricht nun eine Permutation der Wege a_i, die so beschaffen ist, daß Relationen zwischen den Wegen auch zwischen den permutierten Wegen bestehen bleiben. Den Transformationen entsprechen also Isomorphien von F in sich. Allen gleichartigen Transformationen entspricht dieselbe, allen Deformationen die identische Permutation, und daher entspricht auch jeder Operation von $G = \frac{T^0}{D^0} = \frac{T}{D}$ eine Operation aus der

[4]) Zwei Wege nacheinander ausgeführt stellen offenbar wieder einen geschlossenen Weg dar. Eine Relation $a_i\, a_k = a_l$ zwischen den geschlossenen Wegen bedeutet dann nichts anderes, als das Bestehen der entsprechenden Relation zwischen den den Wegen a_i, a_k, a_l zugehörigen Substitutionen der Werte einer beliebigen in V unverzweigten Funktion (siehe § 12, Anm. 6).

Gruppe J aller Isomorphien von F in sich. Sind nun τ, τ', τ'' Operationen aus T^0, die der Relation $\tau\tau' = \tau''$ genügen, so besteht offenbar auch zwischen den zugeordneten Isomorphien j, j', j'' von F in sich die Relation $jj' = j''$. Das Gleiche gilt, wenn unter τ, τ', τ'' Operationen von G verstanden werden. Somit ist G, und analog G^*, einer Untergruppe H bezw. H^* von J isomorph, und zwar im allgemeinen meriedrisch. Es kann nämlich mehreren, etwa μ Operationen von G dieselbe Operation von J entsprechen. Betrachten wir noch das Beispiel der durch einen Kreisring repräsentierten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, für welches G gleich der Vierergruppe, G^* gleich der zyklischen Gruppe 2. Ordnung, F gleich der zyklischen Gruppe unendlich hoher Ordnung und daher J gleich der cyklischen Gruppe 2. Ordnung ist. Man erhält $H = H^* = J$ und somit $\mu = 2$, während G^* mit H^* holoedrisch isomorph ist. Es sei bemerkt, daß in beiden betrachteten Beispielen H mit J zusammenfällt.

Die Gruppen G, G^*, H, H^* stellen offenbar topologische Invarianten dar, über die wir freilich derzeit noch in sehr geringem Maße verfügen. Wurde bereits bezüglich der Fundamentalgruppe bemerkt, daß derselben in gewissem Sinne nicht dieselbe Bedeutung zukommt, wie den vorher besprochenen topologischen Invarianten, so lange eine Methode, allgemein die Gleichheit oder Verschiedenheit von zwei Gruppen festzustellen, nicht bekannt ist, so kann doch stets, wenn die Mannigfaltigkeit durch ein Schema gegeben ist, ihre Fundamentalgruppe wenigstens in einer bestimmten speziellen Darstellungsform durch erzeugende Operationen und definierende Relationen ermittelt werden. Von den Gruppen G, G^*, H, H^* aber kann auch dies nicht mehr behauptet werden. Das Gleiche gilt übrigens bereits von der Gruppe J, deren Bestimmung aus F freilich eine rein gruppentheoretische Aufgabe ist.

Wenn es sich darum handelt, die genannten Gruppen für eine vorgelegte Mannigfaltigkeit zu bestimmen, so können wir uns die Aufgabe stellen, diese Bestimmung aus dem Schema der Mannigfaltigkeit durchzuführen. Man wird sich dementsprechend damit befassen, für die Schemata Begriffe zu definieren, die die Transformationen und Deformationen der Mannigfaltigkeit in sich abbilden.[5]) Es sind dann für die so definierten Begriffe kombinatorischer Natur die zu den besprochenen Gruppen analogen Gruppen aufzustellen und Beweise für die oben genannten auf diese Gruppen bezüglichen Sätze zu erbringen. Gleicherweise werden auch Sätze zu erweisen sein, wie der weiter unten verwendete Satz: Eine

---

[5]) Um die Art, in der dies geschehen kann, zu charakterisieren, mag hingewiesen werden einerseits auf die Untersuchungen von C. Jordan (Recherches sur les polyèdres, Crelles J., Bd. 66) über den Begriff des „aspect" eines Polyeders, und die Frage, ob verschiedene Aspekte eines und desselben Polyeders einander ähnlich sein können, anderseits darauf, wie in dem bereits genannten Enzyklopädieartikel Dehn-Heegaard (IIIAB3, Grundlagen 7) auf eine ganz auf den Begriff des Schema basierte Art, Deformationen eingeführt werden, die innerhalb einer Mannigfaltigkeit V mit Figuren, die in V liegen, vollzogen werden.

einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit gestattet keine anderen den Sinn der Mannigfaltigkeit erhaltenden Transformationen in sich als Deformationen in sich, und außer diesen überhaupt keine anderen Transformationen in sich als Deformationen zusammengesetzt mit einer Spiegelung. Dabei ist als Spiegelung der geschlossenen n-dimensionalen bezw. der berandeten $(n+1)$-dimensionalen einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2=1 \text{ bezw. } \leqq 1$$

die Transformation

$$x_1'=x_1,\ x_2'=x_2,\ \ldots\ x_n'=x_n,\ x_{n+1}'=-x_{n+1}$$

anzusehen.

Die oben genannten Sätze über die Beziehungen der genannten Transformationsgruppen unter sich und zu den Isomorphien der Fundamentalgruppe in sich bedürfen aber nicht bloß bezüglich ihrer Einfügung und Entwicklung in die auf den Begriff des Schema gegründete kombinatorische Analysis situs, sondern auch noch in anderer Hinsicht einer Ergänzung. Es sind ja nicht nur die bei den betrachteten Beispielen vorliegenden Verhältnisse unter Berufung auf die Anschauung auseinandergesetzt worden, sondern es bedürfen auch die allgemeinen Sätze einer schärferen Präzisierung und Begründung, namentlich was die Feststellung der allgemeinsten Voraussetzungen betrifft, die man Punktmengen auferlegen muß, damit für die Transformationen und Deformationen dieser Punktmengen in sich die genannten Sätze noch bestehen bleiben. Läßt sich ja doch die Definition der Transformation und Deformation in sich genau so wie die der Homöomorphie ebensogut wie auf kontinuierliche auch auf beliebige Punktmengen anwenden.

Die oben angestellten Betrachtungen über die Transformationen einer Mannigfaltigkeit V in sich lassen sich noch in gewissem Sinne erweitern. Nimmt man nämlich an, V sei berandet und es seien $W_1, W_2, \ldots$ die Randmannigfaltigkeiten von V. Durch eine Transformation von V in sich werden dann die Mannigfaltigkeiten W_i permutiert werden. Für die Deformationen von V in sich wird diese Permutation die identische sein und man kann also von der Permutation der W_i, die durch eine bestimmte Operation von G hervorgerufen wird, sprechen. Die den einzelnen Operationen von G derart zugeordneten Permutationen der W_i bilden eine zu G mehrstufig isomorphe Gruppe P, die im allgemeinen intransitiv ist. Die Systeme der Intransitivität dieser Permutationsgruppe werden von jenen Systemen von Randmannigfaltigkeiten gebildet, die durch Transformationen von V in sich ineinander übergeführt werden können. Wir wollen weiterhin annehmen, alle W_i seien eigentliche Randmannigfaltigkeiten und die Punkte der W_i seien sonach, zufolge der seinerzeit gemachten Festsetzung der Mannigfaltigkeit V zuzuzählen. Diejenigen Mannigfaltigkeiten W_i, die einem der besprochenen Systeme angehören, müssen sonach **notwendig** untereinander homöomorph sein.[6])

Greift man eine bestimmte Mannigfaltigkeit W_i heraus, so bilden diejenigen Operationen von T bezw. G, bei welchen W_i in sich selbst transformiert wird, eine Untergruppe T_i von T bezw. eine Untergruppe G_i von G. Jeder in T_i enthaltenen Transformation von V in sich entspricht eine Transformation von W_i in sich, und ebenso entspricht jeder Operation aus G_i eine Operation jener Gruppe Γ_i, die für die Transformationen der Mannigfaltigkeit W_i in sich dieselbe Rolle spielt, wie die Gruppe G für die Transformationen von V in sich. Im allgemeinen werden diejenigen Operationen von Γ_i, welche Operationen von G_i entsprechen, die Gruppe Γ_i nicht erschöpfen, sondern eine Untergruppe Γ_i' der Gruppe Γ_i bilden. Γ_i' ist zu G_i (meriedrisch) isomorph. Wenn W_j, W_k einem und demselben der oben genannten Systeme ineinander transformierbarer Randmannigfaltigkeiten angehören, so sind G_j und G_k gleichberechtigte Untergruppen von G und es sind nicht nur die Gruppen Γ_j, Γ_k (was eine bloße Folge der Homöomorphie von W_j und W_k ist), sondern auch die Gruppen Γ_j', Γ_k' holoedrisch isomorph.

Ist V zweiseitig und beschränkt man sich auf Transformationen von V in sich, die den Sinn erhalten, so gelangt man zur Betrachtung der Gruppe P^* jener Permutationen der W_i, die durch Operationen von T^* hervorgerufen werden, zur Gruppe T_i^*, G_i^* jener Operationen aus T^* bezw. G^*, bei denen W_i in sich selbst übergeht und zur zugehörigen Untergruppe $\Gamma_i^{*\prime}$ der Gruppe Γ_i^* aller den Sinn von W_i erhaltenden Operationen aus Γ_i.

Ein einfaches Beispiel möge einige der besprochenen allgemeinen Begriffe und Sätze erläutern. Für V werde der von einer Torusfläche eingeschlossene dreidimensionale Raum gewählt. Die einzige Randmannigfaltigkeit W_1 ist also die bereits oben betrachtete Ringfläche und Γ_1 demnach der Gruppe der ganzzahligen linearen Substitutionen

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y, \\ y' &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1)$$

---

[6]) Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. Man betrachte hiezu die in § 15 besprochene durch Fig. 3 dargestellte Mannigfaltigkeit und schneide aus derselben noch an irgend einer Stelle ein kleines von einer Torusfläche berandetes Raumstück aus. Die so entstandene Mannigfaltigkeit V ist von zwei Flächen W_1, W_2 vom Geschlecht $p=1$ berandet. Ihre Fundamentalgruppe baut sich aus drei erzeugenden Operationen s, t, u auf, zwischen denen die Relation $sts = tst$ besteht. Es gibt zwei geschlossene Wege auf W_1, aus denen alle anderen sich zusammensetzen lassen, denen die Operationen s und $tst^{-1}st$ der Fundamentalgruppe entsprechen, und zwei ebensolche Wege auf W_2, denen die Operationen 1 und u entsprechen. Man sieht, daß es keine geschlossenen Rückkehrschnitte auf W_1 gibt, denen die identische Operation entspricht, und daß also W_1 und W_2 nicht durch eine Transformation von V in sich ineinander transformiert werden können.

holoedrisch isomorph. Um aber Γ_1' zu bestimmen, so beachte man, daß von allen geschlossenen Wegen $w = \alpha x + \beta y$ (α, β relativ prim) nur die Wege $w = +x$ und $w = -x$ der Homologie

$$w \sim 0 \quad (\text{bezügl. } V)$$

genügen, wenn wieder unter x ein Meridiankreis, unter y ein Breitenkreis der Ringfläche, jeder in einem bestimmten Sinne genommen. verstanden wird. Daraus folgt aber, daß eine Operation von Γ_1' den Meridiankreis x nur in $+x$ oder $-x$ transformieren kann, und sich also in der Gestalt

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon x \\ y' &= \gamma x + \eta y, \end{aligned} \tag{39}$$

wo sowohl ε als η einer der Zahlen $+1$, -1 gleich ist, muß darstellen lassen. Anderseits ist leicht zu sehen, daß jede Substitution dieser Gestalt tatsächlich eine Operation von Γ_1' darstellt und Γ_1' also der aus diesen Substitutionen gebildeten Gruppe holoedrisch isomorph ist. Bedeutet nämlich ρ den Abstand eines Raumpunktes von der Mittellinie des Ringes, φ den auf den Breitenkreisen, ϑ den auf den Meridiankreisen gemessenen Winkel (geographische Länge und Breite), so daß auf den Meridiankreisen φ, auf den Breitenkreisen ϑ konstant ist, so gehört zu der durch die Gleichungen

$$\rho' = \rho, \quad \varphi' = \eta\varphi, \quad \vartheta' = \varepsilon\vartheta - \frac{\gamma}{2\pi}\varphi$$

dargestellten Transformation von V in sich[7]) die durch die Substitution (39) repräsentierte Transformation von W_1.

Es mag hier eine Bemerkung eingeschaltet werden, die sich auf den kombinatorischen Aufbau der Analysis situs bezieht. Erinnern wir uns daran, daß bei der im § 4 gegebenen Darstellung die Elemente, aus denen die $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten aufgebaut wurden, also die $(n+1)$-dimensionalen Zellen, geliefert wurden durch die einfach zusammenhängenden geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Die geometrische Vorstellung, die diesem schrittweisen Herstellen der Mannigfaltigkeiten von immer mehr Dimensionen zu Grunde liegt, besteht darin, daß die durch die einfach zusammenhängende geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$$

berandete $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqq 1$$

als $(n+1)$-dimensionale Zelle verwendet wird. Die Bildung der $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten kann also erst vollzogen

[7]) Man findet dieselbe übrigens schon bei Heegaard, Diss. p. 56.

werden, wenn für die n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten der Begriff „einfach zusammenhängend" und sonach die Begriffe der „elementaren Unterteilungen" und der „Homöomorphie" bereits eingeführt sind. Man kann sich fragen, ob es nicht möglich wäre, die zweiseitige geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit $V^{(n)}$ ohne die Beschränkung des einfachen Zusammenhanges als Element für den Aufbau der $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten aufzufassen, indem man sich der Vorstellung bedient, $V^{(n)}$ sei im Raum $\mathfrak{R}_{n+1}$ von $n+1$ rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ gelegen, und berande einen Teil dieses Raumes und dieser Teil $\Xi^{(n+1)}$ werde dann als $(n+1)$-dimensionale Zelle verwendet. Aber abgesehen davon, daß es fraglich erscheint, ob jede zweiseitige geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit sich umkehrbar stetig und eindeutig auf eine Punktmannigfaltigkeit $X^{(n)}$ des Raumes der Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ abbilden läßt[8]) (also ohne Singularitäten und Selbstdurchdringungen, für welche ja eine Störung der umkehrbaren Eindeutigkeit einträte), abgesehen davon, daß es wesentlich verschieden gebaute Mannigfaltigkeiten $X^{(n)}$ geben kann, die ein eindeutiges und umkehrbar stetiges Abbild derselben Mannigfaltigkeit $V^{(n)}$ darstellen, derart, daß die von diesen Mannigfaltigkeiten $X^{(n)}$ berandeten Teile des $\mathfrak{R}_{n+1}$ einander nicht homöomorph sind,[9]) so daß es also nötig wäre, durch besondere Festsetzungen eine dieser $X^{(n)}$ herauszugreifen, so zeigt das eben besprochene Beispiel, daß auch dann ein brauchbares $(n+1)$-dimensionales Element noch nicht genügend festgelegt ist, infolge des Umstandes, daß $X^{(n)}$ eindeutige umkehrbar stetige Transformationen in sich gestatten kann, denen keine Transformation von $\Xi^{(n+1)}$ in sich entspricht. An dem Beispiel ist das sofort zu sehen. Man gehe darauf aus, die zweiseitige geschlossene Fläche als dreidimensionale Zelle einzuführen, und habe festgesetzt, die Fläche $p=1$ sei durch eine Torusfläche $X^{(2)}$ repräsentiert zu denken, deren Inneres die Zelle vorstellen soll. Ist nun ξ, η ein Paar unabhängiger geschlossener Wege auf der Fläche, aus denen sich alle anderen zusammensetzen lassen, so können wir die Fläche auf $X^{(2)}$ einmal so beziehen, daß ξ dem Meridiankreis x, η dem Breitenkreis y entspricht, das andere Mal so, daß ξ einer Linie $x' = \alpha x + \beta y$, η einer Linie $y' = \gamma x + \delta y$ entspricht $(\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1)$. Wir haben damit zwei verschiedene Deutungen der Fläche $p=1$ als Fläche $X^{(2)}$, und das Innere von $X^{(2)}$ als dreidimensionale Zelle aufgefaßt, heiße bei der einen Deutung $\Xi_1^{(3)}$, bei der anderen $\Xi_2^{(3)}$. Nun ist die Fläche $p=1$ in Polygone zerlegt zu denken, die einander oder den Polygonen anderer Randflächen von Zellen

---

[8]) Für $n=2$ ist diese Abbildung allerdings, wie bekannt, stets möglich. Bezüglich $n>2$ vgl. die in § 2, Anm. 13, aufgeworfene Frage.

[9]) Vgl. in § 15 das durch Fig. 3 erläuterte Beispiel.

zugeordnet sind. Die durch solche paarweise Zuordnungen der Randflächen der Zellen definierte dreidimensionale Mannigfaltigkeit wird nun offenbar im allgemeinen verschieden ausfallen, wenn man einmal den Raumteil $\Xi_1^{(3)}$, das andere Mal den Raumteil $\Xi_2^{(3)}$, als Zelle nimmt, und nur dann mit Bestimmtheit nicht verschieden, wenn die Substitution

$$x' = \alpha x + \beta y$$
$$y' = \gamma x + \delta y$$

die Form (39) hat. Es sind sonach noch weitere Festsetzungen nötig, wenn die Fläche $p = 1$ als dreidimensionale Zelle brauchbar werden soll, etwa die, daß ein bestimmter Rückkehrschnitt den Meridiankreis x von $X^{(2)}$ bilden soll. Dem Gesagten zufolge ergibt sich, daß, wenn es sich um die Einführung von Elementen für die Zusammensetzung $(n+1)$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten handelt, die Beschränkung auf die einfach zusammenhängenden geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten weitaus das natürlichste ist. Hier treten ja die Schwierigkeiten der besprochenen Art nicht auf, da alle von einfach zusammenhängenden n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $X^{(n)}$ berandeten Teile $\Xi^{(n+1)}$ des $\mathfrak{R}_{n+1}$ einander homöomorph sind und jeder Transformation t von $X^{(n)}$ in sich eine Transformation von $\Xi^{(n+1)}$ in sich zugeordnet werden kann, die auf der Randmannigfaltigkeit $X^{(n)}$ die Transformation t bewirkt.[10])

Die betrachteten Gruppen P, P^*, G_i, G_i^*, Γ_i', $\Gamma_i^{*\prime}$ stellen topologische Invarianten berandeter Mannigfaltigkeiten dar, denen insofern eine gewisse Bedeutung zukommt, als es Mannigfaltigkeiten zu geben scheint, die in allen bisher untersuchten topologischen Invarianten (Zusammenhangszahlen, Torsionszahlen, Fundamentalgruppe, Zahl und topologischer Charakter der Randmannigfaltigkeiten), nicht aber in allen von den eben angeführten Invarianten übereinstimmen. Betrachten wir etwa[11]) die dreidimensionale Mannigfaltigkeit V_1, die man erhält, wenn man aus der sphärischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zwei geschlossene Linien L_1, L_2 (siehe Fig. 4) ausscheidet, die miteinander nicht verschlungen sind und deren

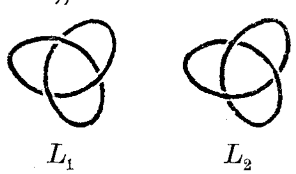

Fig. 4.

[10]) Diese Sätze erscheinen allerdings der Anschauung entnommen und man kann sich die Aufgabe stellen, sie allgemein im Gebiete der Punktmannigfaltigkeiten strenge nachzuweisen oder aber auch (vgl. Anm. 5) im Gebiete der kombinatorischen Analysis situs, wenn die Mannigfaltigkeiten durch Schemata, so wie dies im Abschnitt I auseinandergesetzt wurde, repräsentiert werden.

[11]) In den folgenden Beispielen werden nur die Gruppen P, P^* betrachtet, da nur diese Gruppen für uneigentlich berandete Mannigfaltigkeiten (siehe § 2, Anm. 4) — und die Beispiele beziehen sich auf solche Mannigfaltigkeiten — definiert sind.

jede einen einfachen Knoten bildet, jedoch so, daß der eine Knoten das Spiegelbild des anderen vorstellt. Die Linie L_1 kann also ohne Selbstdurchdringung in der sphärischen Mannigfaltigkeit nicht in L_2 übergeführt werden.[12]) Die Fundamentalgruppe von V_1 erhält man[13]) aus vier erzeugenden Operationen s_1, s_3, s_3, s_4, wenn man zwischen denselben die Relationen $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, $s_3 s_4 s_3 = s_4 s_3 s_4$ annimmt, woraus $P_1 = 3$ und keine Torsionszahlen sich ergeben. Die gleiche Fundamentalgruppe erhält man für die Mannigfaltigkeit V_2, die man bekommt, wenn man aus der sphärischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zwei unverschlungene geschlossene Linien Λ_1, Λ_2 ausscheidet, deren jede einen einfachen Knoten bildet, doch so, daß beide Knoten in gleichem Sinne etwa beide so wie L_1 gewunden sind. Die Randmannigfaltigkeiten von V_1 und V_2 sind in gleicher Anzahl vorhanden und sind einander homöomorph. V_1 und V_2 selbst sind aber nicht homöomorph.[14]) Die Permutationsgruppe P besteht für beide Mannigfaltigkeiten aus der Permutationsgruppe von zwei Elementen, den beiden Randlinien L_1, L_2 bezw. Λ_1, Λ_2. Hingegen ist für V_2 die Gruppe $P^* = P$, da es den Sinn erhaltende Transformation von V_2 in sich gibt, bei denen Λ_1 und Λ_2 vertauscht werden, während jede den Sinn erhaltende Transformation von V_1 in sich jede der Linien L_1, L_2 in sich selbst überführt, so daß P^* sich für V_1 auf die identische Gruppe reduziert. — Es werde noch das Beispiel zweier Mannigfaltigkeiten V_1, V_2 betrachtet, die aus der sphärischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit durch Ausscheidung dreier unverschlungener geschlossener Linien $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ bezw. K_1, K_2, K_3 entstehen. Jede dieser Linien bilde einen einfachen Knoten, doch mögen die Linien $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, K_1, K_2$ so gewunden sein, wie die Linie L_1 der Fig. 4, hingegen K_3 so, wie die Linie L_2 dieser Figur. Die Gruppe P der Mannigfaltigkeit V_1 besteht offenbar aus der Gruppe sämtlicher Permutationen von drei Elementen $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Hingegen enthält die Gruppe P von V_2 außer der identischen Permutation nur die Permutation $\begin{pmatrix} K_1, K_2, K_3 \\ K_2, K_1, K_3 \end{pmatrix}$.

[12]) Auch dies ist eine der Anschauung oder, wenn der Ausdruck gestattet ist, der topologischen Erfahrung entnommene Tatsache, für die mir ein strenger Beweis nicht bekannt ist.

[13]) Vgl. die Bestimmung der Fundamentalgruppe von Ψ_1 in § 18.

[14]) Man könnte das als anschaulich einleuchtend ansehen. Oder aber man geht von der Vorstellung aus, daß es, wenn V_1 und V_2 homöomorph wären, auch solche eineindeutige stetige Beziehungen von V_1 auf V_2 geben müßte, aus denen sich eine eineindeutige stetige Beziehung der Randpunkte von V_1 auf die Randpunkte von V_2 ableiten läßt, die sich also zu einer eineindeutigen stetigen Beziehung der ganzen sphärischen Mannigfaltigkeit auf sich selbst ergänzen lassen. Da nun zufolge des oben genannten Satzes die sphärische Mannigfaltigkeit keine anderen Transformationen in sich gestattet als Deformationen oder Deformationen zusammengesetzt mit einer Spiegelung, so müßte das System der Linien L_1, L_2 mit Λ_1, Λ_2 oder dem Spiegelbild von Λ_1, Λ_2 gleichartig verschlungen sein, d. h. sich in dieses System oder sein Spiegelbild deformieren lassen, was offenbar ausgeschlossen ist.

VI. Spezielle Arten, geschlossene mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten darzustellen.

§ 17.

Die geschlossene Mannigfaltigkeit wird 1. durch Zuordnung von Randmannigfaltigkeiten, 2. durch doppelte Überdeckung einer „Grundform" erhalten.

In diesem Abschnitte sollen die Verallgemeinerungen bekannter Arten, geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeiten darzustellen, auf mehr (insbesondere drei) Dimensionen betrachtet werden. Dabei wird sich zeigen, daß gewisse dieser Darstellungsformen, durch die jede geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit repräsentiert werden kann, in ihrer Verallgemeinerung auf mehr Dimensionen nicht jede geschlossene Mannigfaltigkeit darzustellen fähig sind (daß also die Möglichkeit einer solchen Darstellung eine spezielle topologische Eigenschaft einer Mannigfaltigkeit vorstellt), oder aber daß die Eindeutigkeit der Darstellung verloren geht.

Die erste der zu besprechenden Darstellungsarten zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten [1]) geht von einer „Grundform", d. i. von einer developpablen Fläche mit r Randlinien aus, die man sich etwa als r Kreise vorstellen möge. Verfügt man in bestimmter Weise über den Sinn der developpablen Fläche, so ist dadurch für jeden der r Kreise ein positiver Durchlaufungssinn festgelegt. Durch paarweise Zuordnungen zwischen den auf den Kreisen liegenden Randpunkten der Grundform, wobei zwei einander zugeordnete Punkte als ein Punkt der zu definierenden Mannigfaltigkeit anzusehen sind,[2]) möge nun die Definition einer geschlossenen Fläche erfolgen.

Dabei kommen Zuordnungen dreierlei Art in Betracht:

1. Die Punkte eines Kreises K_1 werden auf die Punkte eines anderen Kreises eineindeutig und stetig so bezogen, daß dem positiven Sinn von K_1 der negative Sinn von K_2 entspricht.

2. Die Punkte zweier Kreise K_1, K_2 werden eineindeutig und stetig so aufeinander bezogen, daß dem positiven Sinn von K_1 der positive Sinn von K_2 entspricht.

3. Die Punkte eines Kreises K werden diametral auf sich selbst bezogen. Betrachtet man dann zwei einander zugeordnete Bögen von K, so entspricht dem positiven Sinn des einen der positive Sinn des anderen Bogens.

Die Gesamtheit der r Kreise verteile man in s Paare, die nach der ersten oder zweiten Art einander zugeordnet sind und t nach der dritten Art sich selbst zugeordnete Kreise. Die entstehende

---

[1]) Vgl. hierüber Dyck, Math. Ann. 32.

[2]) Wie dies aufzufassen ist, ergibt sich sofort aus dem an analoger Stelle in Abschnitt I über die Zuordnungen von Randelementen Gesagte.

geschlossene Mannigfaltigkeit[3]) ist offenbar nur dann zweiseitig, wenn nur Zuordnungen erster Art vorkommen. Jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist der besprochenen Darstellung fähig. Diese ist für die zweiseitigen Flächen und nur für diese und die einseitige Fläche mit der Invariante $q = 1$ (siehe § 8) eindeutig (nämlich abgesehen von topologisch unwesentlichen Abänderungen der Grundform).[4])

Die Verallgemeinerung der besprochenen Darstellungsart auf den Fall von mehr Dimensionen liegt auf der Hand. Man geht von einer developpablen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die von einer Anzahl von $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten berandet ist, aus und legt durch Wahl eines bestimmten Sinnes der developpablen Mannigfaltigkeit auch für die einzelnen Randmannigfaltigkeiten einen bestimmten Sinn fest. Für die Randmannigfaltigkeiten werden dann Zuordnungen von folgenden drei Arten festgesetzt:

1. Zwei Randmannigfaltigkeiten R_1, R_2 werden so punktweise eineindeutig stetig aufeinander bezogen, daß dem positiven Sinn von R_1, der negative von R_2 entspricht oder

2. so, daß dem positiven Sinn von R_1 der positive Sinn von R_2 entspricht.

3. Die Punkte einer Randmannigfaltigkeit R werden paarweise eineindeutig stetig auf einander bezogen, derart, daß dem positiven Sinn eines Stückes von R der positive oder negative Sinn des zugeordneten Stückes entspricht, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hieher gehört beispielsweise die Zuordnung diametral gegenüberliegender Punkte der Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Einander zugeordnete Punkte sind als ein Punkt der zu definierenden Mannigfaltigkeit anzusehen. Die so entstehende n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist dann und nur dann zweiseitig, wenn im Falle eines geraden n nur Zuordnungen erster Art, im Falle eines ungeraden n nur Zuordnungen erster und dritter Art auftreten.

Als Beispiele mögen die aus der Kugel durch Zuordnung der diametral gegenüberliegenden Punkte ihrer Oberfläche entstehende zweiseitige dreidimensionale Mannigfaltigkeit T_3 (siehe § 9) und die aus dem Raum zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen durch paarweise Zuordnung der auf gleichem Radiusvektor liegenden Punkte entstehende gleichfalls zweiseitige Mannigfaltigkeit U (ein Schema für U ist weiter unten angegeben) angeführt werden. Ein weiteres Beispiel liefert die folgendermaßen durch ein Schema mit zwei Zellen definierte dreidimensionale zweiseitige

[3]) Natürlich erhält man auch berandete Flächen durch den gleichen Herstellungsprozeß, wenn man nicht für alle r Kreise Zuordnungen festlegt, und zwar ist jede berandete Fläche dieser Darstellung fähig.

[4]) Eine Darstellung dieser Verhältnisse gibt Dyck a. a. O., S. 480.

Mannigfaltigkeit. Die zwei Zellen mögen als zwei Zylinder im Raum der Koordinaten x, y, z, bezw. x', y', z' durch

$$x^2 + y^2 \leqq 1, \ +1 \geqq z \geqq -1 \text{ bezw.}$$
$$x'^2 + y'^2 \leqq 1, \ +1 \geqq z' \geqq -1$$

gegeben sein, deren Oberflächen durch die Peripherien der Grundflächen und die Leitlinie $x = 1$, $y = 0$ bezw. $x' = 1$, $y' = 0$ in je drei Polygone eingeteilt seien. Die beiden Mantelflächen seien einander nach den Formeln

$$x' = x, \ y' = y, \ z' = -z,$$

je eine Grundfläche des einen Zylinders einer des anderen durch die Formeln

$$x' = -x, \ y' = -y, \ z' = -z$$

zugeordnet. Die so definierte Mannigfaltigkeit läßt sich, wie leicht zu sehen, in der besprochenen Art darstellen, einmal als Raum zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, wobei auf jeder Kugelfläche die diametral gegenüberliegenden Punkte aufeinander bezogen sind, dann aber auch als Raum, der von einer Torusfläche begrenzt ist, deren Punkte einander paarweise nach den Formeln

$$\varphi' = 2\pi - \varphi, \ \vartheta' = \vartheta + \pi$$

zugeordnet sind,[5]) unter φ, ϑ wie in § 16 geographische Länge und Breite auf der Torusfläche verstanden. Die Darstellungsart ist also für zweiseitige Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen nicht mehr eindeutig.

Bereits für $n = 3$ tritt aber auch der Fall ein, daß nicht alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten der besprochenen Darstellung fähig sind. Da nämlich die beiden vermöge einer Zuordnung erster oder zweiter Art einander entsprechenden Randflächen R_1, R_2 oder die durch die Paare von Punkten der auf sich selbst bezogenen Fläche R repräsentierte Gesamtheit von Punkten der Mannigfaltigkeit eine (zwei- oder einseitige) geschlossene nicht zerstückende Fläche in der Mannigfaltigkeit darstellen, so muß für dieselbe die Zahl P_2 oder doch die Zahl Q_2 größer als 1 sein. Es gibt aber zweiseitige geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, für die, ohne daß sie der sphärischen Mannigfaltigkeit homöomorph wären, $P_2 = Q_2 = 1$ ist. Beispiele hiefür bieten die im § 20

---

[5]) Die Gesamtheit der Punkte der Mannigfaltigkeit, deren jeder durch zwei Punkte der Torusfläche repräsentiert ist, bildet eine geschlossene einseitige Fläche mit der Invariante $q = 2$ (siehe § 8). Allgemein bilden die aus der Zuordnung dritter Art einer Fläche vom Geschlecht p auf sich selbst entstehenden Punkte eine in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit liegende einseitige geschlossene Fläche mit der Invariante $q = p + 1$, wie man aus der Betrachtung der Zahl N (siehe § 8), die für die Fläche vom Geschlecht p gleich dem doppelten der für die einseitige Fläche gebildeten Zahl N sein muß, entnimmt.

betrachteten Mannigfaltigkeiten $[2m+1, \lambda]$ mit der zyklischen Gruppe von der Ordnung $2m+1$ als Fundamentalgruppe.

Die zweite Art, geschlossene mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten darzustellen, die besprochen werden soll, bezieht sich auf zweiseitige Mannigfaltigkeiten. Für den Fall von zwei Dimensionen mag an die bekannte Normalform der zweiseitigen geschlossenen Flächen, an die Fläche mit p Henkeln erinnert werden. Projiziert man nun etwa die Torusfläche, die Normalform der Fläche vom Geschlecht 1, auf eine geeignet gelegte Ebene, so erhält man als Projektion die Fläche eines Kreisringes, dessen berandende Kreise K_1 und K_2 heißen mögen, wobei jedem Punkte zwischen den beiden Kreisen zwei Punkte der Torusfläche, den Punkten von K_1 und K_2 ein Punkt der Torusfläche entspricht. Wenn wir uns also den Kreisring als aus zwei Blättern bestehend denken, die längs K_1 und K_2 zusammenhängen, so haben wir damit eine Darstellungsart der geschlossenen Fläche vom Geschlecht 1. Dabei ist noch Folgendes bezüglich des Sinnes der Mannigfaltigkeit zu beachten. Wählt man für die Fläche des Kreisringes zwischen K_1 und K_2 eine Indikatrix, also einen Sinn, so wird dieser Sinn im einen Blatt mit einem bestimmt gewählten Sinn der Torusfläche übereinstimmen, im andern Blatt aber mit dem entgegengesetzten Sinn. Will man also einen bestimmten Sinn der geschlossenen Fläche beim Übergang über K_1 oder K_2 von einem Blatt ins andere beibehalten, so ist der in der Ebene des Kreisringes bestimmte Sinn dabei umzukehren. Ganz analog wie im Falle $p=1$ repräsentiert allgemein eine developpable Fläche mit $p+1$ Randlinien, doppelt überdeckt und mit Zusammenhang der beiden Blätter längs der Randlinien gedacht, die zweiseitige geschlossene Fläche vom Geschlecht p. Man erhält die Verallgemeinerung dieser Darstellungsart zweiseitiger geschlossener Mannigfaltigkeiten auf mehr Dimensionen, indem man eine von einer Anzahl $(n-1)$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten berandete developpable n-dimensionale Mannigfaltigkeit doppelt überdeckt denkt und die beiden Blätter als längs der Randmannigfaltigkeiten zusammenhängend ansieht.[6])

Während aber im Falle zweier Dimensionen die besprochene Darstellungsart für eine bestimmte zweiseitige Fläche nur auf eine Art möglich ist, ist diese Darstellung bereits für drei Dimensionen nicht mehr eindeutig. Dies zeigt beispielsweise die folgendermaßen definierte Mannigfaltigkeit U. Das Schema derselben bestehe aus einer einzigen Zelle, die man sich als Zylinder

$$x^2+y^2 \leqq 1, \quad +1 \geqq z \geqq -1$$

vorstellen möge, dessen Mantelfläche durch die Schnittlinien mit der Ebene $y=0$ in zwei rechteckartige Stücke geteilt sei; diese seien einander durch die Formeln

[6]) Man kann diese Darstellungsart natürlich verallgemeinern, indem man statt zweier $2m$ Blätter nimmt, und an jeder Randmannigfaltigkeit die Blätter in Paare miteinander zusammenhängender verteilt.

$$x' = x,\ y' = -y,\ z' = z,$$

die beiden Grundflächen einander durch die Formeln

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = -z$$

zugeordnet. Betrachtet man nun einmal den von einer Torusfläche eingeschlossenen Raum D', das andere Mal den Raum D'' zwischen zwei konzentrischen Kugeln, und denkt sich jede der developpablen Mannigfaltigkeiten D', D'' doppelt überdeckt und zwischen den zwei Blättern längs der Randflächen Zusammenhang hergestellt, so erhält man, wie leicht zu sehen, auf diese Weise zwei Darstellungen für dieselbe Mannigfaltigkeit U. Man erkennt überhaupt, wenn man die durch p, q charakterisierten Darstellungsformen betrachtet, die man erhält, wenn man im dreidimensionalen Raum eine Normalform einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p, also eine Fläche mit p Henkeln nimmt, aus dem von derselben eingeschlossenen Raum q Kugeln ausschneidet und die übrig bleibende developpable dreidimensionale Mannigfaltigkeit doppelt überdeckt und die beiden Blätter längs der $q+1$ Randflächen zusammenhängend denkt, daß dann zwei solche Darstellungsformen stets dieselbe zweiseitige geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit repräsentieren, wenn $p+q$ für beide den gleichen Wert hat.[7])

Es scheint ferner, daß auch diese Darstellungsform für $n \geq 3$ eine spezielle ist und daß keineswegs alle zweiseitigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten derselben fähig sind. Es ist nämlich nicht unwahrscheinlich, daß nicht nur alle developpablen, sondern auch alle derart durch doppelte Überdeckung developpabler Mannigfaltigkeiten entstehenden geschlossenen Mannigfaltigkeiten keine Torsionszahlen besitzen. Doch ist mir hiefür, auch was die developpablen Mannigfaltigkeiten anlangt, ein Beweis nicht bekannt.

§ 18.

Riemannsche Räume.[1])

Eine dritte Darstellungsform mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten stellt die Verallgemeinerung der Riemannschen Flächen dar. Wir beschränken uns darauf, die Verallgemeinerung auf den Fall von drei Dimensionen zu besprechen.

Zur Riemannschen Fläche kann man gelangen, indem man von einer Kugelfläche ausgeht, aus der n Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ ausgestochen sind, so daß man eine von n Punkten[2]) berandete Fläche Φ erhält. Zieht man von einem Punkte O der Fläche nach den Punkten a_i einander und sich selbst nicht durchsetzende Linien

[7]) Die betrachteten Mannigfaltigkeiten sind identisch mit den durch die Riemannschen Räume von Eks. 2, 3 in Heegaards Diss. § 14 dargestellten.

[1]) Vgl. Appell, Math. Ann. 30, Sommerfeld, Proc. Lond. Math. Soc. 28 und die §§ 13, 14 der Dissertation von Heegaard.

[2]) die also uneigentliche Randmannigfaltigkeiten vorstellen, vgl. § 2, Anm. 4.

Oa_1, Oa_2, ... Oa_n, so kann man dem Überschreiten jeder dieser Linien Oa_i in einem bestimmten durch einen positiven Umlauf um O gegebenen Sinn eine Operation s_i zuordnen. Überschreitet man alle Linien in positivem Sinn, so entspricht dies einem geschlossenen Umlauf um O, und da der Punkt O auf der Fläche Φ in keiner Weise eine besondere Stellung einnimmt, so soll die diesem Umlauf zugeordnete Operation $s_1 s_2 \ldots s_n$, ebenso wie jede Operation die einem keine Linie Oa_i überschreitenden geschlossenen Weg entspricht, der identischen Operation gleichgesetzt werden. Es werde also die Relation

$$s_1 s_2 \ldots s_n = 1 \tag{40}$$

angesetzt. Diese Festsetzungen entsprechen offenbar der Vorstellung einer beliebigen auf der Fläche Φ ausgebreiteten unverzweigten Funktion, wenn unter den s_i Substitutionen der Funktionszweige bei geschlossenen Wegen verstanden werden. In der Tat stellt die durch s_1, s_2, ... s_n, zwischen denen (40) besteht, erzeugte Gruppe, die Fundamentalgruppe von Φ vor.

Handelt es sich nun darum, die Fläche Φ endlichblättrig, etwa m-blättrig, zu überdecken, derart daß die entstehende m-blättrige Fläche nur an den Stellen a_1, a_2, ... a_n Verzweigungspunkte hat, so braucht man nur für s_1, s_2, ... s_n je eine Permutation der m Ziffern 1, 2, ... m, durch die die Blätter bezeichnet werden mögen, zu nehmen, derart daß diese Permutationen die Relation (40) erfüllen. Ist dann die durch die Permutationen s_1, s_2, ... s_n erzeugte Gruppe transitiv, so erhält man eine zusammenhängende m-blättrige Riemannsche Fläche über der Kugelfläche.[3])

Analog möge eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit Ψ betrachtet werden, die aus der sphärischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, die man sich durch den durch einen unendlich fernen Punkt vervollständigten $\mathfrak{R}_3$ repräsentiert denke, durch Ausscheiden einer Anzahl geschlossener Linien a, b, c, ... entsteht.[4]) Man lege die Fläche F, die von der Gesamtheit der Radienvektoren von einem Punkt O von Ψ nach den Punkten dieser Linien gebildet wird. Daneben betrachte man die Projektion der Linien a, b, ... von O aus auf eine O nicht enthaltende Ebene E. Die so erhaltenen Kurven in E werden sich und einander an gewissen Stellen N_1, N_2, ... durchkreuzen. Es werde angenommen, daß durch eine solche Kreuzungsstelle N_i nur zwei und nicht mehr Kurvenzweige hindurchgehen. In der Richtung ON_i liegen dann

---

[3]) Daß man die gleiche Methode anwenden kann, um auf anderen Flächen als der Kugelfläche mehrblättrige ausgebreitete Flächen zu erhalten, ist bekannt.

[4]) Das im folgenden dargestellte Verfahren, die Konstruktion der Kegelfläche F als Verzweigungsschnittfläche zu benützen, und die Bedingungen für das Zusammenfügen der Blätter aus den Linien von O zu den scheinbaren Doppelpunkten des Systems der Linien a, b, ... zu bestimmen, ist mir durch Herrn Wirtinger bekannt geworden, der dasselbe entwickelt und bei den weiter unten zitierten Untersuchungen verwendet hat. Das gleiche Verfahren findet sich in der Beschränkung auf Verzweigungen erster Ordnung bereits bei Heegaard a. a. O.

zwei von den die Fläche F bildenden Radienvektoren, die nach zwei Punkten A_i, B_i des Systems der Linien a, b, . . . gehen mögen, wobei die Entfernung $O A_i < O B_i$ sei. Längs $O A_i$ durchsetzt sich dann die Fläche F selbst. Durch die Punkte A_i zerfallen die Linien a, b, . . . (oder einzelne von ihnen) in Stücke und die Stücke der Linie a mögen mit a_1, a_2, . . ., die der Linie b mit b_1, b_2, . . . u. s. w. bezeichnet werden. Der Sinn der Stücke einer Linie werde entsprechend einem bestimmt gewählten Sinn der Linie positiv genommen. Jedem der Stücke a_i, b_i, c_i, . . . entspricht ein Stück der Fläche F, das von den Radienvektoren nach den Punkten dieses Stückes gebildet wird. Ist A_h das negative, A_k das positive Ende eines Linienstückes l_i, so werde der Umlauf $O A_h A_k O$ um das zugeordnete Flächenstück als positiv angenommen. Dem so bestimmten Sinn der Flächenstücke entsprechend kann bei denselben eine positive und eine negative Seite unterschieden werden. Dem Durchsetzen eines der Flächenstücke der Fläche F von der negativen zur positiven Seite werde eine Operation zugeordnet, die wir mit demselben Buchstaben bezeichnen wollen, wie das dem Flächenstück zugeordnete Linienstück. Stoßen nun im Punkte A_i die beiden Linienstücke $u_1 = A_h A_i$ und $u_2 = A_i A_j$ zusammen, während der Punkt B_i auf dem Linienstück v liegt, so werde zwischen den Operationen u_1, u_2, v die Relation angesetzt:

$$(41) \qquad v u_1 v^{-1} u_2^{-1} = 1 \ \text{ bezw. } \ v^{-1} u_1 v u_2^{-1} = 1,$$

je nachdem u_1 auf der positiven oder negativen Seite des zu v gehörigen Flächenstückes endigt. Man erhält dieselbe, wenn man einen kleinen den Radiusvektor $O A_i$ umschließenden Weg betrachtet und festsetzt, daß einem solchen Wege die identische Operation entsprechen soll. Die durch die eingeführten Operationen und die Relationen (41) zwischen denselben definierte Gruppe stellt offenbar die Fundamentalgruppe von Ψ dar.[5])

Eine mehrblättrige Überdeckung der sphärischen Mannigfaltigkeit, die nur in den Linien a, b, c, . . . Verzweigungslinien aufweist, erhält man nun analog dem Falle zweier Dimensionen, indem man für die Operationen a_i, b_i, c_i, . . . Permutationen von m Blättern derart wählt, daß die Relationen (41) erfüllt sind.[6])

Ob analog, wie jede zweiseitige geschlossene Fläche einer durch eine Riemannsche Fläche repräsentierten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit homöomorph ist, auch jede zweiseitige geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit einem „Riemannschen Raum" der beschriebenen Art homöomorph sei, ist nicht bekannt. Jedenfalls läßt (analog dem Falle zweier Dimensionen) eine und dieselbe

[5]) Der Bau der Relationen (41) zeigt, daß die betrachteten Mannigfaltigkeiten Ψ keine Torsionszahlen haben. Es ergibt sich dies durch die gleichen Überlegungen, die in § 10, Anm. 1, angestellt wurden.

[6]) Natürlich kann man wieder statt auf der sphärischen, auf einer beliebigen geschlossenen Mannigfaltigkeit mehrblättrig ausgebreitete Mannigfaltigkeiten betrachten.

Mannigfaltigkeit verschiedene Darstellungen als Riemannscher Raum zu, wie sich an gewissen von den im folgenden angeführten Beispielen Riemannscher Räume zeigt.

Zur Herstellung eines solchen Beispiels gehe man von der Mannigfaltigkeit Ψ_1 aus, die aus der sphärischen Mannigfaltigkeit durch Ausscheiden einer verknoteten Linie L_1 (vgl. Fig. 4) entsteht. L_1 zerfällt in drei Stücke s, t, u, und zwischen den entsprechenden Operationen bestehen die Relationen

$$sts^{-1}=u, \quad tut^{-1}=s, \quad usu^{-1}=t,$$

deren letzte eine Folge der ersten beiden ist. Läßt man die überzählige erzeugende Operation u fort, so erhält man zwischen den erzeugenden Operationen s, t der Fundamentalgruppe von Ψ_1 die definierende Relation

$$sts=tst.$$

Einen dreiblättrigen längs L_1 verzweigten Riemannschen Raum erhält man, wenn man für s, t, u die Permutationen wählt:

$$s=(2,3), \quad t=(1,3), \quad u=(1,2).$$

Man erhält so eine von Wirtinger[7]) bei Gelegenheit der Untersuchung der durch die Cardanische Formel repräsentierten algebraischen Funktion von zwei komplexen Veränderlichen betrachtete Mannigfaltigkeit.[8]) Bemerkenswert ist, daß dieser Riemannsche Raum dreiblättrig, jedoch längs L_1 nur von der ersten Ordnung verzweigt ist.

Einen zweiblättrigen längs L_1 verzweigten Riemannschen Raum R_1 erhält man, wenn man

$$s=t=u=(1,2)$$

setzt.[9])

Es möge nun von der Mannigfaltigkeit Ψ_2 ausgegangen werden, die aus der sphärischen Mannigfaltigkeit durch Ausscheidung von zwei unverknoteten Linien a, b entsteht, die einfach verschlungen sind, wie z. B. die Kreise $x^2+y^2=1$, $z=0$ und $x^2-2x+z^2=0$, $y=0$. Zwischen den Operationen a, b besteht die Relation

$$aba^{-1}b^{-1}=1,$$

so daß die Fundamentalgruppe von Ψ_2 die kommutative Gruppe aus zwei erzeugenden Operationen ist. Wählt man eine dreiblättrige Überdeckung von Ψ_2 und

$$a=b=(1,2,3),$$

---

[7]) Erste Sitzung d. Math. Ges. in Wien vom 22. Jänner 1904 und Jahresvers. d. Deutsch. Math. Ver., Meran, Sept. 1905 (siehe Jahresber. 14, S. 517).

[8]) Der gleiche Riemannsche Raum wurde vorher schon von Heegaard (a. a. O., p. 84, Eks. 4) betrachtet und als einfach zusammenhängend erkannt.

[9]) Heegaard a. a. O., p. 84, Eks. 5.

so möge der entstehende Riemannsche Raum mit R_2 bezeichnet werden. Man kann dann zeigen, daß R_1 und R_2 Darstellungen derselben dreidimensionalen Mannigfaltigkeit sind, und zwar der im § 20 mit [3, 1] bezeichneten.

VII. Einige Ergänzungen.

§ 19.

Über einen Satz aus den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs.

Für die kombinatorisch aufgefaßte[1]) Analysis situs bildet die Einteilung der Schemata in Klassen einander homöomorpher das Fundament. Homöomorph wurden zwei Schemata genannt, die ein gemeinsames abgeleitetes Schema besitzen (siehe § 2). Die genannte Klasseneinteilung der Schemata wurde dann auf den Satz gegründet, daß zwei Schemata, die einem dritten homöomorph sind, auch untereinander homöomorph sind. So selbstverständlich dieser Satz erscheint, so erweist es sich doch als notwendig, einen Beweis für denselben beizubringen und ein solcher soll im folgenden für den Fall von zwei Dimensionen ausgeführt werden. Was die Stellung des besprochenen Satzes in einem systematischen Aufbau der Analysis situs anlangt, so mag übrigens bemerkt werden, daß für einen solchen Aufbau dieser Satz entbehrlich ist. Man kann ja zwei Schemata, die ein gemeinsames abgeleitetes Schema besitzen, als homöomorph im engeren Sinne ansehen, als homöomorph im weiteren Sinne zwei Schemata bezeichnen, zwischen welche sich Schemata so einschieben lassen, daß in der entstehenden Folge jedes Schema mit dem vorhergehenden homöomorph im engeren Sinne ist und als homöomorph schlechthin zwei Schemata, die es entweder im engeren oder weiteren Sinne sind. Man erhält so ohne Heranziehen eines Hilfssatzes eine Einteilung der Schemata in Klassen einander homöomorpher, wobei wieder jene und nur jene Eigenschaften der Schemata topologisch invariant, d. h. für homöomorphe Schemata übereinstimmend sind, die bei elementaren Unterteilungen erhalten bleiben.

Der Satz, der uns beschäftigt, ist offenbar erwiesen, wenn es der folgende spezielle Fall des Satzes ist: Zwei Schemata Q, R, die aus demselben Schema P durch Unterteilung abgeleitet sind, sind homöomorph. Dieser Satz wieder ist erledigt, wenn er es für den besonderen Fall ist, daß eines der Schemata Q, R durch eine e l e m e n t a r e Unterteilung aus P hervorgegangen ist. Sei also etwa Q durch eine elementare Unterteilung aus P abgeleitet und $P, P_1, P_2, \ldots P_n\, (P_n = R)$ eine Folge von Schematen, derart, daß jedes auf ein anderes Schema folgende Schema aus diesem

[1]) Siehe die Einleitung.

durch eine elementare Unterteilung abgeleitet ist. Es handelt sich darum, zu jedem P_i ein aus ihm abgeleitetes Schema Q_i zu finden, das auch aus Q ableitbar ist. Q_n ist dann ein gemeinsames abgeleitetes Schema von Q und R.

Nun möge zunächst für den Fall, daß sowohl R als Q durch elementare Unterteilung aus P hervorgehen, ein gemeinsames abgeleitetes Schema S angegeben werden. Für den Fall zweier Dimensionen sind nun zwei Arten elementarer Unterteilungen zu unterscheiden: die Teilung einer Kante in zwei Kanten und die Teilung eines Flächenstückes in zwei Flächenstücke. Diese beiden Arten mögen als Unterteilung erster bezw. zweiter Ordnung bezeichnet werden und die bei derselben in zwei Teile geteilte Kante bezw. das in zwei Teile geteilte Flächenstück möge das Element des Schema, auf das sich die Unterteilung bezieht, genannt werden. Wenn sich nun zwei elementare Unterteilungen desselben Schema P, sei es daß sie von gleicher, sei es von verschiedener Ordnung sind, auf verschiedene Elemente von P beziehen, so ist es ohne weiteres klar, daß die beiden Schemata Q, R, die aus P durch diese Unterteilungen entstehen, ein gemeinsames abgeleitetes Schema S besitzen, das sowohl aus Q als aus R durch eine elementare Unterteilung gewonnen werden kann. Beziehen sich anderseits die beiden elementaren Unterteilungen, durch die Q und R aus P hervorgehen, auf dasselbe Element von P und sind beide Unterteilungen von erster Ordnung, so sind Q und R identisch und es möge $S = Q = R$ gesetzt werden. Ist schließlich jede der Unteilungen von zweiter Ordnung und beziehen sich beide auf dasselbe Flächenstück a^2, so mögen auf dem Umfange des Flächenstückes, das man sich als einen Kreis denken möge, die Endpunkte A_Q, B_Q bezw. A_R, B_R der beiden neuen Kanten c_Q, c_R markiert werden, welche die Zerlegung des Flächenstückes bei der Unterteilung Q bezw. R bewirken. Falls nun beim Durchlaufen des Kreisumfanges auf den Punkt A_Q einer der Punkte A_R, B_R und hierauf der Punkt B_Q folgt, so bilde man ein aus Q abgeleitetes Schema S durch drei aufeinanderfolgende elementare Unterteilungen, indem man c_Q durch eine neue Ecke C in zwei Kanten zerlegt und hierauf die beiden Flächenstücke, in welche a^2 durch Ziehen von c_Q zerfiel, durch Kanten, welche C mit A_R bezw. B_R verbinden, weiter zerlegt. Das Schema S läßt sich in analoger Weise aus R ableiten und ist also ein gemeinsames abgeleitetes Schema von Q und R. Falls das Punktepaar A_Q, B_Q mit dem Punktepaar A_R, B_R zusammenfällt, Q also gleich R ist, werde $S = Q = R$ genommen. In allen übrigen Fällen von Unterteilungen zweiter Ordnung, die sich auf dasselbe Flächenstück beziehen, läßt sich ein Schema S angeben, das durch eine elementare Unterteilung, sowohl aus Q, als aus R ableitbar ist. Damit ist in allen Fällen zweier elementarer Unterteilungen desselben Schema P, durch welche aus P die Schemata Q, R entstehen, ein Verfahren angegeben, durch eine endliche Anzahl (Null, eine oder drei) elementarer Unterteilungen einmal aus Q, das andere Mal aus R ein gemeinsames abgeleitetes Schema S herzustellen.

Ist in einer Reihe Schemata T, T', T'', ... $T^{(m)}$ das Schema $T^{(i)}$ aus $T^{(i-1)}$ durch eine elementare Unterteilung entstanden, durch die ein Element e_{i-1} von $T^{(i-1)}$ durch ein neu eingeführtes Element $\bar{e}_i$ (von einer um 1 niedrigeren Dimension als e_{i-1}) in zwei Elemente e'_i und e''_i zerlegt wird ($i = 1, 2, \ldots m$) und bezieht sich keine der folgenden Unterteilungen auf eines der Elemente $\bar{e}_i$, e'_i, e''_i,[2]) so möge die Folge der Unterteilungen, durch die T' aus T, T'' aus T, ... $T^{(m)}$ aus $T^{(m-1)}$ hervorgeht, eine Folge unabhängiger elementarer Unterteilungen des Schema T genannt werden. Offenbar ist, wenn Q, R zwei aus demselben Schema durch eine elementare Unterteilung abgeleitete Schemata sind, die Folge der elementaren Unterteilungen, durch die nach dem obigen Verfahren aus R ein gemeinsames abgeleitetes Schema S hergestellt wird, eine Folge unabhängiger elementarer Unterteilungen von R.

Nehmen wir nun an, es sei eine Folge von Schematen

$$(42) \qquad P_i,\ P_{i1},\ P_{i2},\ \ldots\ P_{i,\, m_i - 1},\ P_{i,\, m_i}\ (P_{i,\, m_i} = Q_i)$$

gefunden, deren jedes einem anderen nachfolgende aus dem ihm vorhergehenden durch eine elementare Unterteilung gewonnen wird, und die Folge dieser elementaren Unterteilungen sei eine unabhängige, wobei das letzte Schema der Folge, Q_i, ein aus Q abgeleitetes Schema ist, so kann leicht gezeigt werden, daß sich eine Folge

$$(43) \qquad \begin{gathered} P_{i+1},\ P_{i+1,\,1},\ P_{i+1,\,2},\ \ldots\ P_{i+1,\, m_{i+1}-1},\ P_{i+1,\, m_{i+1}} \\ (P_{i+1,\, m_{i+1}} = Q_{i+1}) \end{gathered}$$

mit ganz den gleichen Eigenschaften wie die Folge (42) finden läßt. Da nun für $i = 1$ eine Folge mit den genannten Eigenschaften durch das eben beschriebene Verfahren geliefert wird, das ein gemeinsames abgeleitetes Schema $S = Q_1$ der beiden durch elementare Unterteilung aus P gewonnenen Schemata Q und P_1 finden lehrt, so ist dann der gewünschte Nachweis durch vollständige Induktion erbracht. Was nun die Auffindung der Folge (43) anlangt, so kann angenommen werden, es sei $P_{i+1} \neq P_{i1}$, da man andernfalls nur $m_{i+1} = m_i - 1$, $P_{i+1,\,k} = P_{i,\,k+1}$ zu nehmen braucht. Es werde jenes Element e des Schema P_i betrachtet, auf das sich die elementare Unterteilung bezieht, die von P_i zu P_{i+1} führt. Bezieht sich dann keine der elementaren Unterteilungen, die von P_i zu Q_i führt, auf das Element e, so werde für $P_{i+1,\,1}$ jenes Schema genommen, das sich sowohl aus P_{i1} als aus P_{i+1} je durch eine elementare Unterteilung erhalten läßt (und auf Grund der

[2]) Dieser Voraussetzung zufolge können die Elemente e, e_1, e_2, ... e_{m-1} sämtlich als Elemente des Schema T angesehen werden.

gemachten Annahmen gibt es ein solches Schema) und allgemein für $P_{i+1,k}$ jenes Schema, das sich sowohl aus P_{ik}, als aus $P_{i+1,k-1}$ je durch eine elementare Unterteilung gewinnen läßt. Die Folge der Schemata P_{i+1}, $P_{i+1,1}$, $P_{i+1,2}$, ... P_{i+1,m_i-1}, P_{i+1,m_i} ist dann die gesuchte Folge (43).

Bezieht sich hingegen eine der Unterteilungen, die von P_i zu Q_i führt, etwa diejenige durch die $P_{i,h+1}$ aus P_{ih} entsteht, auf das Element e, dann werde für $k \leqq h$ als $P_{i+1,k}$ jenes Schema genommen, das sich sowohl aus $P_{i+1,k-1}$, als aus $P_{i,k}$ durch eine elementare Unterteilung ableiten läßt. Die Schemata $P_{i,h+1}$ und $P_{i+1,h}$ entstehen dann aus $P_{i,h}$ je durch eine elementare Unterteilung und diese beiden Unterteilungen beziehen sich beide auf das Element e von P_{ih}. Nehmen wir etwa an, e sei ein Flächenstück und die beiden Unterteilungen, um die es sich handelt, seien so beschaffen, daß die Endpunktpaare der neuen Kanten einander trennen. Die Unterteilung, durch die $P_{i,h+1}$ aus P_{ih} entsteht, bestehe in der Zerlegung von e durch die neue Kante $\bar{e}$ in die Flächenstücke e', e'', die Unterteilung, durch die P_{i+1} aus P_i, und sonach auch $P_{i+1,h}$ aus P_{ih} hervorgeht, in der Zerlegung von e durch die Kante $\bar{e}_1$ in die Flächenstücke e_1', e_1''. Auf Grund des oben auseinandergesetzten Verfahrens bestimmt sich dann ein gemeinsames abgeleitetes Schema S von $P_{i,h+1}$ und $P_{i+1,h}$, das, da der Fall angenommen wird, daß $\bar{e}$ und $\bar{e}_1$ sich kreuzen, aus jedem dieser Schemata durch drei elementare Unterteilungen gewonnen wird. Die drei auf $P_{i+1,h}$ angewendeten elementaren Unterteilungen beziehen sich der Reihe nach auf die Elemente $\bar{e}_1$, e_1', e_1'' und die dabei nacheinander entstehenden Schemata mögen mit $P_{i+1,h+1}$, $P_{i+1,h+2}$, $P_{i+1,h+3}$ bezeichnet werden, wobei $P_{i+1,h+3} = S$ ist. Die drei auf $P_{i,h+1}$ angewandten Unterteilungen beziehen sich auf $\bar{e}$, e', e'' und mögen der Reihe nach auf die Schemata

$$P_{i,h+1,1},\quad P_{i,h+1,2},\quad P_{i+1,h+3}$$

führen. Die elementaren Unterteilungen, durch die aus P_i der Reihe nach P_{i1}, $P_{i2}, \ldots P_{ih}$ entstehen, mögen sich auf die Elemente $f_1, f_2, \ldots f_h$, diejenigen, durch die aus $P_{i,h+1}$ der Reihe nach $P_{i,h+2}$, $P_{i,h+3}, \ldots$ P_{i,m_i} entstehen, auf die Elemente $g_{h+2}, g_{h+3}, \ldots$ g_{m_i} beziehen. Nach Voraussetzung sind die Elemente f_k, g_k alle untereinander und von e verschieden. Man bestimme nun jenes Schema, das durch eine elementare Unterteilung sowohl aus $P_{i,h+2}$ als aus $P_{i,h+1,1}$ gewonnen werden kann, und nenne es $P_{i,h+2,1}$, hierauf das gemeinsame abgeleitete Schema $P_{i,h+2,2}$ von $P_{i,h+2,1}$ und $P_{i,h+1,2}$, und jenes von $P_{i,h+2,2}$ und $P_{i+1,h+3}$, wobei jedesmal jenes gemeinsame abgeleitete Schema zu nehmen ist, das aus jedem der beiden vorgelegten Schemata durch eine einzige elementare Unterteilung erhältlich ist. Das zuletzt erhaltene gemeinsame abgeleitete Schema von $P_{i,h+2,2}$ und $P_{i+1,h+3}$ nenne man $P_{i+1,h+4}$. Die elementaren Unterteilungen, durch die $P_{i,h+2,1}$ aus $P_{i,h+1,1}$,

$P_{i,h+2,2}$ aus $P_{i,h+1,2}$, $P_{i+1,h+4}$ aus $P_{i+1,h+3}$ hervorgehen, beziehen sich alle auf das Element g_{h+2}. Die Unterteilungen, durch die $P_{i,h+2,1}$, $P_{i,h+2,2}$, $P_{i+1,h+4}$ aus $P_{i,h+2}$ entstehen, beziehen sich der Reihe nach auf $\bar{e}$, e', e''. Ist nun allgemein eine Folge von Schematen $P_{i,h+k,1}$, $P_{i,h+k,2}$ $P_{i+1,h+k+2}$ gefunden, die aus $P_{i,h+k}$ der Reihe nach durch Unterteilungen, die sich auf $\bar{e}$, e', e'' beziehen, entstehen, wobei $P_{i+1,h+k+2}$ abgeleitetes Schema von P_{i+1} ist, so möge man durch Anwendung derjenigen auf g_{h+k+1} bezüglichen elementaren Unterteilung, durch die $P_{i,h+k+1}$ aus $P_{i,h+k}$ entsteht, auf die Schemata dieser Folge, die Schemata $P_{i,h+k+1,1}$, $P_{i,h+k+1,2}$, $P_{i+1,h+k+3}$ erhalten, die aus $P_{i,h+k+1}$ wieder durch auf $\bar{e}$, e', e'' bezügliche Unterteilungen hervorgehen. Die so gewonnene Folge der Schemata $P_{i+1,h+3}$, $P_{i+1,h+4}$, $P_{i+1,h+5}, \ldots$ endet mit einem Schema P_{i+1,m_i+2}, das abgeleitetes Schema von $P_{i,m}$ ist, und die Folge der Schemata

$$P_{i+1},\; P_{i+1,1}, \;\ldots\; P_{i+1,m_i+2},$$

die durch eine Reihe aufeinanderfolgender elementarer Unterteilungen entsteht, endet somit mit einem aus Q ableitbaren Schema. Die aufeinanderfolgenden elementaren Unterteilungen sind unabhängige, da sie sich auf die voneinander verschiedenen Elemente $f_1, f_2, \ldots f_h$, $\bar{e}_1$, e'_1, e''_1, g_{h+1}, $g_{h+2}, \ldots$ g_m, von P_{i+1} beziehen. Die angeschriebene Folge ist also die gesuchte Folge (43). Wir haben hiemit den Fall besprochen, daß das Element e ein Flächenstück ist, und die Kanten $\bar{e}$, $\bar{e}_1$ einander kreuzen. In allen übrigen Fällen erledigt sich die Bestimmung der Folge (43) noch einfacher.

Der Beweis des besprochenen Satzes ist damit für den Fall von zwei Dimensionen geleistet.

§ 20.

Ein Beispiel.

Es soll ein Beispiel betrachtet werden (das übrigens nicht eine einzige Mannigfaltigkeit, sondern eine ganze Folge von Mannigfaltigkeiten umfaßt), welches einen in gewisser Hinsicht möglichst einfachen Typus von zweiseitigen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten darstellt.

Das Schema der betrachteten Mannigfaltigkeiten besteht aus einer einzigen dreidimensionalen Zelle a^3, ist also ein Fundamentalpolyeder, und da die Mannigfaltigkeit geschlossen sein soll, so ist diese Zelle von einer geraden Anzahl von Randpolygonen begrenzt. Den einfachsten Fall erhält man also, wenn man die Oberfläche der als Kugel vorgestellten Zelle a^3 durch einen Hauptkreis (Äquator) der in l gleiche Teile geteilt sei, in zwei Polygone zerlegt annimmt. Die Bedingung, daß die Mannigfaltigkeit zweiseitig sein soll, läßt noch l verschiedene Möglichkeiten, die beiden Polygone einander nach erster Art zuzuordnen, offen. Diese Zuordnungen der beiden Halbkugelflächen sind ausdrückbar durch die Formeln

$$\varphi' = \varphi + \frac{2\pi\lambda}{l}, \quad \vartheta' = -\vartheta, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots l-1)$$

wenn mit φ, ϑ geographische Länge und Breite eines Punktes der oberen Halbkugel ($\vartheta > 0$), mit φ', ϑ' diese Koordinaten für den dem Punkte (φ, ϑ) zugeordneten Punkt der unteren Halbkugel bezeichnet werden. Durch die beiden Zahlen l und λ ist aber die Zuordnung vollständig charakterisiert. Das hiedurch definierte Schema möge mit (l, λ) bezeichnet werden. Die Schemata $(l, 0)$ stellen alle die durch das Schema $(1, 0)$ definierte sphärische Mannigfaltigkeit dar. Überhaupt gilt ganz allgemein für den Fall, daß l, λ einen gemeinsamen Teiler haben, also etwa $l = k\,l_1$, $\lambda = k\,\lambda_1$ ist, daß die durch das Schema (l, λ) definierte Mannigfaltigkeit von der durch das Schema (l_1, λ_1) definierten nicht verschieden ist. Für jeden Wert von l brauchen sonach für λ nur die $\varphi(l)$ zu l teilerfremden Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots l-1$ in Betracht gezogen werden.

Seien also l, λ teilerfremd. Die l Kanten der Polygoneinteilung des Schema (l, λ) bilden dann einen einzigen geschlossenen Zyklus, die l Teilpunkte am Äquator ein einziges System zugeordneter Ecken der Polygoneinteilung. Die Umgebungsmannigfaltigkeit der durch dieses System repräsentierten Ecke des Schema ist, wie man sich sofort überzeugt, die sphärische zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die in § 3 aufgestellte Bedingung also erfüllt. Es ist für das Schema $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 1$, und wenn mit a^3, a^2, a^1, a^0 die Zelle, die Lamelle, die Kante und die Ecke des Schema bezeichnet werden, so lautet das Poincarésche Relationensystem

$$a^3 \equiv 0; \quad a^2 \equiv l\,a^1; \quad a^1 \equiv 0.$$

Die durch das betrachtete Schema definierte Mannigfaltigkeit, die mit $[l, \lambda]$ bezeichnet werden möge[1]), hat also die Bettischen Zahlen

$$P_1 = P_2 = 1$$

und, wenn $l > 1$ ist, eine Torsionszahl gleich l. Als Fundamentalgruppe erhält man die zyklische Gruppe von der Ordnung l.[2])

[1]) Bei Verwendung dieses Zeichens wird stets die Voraussetzung λ zu l teilerfremd und $0 < \lambda < l$ gemacht. Sei hier (sowie bezüglich der Überlegungen d. § 22) an die in Heegaards Diss. betrachteten „Diagramme" erinnert. Das Diagramm (p. 57) eines Ringes mit der Anheftungskurve $[m\beta + n\lambda]$ liefert eine mit $[m, n']$ homöomorphe Mannigfaltigkeit ($n' \equiv n$, mod. m).

[2]) Es kann demnach höchstens l-wertige unverzweigt auf der Mannigfaltigkeit ausgebreitete Funktionen geben. Wenn man dementsprechend über der Mannigfaltigkeit l-blättrig eine Mannigfaltigkeit ausbreitet, so daß die l-wertigen Funktionen auf derselben eindeutig werden, so entsteht hiedurch eine der sphärischen homöomorphe Mannigfaltigkeit. Allgemein erhält man bei μ-facher Überdeckung von $[l, \lambda]$ eine der Mannigfaltigkeit $\left[\frac{l}{t}, \frac{r}{t}\right]$ homöomorphe Mannigfaltigkeit, unter r den Rest von $\mu\lambda$ nach l, unter t den größten gemeinsamen Teiler von l und r verstanden. — Man bemerke, daß wir hier endliche von der identischen Gruppe

Einer mündlichen Mitteilung von Herrn Wirtinger verdanke ich eine einfache Darstellung der Mannigfaltigkeit $[l, \lambda]$ durch einen verzweigt über der sphärischen Mannigfaltigkeit mehrblättrig ausgebreiteten Raum, also eine Darstellung als „Riemannschen Raum" (§ 18). Um zu derselben zu gelangen, nehme man die beiden Pole N, S der die Zelle a^3 repräsentierenden Kugel und die l Teilungspunkte $M_0, M_1, \ldots M_{l-1}$ auf dem Äquator und ziehe jeden der von N über einen Punkt M_i nach S führenden Halbkreise (Meridiane). Durch jeden dieser Meridiane und die Kugelachse NS lege man eine Halbkreisfläche, wodurch die Zelle a^3 in l Stücke zerfällt, die der Reihe nach a_0^3, $a_1^3, \ldots a_{l-1}^3$ heißen mögen. Jedes dieser Stücke a_i^3 kann in ein Tetraeder deformiert werden. Die bei dieser Deformation aus den Punkten M_i, M_{i+1}, N, S hervorgehenden Ecken des Tetraeders mögen in dieser Reihenfolge mit A_i, B_i, C_i, D_i bezeichnet werden. Um ein Schema der Mannigfaltigkeit $[l, \lambda]$ zu erhalten, hat man zwischen den Oberflächendreiecken der Zellen a_i^3 folgende Zuordnungen zu treffen: Dem Dreieck $B_i C_i D_i$ werde das Dreieck $A_{i+1} C_{i+1} D_{i+1}$, dem Dreieck $A_i B_i C_i$ das Dreieck $A_{i+\lambda} B_{i+\lambda} D_{i+\lambda}$ zugeordnet. Man beachte nun, daß man ein Schema der im § 18 betrachteten Mannigfaltigkeit Ψ_2 erhält, wenn man in einem Tetraeder $ABCD$ das Dreieck BCD dem Dreieck ACD, das Dreieck ABC dem Dreieck ABD zuordnet und die Linien $a = AB$ und $b = CD$ von der Mannigfaltigkeit ausschließt. (Jede der Tetraederkanten AB, CD stellt offenbar für sich einen „geschlossenen Zyklus zugeordneter Kanten der Polygoneinteilung" dar.) Wird nun die Mannigfaltigkeit Ψ_2 mit l Blättern $0, 1, 2, \ldots l-1$ überdeckt, derart, daß einem Umlauf um b die zyklische Permutation $(0, 1, 2, \ldots l-1)$, einem Umlauf um a die Permutation $(0, \lambda, 2\lambda, \ldots \lambda(l-1))$ entspricht, so wird man ein Schema der so entstehenden Mannigfaltigkeit offenbar erhalten, wenn man jedes Blatt durch ein Tetraeder $A_i B_i C_i D_i$ repräsentiert und dem Dreieck $B_i C_i D_i$ das Dreieck $A_{i+1} C_{i+1} D_{i+1}$, dem Dreieck $A_i B_i C_i$ das Dreieck $A_{i+\lambda} B_{i+\lambda} D_{i+\lambda}$ zuordnet. Damit erhält man aber genau das obige Schema von $[l, \lambda]$ und diese Mannigfaltigkeit läßt sich also als l-blättriger längs zweier verschlungener Linien verzweigter Raum darstellen.[3])

---

verschiedene Fundamentalgruppen vor uns haben, während alle zweiseitigen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Ausnahme der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe sich auf die Identität reduziert, unendliche Fundamentalgruppen besitzen (siehe Poincaré, An. sit. § 14). Die Frage, ob es außer der sphärischen noch andere geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, deren Fundamentalgruppe die identische Gruppe ist (Poincaré, Compl. 5, p. 110), ist unentschieden.

[3]) Der in der vorigen Anmerkung besprochenen l-blättrigen Überdeckung von $[l, \lambda]$ entspricht eine l^2-blättrige längs der geschlossenen Linien a und b verzweigte Überdeckung der sphärischen Mannigfaltigkeit S_3, die man erhält, wenn man die l^2 Blätter $\{i, k\}$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots l-1)$ derart zusammenhängen läßt, daß man bei einem Umlauf um b bezw. a aus dem Blatt $\{i, k\}$ in das Blatt

§ 21.

Nach anderer Art als bei Poincaré definierte Bettische Zahlen.

An das vorstehende Beispiel der Mannigfaltigkeiten $[l, \lambda]$ möge nun eine kurze Besprechung der verschiedenen Definitionsarten der Bettischen Zahlen angeschlossen werden, aus der hervorgeht, daß diese Definitionen mit alleiniger Ausnahme derjenigen Poincarés, die sich sonach als die einfachste und naturgemäßeste erweist, eines ergänzenden Zusatzes bedürfen, um korrekt zu sein.

Es werde zunächst an die Poincarésche Definition erinnert und angenommen, es seien die in den §§ 6, 7 besprochenen, derselben anhaftenden Schwierigkeiten, etwa durch geeignete Abänderungen der Definitionen der Homologie oder dergleichen, beseitigt. Diese Definition der Bettischen Zahl P_m einer Mannigfaltigkeit V stützt sich auf ein System von zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen, in V gelegenen Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}, W_2^{(m)}, \ldots W_t^{(m)}$, zwischen denen keine Homologie

$$k_1 W_1^{(m)} + k_2 W_2^{(m)} + \cdots + k_t W_t^{(m)} \sim 0 \tag{44}$$

besteht, während jede andere zweiseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$, die in V liegt, mit $W_1^{(m)}, \ldots W_t^{(m)}$ durch eine Homologie verbunden sein soll. Die Existenz solcher Systeme angenommen, muß die Anzahl t der Mannigfaltigkeiten für alle derartigen Systeme die gleiche sein. Denn wäre $V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \ldots V_{t'}^{(m)}$ ein zweites System von gleicher Beschaffenheit und etwa $t' < t$, so wäre jede Mannigfaltigkeit $W_i^{(m)}$ mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl h_i multipliziert, einer Linearform der $V_i^{(m)}$ homolog und diese t Linearformen könnten nicht linear unabhängig sein. Eine lineare Relation zwischen denselben ergäbe aber eine Homologie zwischen den $h_i W_i^{(m)}$, also zwischen den $W_i^{(m)}$ entgegen der Voraussetzung.

Andere Arten als diejenige Poincarés die Bettischen Zahlen P_m von V zu definieren, ziehen ähnlich beschaffene Systeme von (zweiseitigen geschlossenen) m-dimensionalen in V gelegenen Mannigfaltigkeiten heran.[1]) Doch ist für diese die Unabhängigkeit

---

$\{i, k+1\}$ bezw. in das Blatt $\{i+1, k+\lambda\}$ gelangt. Die derart l^2-blättrig über S_3 ausgebreitete Mannigfaltigkeit ist mit S_3 selbst homöomorph. — Man kann jedes Blatt $\{i, k\}$ durch eine Zelle von der Form eines Tetraeders darstellen und so ein Schema von S_3 erhalten, das von l^2 Tetraedern, zwischen deren Oberflächendreiecken Zuordnungen bestehen, gebildet wird. Man gelangt so zu einer Einteilung der sphärischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit in l^2 tetraederartige Gebiete.

[1]) P_m wird dabei jedesmal als die um 1 vermehrte Anzahl der Mannigfaltigkeiten eines solchen Systems definiert. Dabei ist stets auch der Fall, daß das System keine einzige Mannigfaltigkeit enthält, wo dann $P_m = 1$ zu setzen ist, in Betracht zu nehmen.

der Anzahl der Mannigfaltigkeiten des Systems von der speziellen Wahl des Systems keineswegs vorhanden und dies ist der Punkt, auf den hier unter Verwendung des obigen Beispieles hingewiesen werden soll.

Betrachten wir zunächst den der Definition der Bettischen Zahlen gewidmeten Abschnitt in dem Buche von Picard und Simart: Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.[2]) Den Überlegungen, die angestellt werden, um für die dabei in Betracht kommenden Systeme die Unabhängigkeit der Anzahl der in ihnen enthaltenen Mannigfaltigkeiten von der speziellen Wahl des Systems nachzuweisen, liegt im wesentlichen die obige Definition Poincarés zu Grunde. Hingegen stimmt die gegebene Fassung der Definition nicht völlig mit derjenigen Poincarés überein, sondern stützt sich auf Systeme von in V gelegenen zweiseitigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}$, $W_2^{(m)}, \ldots W_t^{(m)}$, derart, daß

A) zwischen den Mannigfaltigkeiten $W_i^{(m)}$ keine Homologie der Form (44) besteht und

B) jede andere zweiseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$, die in V liegt, einer Homologie

$$W^{(m)} \sim \sum_{i=1}^{t} k_i W_i^{(m)}$$

genügt, wobei die Koeffizienten k_i ganze Zahlen bedeuten.[3])

Es ist aber zu bemerken, daß solche Systeme keineswegs in jeder Mannigfaltigkeit V vorhanden sind. Es gibt z. B. kein solches System, wenn man für V irgend eine der Mannigfaltigkeiten $[l, \lambda]$ $(l > 1)$ nimmt, da nicht jede in derselben liegende Linie $W^{(1)}$ der Homologie $W^{(1)} \sim 0$, wohl aber stets der Homologie $l\, W^{(1)} \sim 0$ genügt. Es mögen demnach Systeme von in V gelegenen Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}$, $W_2^{(m)}, \ldots W_t^{(m)}$ in Betracht genommen werden, die außer der Bedingung B noch (an Stelle von A) der Bedingung A' genügen, daß keine der Mannigfaltigkeiten $W_i^{(m)}$ sich durch die übrigen in der Form

$$W_i^{(m)} \sim \sum k_j W_j^{(m)} \quad (j = 1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots t)$$

darstellen läßt, wo die k_j ganze Zahlen bedeuten.

Um zu zeigen, daß man bisweilen in derselben Mannigfaltigkeit zwei derartige Systeme, für welche die Anzahl t verschieden ist, geben kann, werde die Mannigfaltigkeit [6, 1] und der durch

---

[2]) Bd. 1, S. 28 ff.

[3]) Dem Falle $t = 0$, in dem das System überhaupt keine Mannigfaltigkeit enthält, entspricht es hier, daß jede Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$ homololog Null ist.

die Kante a^1 des Schema (6, 1) repräsentierte geschlossene Weg betrachtet. Es ist $6a^1 \sim 0$ und für jede geschlossene Linie l in [6, 1] besteht eine Homologie $l \sim k a^1$. Jedes der in Klammern eingeschlossenen Systeme (a^1), (l^1_2, l^1_3), (l^1_3, l^1_4), (l^1_5) stellt dann ein System geschlossener Linien, das die Bedingungen A', B erfüllt, dar, wenn unter l^1_k eine geschlossene Linie verstanden wird, die der Homologie $l^1_k \sim k a^1$ genügt und etwa eine aus k in der Nähe von a^1 verlaufenden Teilen zusammengesetzte Linie ist. Es gibt sonach in [6, 1] sowohl aus einer, als auch aus zwei geschlossenen Linien bestehende Systeme von der geforderten Beschaffenheit. Soll also auf derartige Systeme eine Definition der Bettischen Zahlen gegründet werden, so muß P_m definiert werden, als die um 1 vermehrte Anzahl der Mannigfaltigkeiten derjenigen unter den Systemen dieser Beschaffenheit, welche möglichst wenig Mannigfaltigkeiten enthalten;[4]) und dieser Zusatz ist, wie gezeigt wurde, wesentlich.

Der gleiche Zusatz erweist sich bei einer anderen, der ursprünglichen Auffassung der Bettischen Zahlen entsprechenden Definition derselben[5]) als nötig. Dieselbe stützt sich auf Systeme in V gelegener zweiseitiger geschlossener m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}$, $W_2^{(m)}$, ... $W_t^{(m)}$, von der Art, daß diese Mannigfaltigkeiten (oder einzelne von ihnen) keine in V gelegene zweiseitige $(m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit beranden, daß aber die Mannigfaltigkeiten $W_i^{(m)}$ (oder einige von ihnen) mit jeder anderen zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$ eine in V gelegene zweiseitige $(m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit beranden. Diese dem System $W_1^{(m)}$, ... $W_t^{(m)}$, auferlegten Bedingungen sprechen sich präziser mit Hilfe des Homologiebegriffes so aus: Es besteht keine Homologie der Form

$$W_{i_1}^{(m)} + W_{i_2}^{(m)} + \ldots + W_{i_r}^{(m)} \sim W_{j_1}^{(m)} + W_{j_2}^{(m)} + \ldots + W_{j_s}^{(m)},$$

wohl aber für jedes $W^{(m)}$ eine Homologie

$$W^{(m)} \sim W_{k_1}^{(m)} + W_{k_2}^{(m)} + \ldots + W_{k_\varrho}^{(m)} - W_{l_1}^{(m)} - W_{l_2}^{(m)} - \ldots - W_{l_\sigma}^{(m)}$$

unter $i_1, i_2, \ldots i_r, j_1, j_2, \ldots j_s$ und ebenso unter $k_1, k_2, \ldots k_\varrho$, $l_1, l_2, \ldots l_\sigma$ durchaus verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots t$ verstanden. Daß es in einer und derselben Mannigfaltigkeit der-

[4]) Man könnte natürlich, statt einer derart definierten Zahl P_m auch alle jene Zahlen als topologische Invarianten einführen, welche, um 1 vermindert, mögliche Anzahlen derartiger Systeme $W_1^{(m)}$, $W_2^{(m)}$, ... sind. Es entsteht die Frage, ob die so definierten Zahlen, aus der nach Poincaréscher Art definierten Zahl P_m und den Poincaréschen Torsionszahlen, oder wenigstens aus der Fundamentalgruppe bestimmbar sind.

[5]) Siehe die Arbeit Bettis und das Fragment von Riemann, die in § 6, Anm. 1 zitiert wurden.

artige Systeme $W_i^{(m)}$ mit verschiedenem i geben kann, zeigt das Beispiel der Mannigfaltigkeit [8, 1], für welche jedes der Systeme (a^1, l_2^1, l_4^1), (a^1, l_3^1), (l_2^1, l_3^1, l_4^1) die geforderten Eigenschaften besitzt, unter a^1 die durch die Kante des Schema (8, 1) repräsentierte geschlossene Linie und unter l_k^1 wie oben eine der Homologie $l_k^1 \sim k a^1$ genügende geschlossene Linie verstanden. Auch hier sind also die Bettischen Zahlen erst fixiert durch den Zusatz, daß die Systeme der geforderten Beschaffenheit möglichst wenig Mannigfaltigkeiten enthalten sollen.

§ 22.

In den bisher untersuchten topologischen Invarianten übereinstimmende Mannigfaltigkeiten.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die Mannigfaltigkeiten $[l, \lambda]$ des § 20 für das Grundproblem der Analysis situs, die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Homöomorphie zweier Mannigfaltigkeiten ein gewisses Interesse zu bieten scheinen. Bei diesem Problem erscheint es als letztes Ziel, ein System aus einer vorgelegten Mannigfaltigkeit stets bestimmbarer topologischer Invarianten von solcher Art zu finden, daß aus der Übereinstimmung aller Invarianten dieses Systems für zwei Mannigfaltigkeiten auf die Homöomorphie dieser Mannigfaltigkeiten geschlossen werden kann. Nun stimmen zwei Mannigfaltigkeiten $[l, \lambda]$ mit gleichem Wert von l in der Fundamentalgruppe und sonach in allen topologischen Invarianten, über die wir zur Zeit verfügen, überein. Es entsteht die Frage, ob zwei Mannigfaltigkeiten $[l, \lambda]$ mit gleichem Wert von l stets homöomorph sind.

Eine erste Bemerkung ist sofort zu machen, daß nämlich $[l, \lambda]$ und $[l, l - \lambda]$ homöomorphe Mannigfaltigkeiten sind, da man offenbar durch Spiegelung der Zelle a^3 des Schema (l, λ) genau die mit den richtigen Zuordnungsvorschriften versehene Zelle a^3 des Schema $(l, l - \lambda)$ erhält. Für $l = 2$, in welchem Falle man in [2, 1] den in § 9 betrachteten projektiven Raum T_3 vor sich hat, ist diese Bemerkung trivial. Für $l > 2$ erhält man der gemachten Bemerkung zufolge nur $\frac{1}{2}\varphi(l)$ vorläufig als verschieden anzusehende Mannigfaltigkeiten. $l = 5$ ist sonach der kleinste Wert von l, für welchen man zwei Mannigfaltigkeiten, [5, 1] und [5, 2], erhält, deren Homöomorphie zweifelhaft ist.

Man kann die Frage, ob [5, 1] und [5, 2] homöomorphe Mannigfaltigkeiten sind, folgendermaßen fassen.[1]) Man betrachte in

[1]) Man kennt kein Verfahren zur Entscheidung solcher, auch anschaulich schwierig zu erledigender Fragen. So ist z. B. die Homöomorphie des Schema: [Tetraeder $ABCD$ mit den Zuordnungen $BCD = ACD = a_1^2$, $ABC = DAB = a_2^2$] mit dem Schema σ_3 wegen der komplizierteren Lage des zweidimensionalen Komplexes a_2^2 nicht unmittelbar ersichtlich.

[5, 1] das aus den Punkten der Lamelle a^2 bestehende geometrische Gebilde. Man erhält dasselbe aus einem Fünfeck $M_0\, M_1\, M_2\, M_3\, M_4$, indem man die Seiten $M_0\, M_1, M_1\, M_2, \ldots\, M_4\, M_1$ in der angeschriebenen Richtung einander zuordnet. Man erhält so einen „zweidimensionalen Komplex," der dadurch charakterisiert ist, daß der Rand des Flächenstückes fünfmal eine geschlossene Linie beschreibt. Es handelt sich noch um die Lage dieses zweidimensionalen Komplexes in der Mannigfaltigkeit [5, 1]. Der besseren Übersicht wegen ziehe man die durch die Punkte $M_0, M_1, \ldots M_4$ gehenden Meridianhalbkreise, durch die a^2 in fünf Dreiecke $N M_0\, M_1 = S\, M_1\, M_2$, $N\, M_1\, M_2 = S\, M_2\, M_3$, etc. zerlegt wird, die der Reihe nach d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 heißen mögen. Zwei Seiten eines solchen Dreieckes führen vom Punkte $N = S$ nach a^0, die dritte Seite wird von der von a^0 nach a^0 führenden Kante a^1 gebildet. Sei A ein Punkt auf a^1. In der Nähe von A lege man dann in der Mannigfaltigkeit [5, 1] eine kleine, die Kante a^1 einmal umschließende geschlossene Linie L. Diese Linie wird der Reihe nach die Dreiecke d_i durchsetzen, und zwar in der gleichen Reihenfolge d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, in der diese Dreiecke um den Punkt $N = S$ herum aneinander gelagert sind.

Wenn nun [5, 1] und [5, 2] homöomorph sind, so muß es möglich sein, in [5, 2] einen zweidimensionalen Komplex zu legen, der 1. dem durch a^2 in [5, 1] vorgestellten Komplex homöomorph ist, also auch aus einem Flächenstück besteht, dessen Rand fünfmal längs einer geschlossenen Linie verläuft, 2. in gleicher Weise in [5, 2] gelagert ist, wie der betrachtete Komplex in [5, 1], und 3. eine Zerschneidung von [5, 2] in einen einfach zusammenhängenden Raum bewirkt. Die Bedingung 1. wird offenbar von dem durch a^2 vorgestellten Komplex in [5, 2] erfüllt, nicht aber die Bedingung 2. Führt man nämlich in [5, 2] analog wie in [5, 1] die Zerlegung von a^2 in fünf Dreiecke aus, die man wieder in der Reihenfolge, in der sie um $N = S$ folgen, mit d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 bezeichnet, so werden bei Beschreiben einer die Kante a^1 einmal umschließenden Linie L diese Dreiecke in der Reihenfolge d_0, d_2, d_4, d_1, d_3 durchsetzt. Es könnte also nur ein von a^2 verschiedener in [5, 2] gelegener zweidimensionaler Komplex die Bedingungen 1. 2. 3. erfüllen.

Wir gehen auf diese Frage nicht weiter ein und sehen nur, daß es gewisse Anordnungsverhältnisse sind, die für dieselbe wesentlich sind. Bereits die Fundamentalgruppe unterscheidet sich von den übrigen topologischen Invarianten (Bettischen Zahlen, Torsionszahlen) dadurch, daß sie gewisse Anordnungsverhältnisse in höherem Maße wiederspiegelt. Erhält man doch aus der Fundamentalgruppe diese anderen topologischen Invarianten durch ein Verfahren, bei dem man die Operationen der Fundamentalgruppe sämtlich als vertauschbar ansehen kann (vgl. §§ 11, 14). Die eben angestellte Betrachtung der Mannigfaltigkeiten [5, 1] und [5, 2], die beide die zyklische Gruppe 5. Ordnung zur Fundamentalgruppe haben, zeigt, daß gewisse Anordnungsverhältnisse der Schemata auch in der Fundamentalgruppe nicht zum Ausdruck kommen.

Inhaltsverzeichnis.
