

the Farbe angenommen hatten. Es war daher offebar, dafs die Luft, so wie auch wahrscheinlich das von den Poren des Papiers absorbirte Wasser in der Länge der Zeit, die nämliche Wirkung, wie die Luft mit Wasser in flüssiger Form, während einer kürzeren Zeit ausübt, gehabt hatte.

Endlich und zuletzt mögen noch, in Hinsicht auf die Geschichte des Bleis, die Resultate zweier Versuche angeführt werden, welche gezeigt haben: 1) dafs Blei in Glühhitze nicht im Stande ist das Wasser zu zersetzen, wenn es in Gasgestalt über dasselbe geleitet wird, und also das Blei auf diese Art nicht oxydirt werden kann; und 2) dafs Blei im geschmolzenen Zustande, in Berührung mit wasserfreier atmosphärischer Luft, vollkommen zum Oxyd oxydirt wird.

(Schluß nächstens.)

---

V. *Beitrag zur Berechnung der Gestalten des thesseralen Krystallsystems;*  
*von Fr. von Kobell.*

---

Die meisten Formen des thesseralen Systems können auf eine sehr einfache Weise aus *einem* gegebenen Kantenwinkel berechnet werden, wenn man, ihren inneren Zustand beachtend, die Formeln anwendet, welche sich mittelst der sphärischen Trigonometrie für die Quadratpyramiden und Rhomboëder ergeben <sup>1)</sup>. Die hiebei dienlichen Formeln sind folgende:

1) Vergl. meine Abb. in Kastner's Archiv Bd. XIII Heft 1 und 4 S. 395.

## I. Für die Quadratpyramide.

1) Gegeben der halbe Randkantenwinkel  $=\alpha$ , gesucht der Scheitelkantenwinkel  $=2\beta$ :

$$\cos \beta = \frac{\cos 45^\circ \cdot \sin \alpha}{R}.$$

2) Gegeben der halbe Scheitelkantenwinkel  $=\beta$ , gesucht der Randkantenwinkel  $=2\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{R \cdot \cos \beta}{\cos 45^\circ}.$$

3) Gegeben die Neigung der Fläche zur Axe  $=a$ , gesucht den Scheitelkantenwinkel  $=2\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{\cos a \cdot \sin 45^\circ}{R}.$$

4) Gegeben die Neigung der Scheitellkante, zur Axe  $=c$ , gesucht der Scheitelkantenwinkel  $=2\alpha$ :

$$\cot \alpha = \cos c.$$

5) Gegeben der halbe Scheitelkantenwinkel  $=\alpha$ , gesucht die Neigung der Fläche zur Axe  $=a$ :

$$\cos a = \frac{R \cdot \cos \alpha}{\sin 45^\circ}.$$

6) Gegeben der halbe Scheitelkantenwinkel  $=\alpha$ , gesucht der ebene Winkel am Scheitel  $=2b$

$$\cos b = \frac{R \cdot \cos 45^\circ}{\sin \alpha}.$$

## II. Für das Rhomboëder.

1) Gegeben die Neigung der Fläche zur Axe  $=a$ , gesucht der Scheitelkantenwinkel  $=2\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{\cos a \cdot \sin 60^\circ}{R}.$$

2) Gegeben der halbe Scheitelkantenwinkel  $=\alpha$ , gesucht die Neigung der Fläche zur Axe  $=a$ :

$$\cos a = \frac{R \cdot \cos \alpha}{\sin 60^\circ}.$$

3) Gegeben der halbe Scheitellantenwinkel  $=\alpha$ ,  
 gesucht der ebene Winkel am Scheitel  $=2b$ :

$$\cos b = \frac{R \cdot \cos 60^\circ}{\sin \alpha}$$


---

#### Berechnung des Octaëders und Tetraëders.

— Da es eine Bedingung für das Octaëder ist, daß seine drei Hauptschnitte Quadrate sind, so ergibt sich der Neigungswinkel einer Kante zur Axe  $=45^\circ$ , und daraus, nach Formel I. 4), der Kantenwinkel  $=109^\circ 28' 16''$ . Zwei an einem Eck gegenüberliegende Flächen bilden also einen Winkel von  $70^\circ 31' 44''$ . Dieses wird der Kantenwinkel des Tetraëders, da bei seiner Bildung immer zwei solche Flächen zum Durchschnitt kommen, und das zugehörige andere Paar verschwindet.

(1) Der Winkel, welchen eine Normale der Octaëderfläche mit der Hauptaxe bildet:

$$=90^\circ - 35^\circ 15' 52'' = 54^\circ 44' 8'';$$

$$\frac{1}{2}(70^\circ 31' 44'').$$

(2) Der Winkel, welchen die Normalen zweier anliegender Flächen des Octaëders im Centrum des Krystalls mit einander bilden  $=70^\circ 31' 44''$ .

#### Berechnung des Rhombendodecaëders.

Da die Flächen des Rhombendodecaëders die Kanten des Octaëders gleichwinklich abstumpfen, so haben sie auch dieselbe Lage zur Axe  $=45^\circ$ , woraus sich, nach I 3.), der Kantenwinkel  $=120^\circ$  ergibt.

Die ebenen Winkel findet man, nach I, 6):

$$2b = 70^\circ 31' 44''.$$

#### Berechnung der Triakisoctaëder (Pyramidenoctaëder).

Gegeben der Winkel an den längeren Kanten  $=z$ ,  
 gesucht der an den kürzeren  $=x$ .

Man zieht von  $z$  den Octaëderwinkel ab und halbirt den Rest, so ist dessen Compl. die Neigung der Flächen

zur trigonalen Axe  $=a$ ; daraus berechnet man, nach II. 1), den Winkel  $x$ . Es sey z. B.  $z=129^{\circ} 31' 19''$ , so ist:  
 $z-109^{\circ} 28' 16''=20^{\circ} 3' 3''$ , die Hälfte  $=10^{\circ} 1' 31'',5$ ,  
 dessen Complement  $=79^{\circ} 58' 28'',5=a$ ,  
 und  $\log \cos \alpha = \log \cos a + 9.9375306 - 10$   
 $x=2\alpha=162^{\circ} 30''$ .

Ist der Winkel  $x$  gegeben, so verfährt man umgekehrt, berechnet die Neigung der Flächen zur trigonalen Axe, nach II. 2), verdoppelt dessen Compl. und addirt den Octaëderwinkel dazu.

Der stumpfe ebene Winkel der Flächen findet sich mit dem Kantenwinkel  $x$  aus der Formel II. 3), die spitzen ebenen Winkel sind dessen Supplement und jeder die Hälfte davon.

Berechnung der Tetrakishexaëder (Pyramidenwürfel).

Gegeben der Winkel an den längeren Kanten  $=\gamma$ , gesucht der an den kürzeren  $=x$ .

Man zieht von  $\gamma$  den Hexaëderwinkel  $=90^{\circ}$  ab, halbirte den Rest und berechnet (diesen als halben Randkantenwinkel einer Quadratpyramide genommen) nach I. 1) den Winkel  $x$ .

Es sey z. B.  $\gamma=157^{\circ} 22' 48''$ , so ist der in Rechnung zu bringende Winkel  $\alpha=33^{\circ} 41' 24''$  und immer:

$$\log \cos \beta = \log \sin \alpha + 9.8494850 - 10$$

$$\beta=66^{\circ} 54' 21'' ; 2\beta=x=133^{\circ} 48' 48''.$$

Ist der Winkel  $x$  gegeben, so berechnet man, um  $\gamma$  zu finden ( $x$  als Scheiteltantenwinkel einer Quadratpyramide genommen), nach I. 2), den Randkantenwinkel und addirt dazu  $90^{\circ}$ .

Der stumpfe ebene Winkel der Flächen findet sich mit  $x$  aus der Formel I. 6), die spitzen sind dessen Supplement und jeder die Hälfte davon.

Berechnung der Trapezoëder.

Gegeben der Winkel an den längeren Kanten  $=z$ , gesucht der an den kürzeren  $=\gamma$ .

Man berechnet nach I. 5) die Neigung der Fläche zur Hauptaxe  $= a$ .

Da die trigonale Axe dieser Form, wie am Octaëder, die Hauptaxe unter  $54^{\circ} 44' 8''$  schneidet (1), so ist die Neigung der Trapeze zu dieser trigonalen Axe  $= 180^{\circ} - (54^{\circ} 44' 8'' + a)$ . Aus dem so bestimmten Neigungswinkel wird der Winkel  $\gamma$  nach II. 1) berechnet.

Z. B.  $z = 144^{\circ} 54' 11''$ , so ist in der Formel

$$\alpha = 72^{\circ} 27' 5'', 5,$$

und da:

$$\cos a = \frac{R \cdot \cos \alpha}{\sin 45^{\circ}}$$

$$a = 64^{\circ} 45' 38''.$$

Die Neigung der Fläche gegen die trigonale Axe ist  $180^{\circ} - (54^{\circ} 44' 8'' + a) = 60^{\circ} 30' 14''$ . Diesen in der Formel II. 1) als  $a$  in Rechnung gebracht, findet sich  $\alpha = \frac{1}{2}\gamma = 64^{\circ} 45' 39''$  und  $\gamma = 129^{\circ} 31' 18''$ .

Für das gewöhnlich vorkommende Trapezoëder, wo  $z = 131^{\circ} 48' 36''$  ist die Neigung der Flächen zur trigonalen Axe gleich dem Tetraëderwinkel  $= 70^{\circ} 31' 31' 44''$ .

Das Verfahren, um aus dem Winkel  $\gamma$ , den Winkel  $z$  zu finden, ist nur das umgekehrte des eben angegebenen.

Der ebene Winkel der Flächen an der Hauptaxe <sup>(a)</sup> findet sich mit  $z$  aus der Formel I. 6); der an der trigonalen Axe <sup>(c)</sup> mit  $\gamma$  aus der Formel II. 3). Werden diese addirt und von  $360^{\circ}$  abgezogen, so ist jeder der übrigen Flächenwinkel <sup>(b)</sup> die Hälfte des Restes.  $b$  kann auch unmittelbar aus  $\gamma$  und  $z$  gefunden werden.

$$\text{Es ist nämlich } \cos b = \frac{\cot \frac{1}{2}\gamma \cdot \cot \frac{1}{2}z}{R}.$$

#### Berechnung der Pentagondodecaëder.

Es sey gegeben der Winkel an den charakteristischen Kanten  $= 2\beta$ , gesucht der an den übrigen  $= \alpha$ . Man findet dessen Supplement durch die Formel:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \beta}{2},$$

und umgekehrt, wenn  $\alpha$  gegeben, das Suppl. von  $\beta$  aus:  
 $\sin \beta = 2 \cdot \cos \alpha.$

Der ebene Winkel an den von den Kanten  $\alpha$  gebildeten Ecken findet sich mit  $\alpha$  aus der Formel II. 3).

Der ebene Winkel an den charakteristischen Kanten  $=c$  und der Gipfelwinkel  $=b$  aus dem Kantenwinkel  $\alpha$  und dem halben Kantenwinkel  $\beta$  nach den Formeln:

$$\cos c = -\frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta}{R}$$

$$\cos \frac{1}{2} b = \frac{R \cdot \cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Berechnung der Trigondodecaëder (Pyramidentetraëder).

Gegeben der Winkel an den längeren Kanten  $=z$ , gesucht der an den kürzeren  $=\gamma$ .

Man zieht von  $z$  den Tetraëderwinkel ab, halbirt den Rest und berechnet mit dessen Compl.  $=a$  (Neigung der Flächen zur trigonalen Axe) den Winkel  $\gamma=2a$  nach Formel II. 1). Ist der Winkel  $\gamma$  gegeben, so berechnet man daraus  $a$ , verdoppelt dessen Compl. und addirt den Tetraëderwinkel.

Der stumpfe ebene Winkel der Flächen findet sich mit  $\gamma$  nach Formel II. 3), die spitzen sind das Suppl. und jeder die Hälfte davon.

Berechnung der Trapezdodecaëder.

Gegeben der Winkel an den kürzeren Kanten  $=x$ , gesucht der an den längeren  $=z$ .

Man berechnet mit  $x$  die Neigung der Fläche zur trigonalen Axe, welche  $x$  schneidet, nach II. 2). Zu dem erhaltenen Winkel addirt man den Tetraëderwinkel (2), so ist das Suppl. der Summe die Neigung der Flächen zur trigonalen Axe, welche  $z$  schneiden. Dar-

aus findet sich nach Formel II. 1) der Winkel  $z$ . Z. B.  
 $x = 152^\circ 44' 2''$ .

$\frac{1}{2}x = \alpha$ ; Neigung der Fläche zur trigonale Axe  $= \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{R \cdot \cos \alpha}{\sin 60^\circ}$$

$$\alpha = 74^\circ 12' 24''$$

$$+ 70^\circ 31' 44''$$

---


$$144^\circ 44' 8'', \text{ dessen Suppl. } = 35^\circ 15' 52''$$

Wenn  $\frac{1}{2}z = \alpha$ , so ist nach II, 1):

$$\cos \alpha = \frac{\cos 35^\circ 15' 52'' \cdot \sin 60^\circ}{R}$$

$$\alpha = 45^\circ ; z = 90^\circ.$$

Ist der Winkel  $z$  gegeben, so gilt dasselbe für  $x$ .

Die Flächenwinkel, deren Seiten die Kanten  $x$ , finden sich mit dem Winkel  $x$  nach der Formel II. 3); die Flächenwinkel, deren Seiten die Kanten  $z$ , mit dem Winkel  $z$  nach derselben Formel. Werden diese beiden addirt und von  $360^\circ$  abgezogen, so ist die Hälfte des Restes der von  $x$  und  $z$  eingeschlossene Flächenwinkel. Dieser  $= b$  kann auch unmittelbar aus  $x$  und  $z$  gefunden werden nach der Formel:

$$\cos b = \frac{\cot \frac{1}{2}x \cdot \cot \frac{1}{2}z}{R}.$$

#### Hexakisoktaëder.

Diese Gestalt läßt sich nur in dem Falle aus *einem* gegebenen Kantenwinkel berechnen, wenn es durch regelmässige Zuschärfung der Kanten des Rhombendodecaëders entstanden ist. Man kennt nämlich dann in den auf die Dodecaëderflächen aufgesetzten Rhombenpyramiden die Basis ( $109^\circ 28' 16''$ ) und den einen oder anderen Scheitelkantenwinkel. Der Randkantenwinkel gleich dem Zuschärfungswinkel  $A - 120^\circ$ .

Von den bekannten Hexakisoktaëdern hat nur eines diese Entstehung, nämlich  $3O\frac{3}{2}$  mit den Winkeln:  
 $158^\circ 12' 48''$  ;  $148^\circ 59' 50''$  und  $158^\circ 12' 48''$ .

Im

Im Allgemeinen sind zur Berechnung dieser Gestalt zwei Kantenwinkel erforderlich, und der Gang wird, mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Rhombenpyramiden, des Dioctaëders und Skalenoëders, ungefähr folgender:

Es sey der Winkel an den längsten Kanten  $= A$ , an den mittleren  $= B$ , an den kürzesten  $= C$ .

1) Gegeben  $A$  und  $B$ , gesucht  $C$ .

Die Kanten von  $A$  und  $B$  erscheinen, wo sie die Hauptaxen schneiden, als die Scheitelkanten eines Dioctaëders, dessen verticale Hauptschnitte unter sich Winkel von  $45^\circ$  bilden. Man berechnet die Neigung der Kante von  $B$  zur Hauptaxe aus dem sphärischen  $\Delta$ , dessen Winkel  $\frac{1}{2}A$ ,  $\frac{1}{2}B$  und  $45^\circ$ . Zu dem erhaltenen Winkel addirt man  $45^\circ$  und subtrahirt die Summe von  $180^\circ$ , so ist der Rest die Neigung der Kante von  $b$  zur rhombischen Axe  $= a$ , und dann:

$$\cos \frac{1}{2} C = \frac{\cos a \cdot \sin \frac{1}{2} B}{R}.$$

2) Gegeben  $B$  und  $C$ , gesucht  $A$ .

Man berechne die Neigung der Kante von  $B$  zur rhombischen Axe  $= a$  nach der Formel:

$$\cos a = \frac{R \cdot \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} B}.$$

Das Suppl. des gefundenen Winkels  $+45^\circ$  ist die Neigung der Kante von  $B$  zur Hauptaxe, und man findet dann  $A$  als den Kantenwinkel eines Dioctaëders aus dem sphärischen  $\Delta$ , in welchem bekannt zwei Winkel, nämlich  $\frac{1}{2}B$  und der Winkel  $45^\circ$ , und die eingeschlossene Seite gleich der Neigung der Kante von  $B$  zur Hauptaxe.

3) Gegeben  $A$  und  $C$ , gesucht  $B$ .

Die Kanten von  $A$  und  $C$  erscheinen in den 6flächigen Ecken als Scheitelkanten eines Skalenoëders. An



diesem schneiden sich die verticalen Hauptschnitte unter  $60^\circ$ .

Mit diesen Daten berechnet man die Neigung der Kante von  $C$  zur Axe der 6flächigen Ecken  $= p$ . Da sich am Octaëder die Normalen einer Fläche und einer Kante im Centrum unter  $35^\circ 15' 52''$  schneiden, so wird die Neigung der Kante von  $C$  zur rhombischen Axe  $= q = 180 - (p + 35^\circ 15' 52'')$  und:

$$\cos \frac{1}{2} B = \frac{\cos q \cdot \sin \frac{1}{2} C}{R}.$$

#### Hexakistetraëder.

Es sey der Winkel an den kürzesten Kanten  $= A$ , an den mittleren  $= B$ , an den längsten  $= C$ .

1) Gegeben  $A$  und  $B$ , gesucht  $C$ .

Man berechnet die Neigung der Kante von  $B$  zur rhombischen Axe. Addirt man dazu den Winkel von  $54^\circ 44' 8''$ , so ist das Suppl. der Summe die Neigung derselben Kante zur Axe der spitzeren 6flächigen Ecken. Man hat nun (mit dem bekannten Winkel der Hauptschnitte  $= 60^\circ$ ) alle Daten, um  $C$  als den Scheitellkantenwinkel eines Skalenoëders zu berechnen.

2) Gegeben  $B$  und  $C$ , gesucht  $A$ .

Das Umgekehrte des vorhergehenden Falles.

3) Gegeben  $A$  und  $C$ , gesucht  $B$ .

Die Kanten von  $A$  und  $C$  erscheinen als die Scheitellkante eines Skalenoëders, dessen Scheitel die 6flächigen stumpferen Ecken der Gestalt.

Man berechne die Neigung der Kante von  $A$  zur Axe dieser Ecken, addirt  $54^\circ 44' 8''$ , zieht die Summe von  $180^\circ$  ab und erhält damit die Neigung der Kante von  $A$  zur rhombischen Axe  $= p$ . Man findet dann:

$$\cos \frac{1}{2} B = \frac{\cos p \cdot \sin \frac{1}{2} A}{R}.$$


---

Zur Berechnung der Diakisdodecaëder können die angegebenen Vortheile nicht angewendet werden.

---

VI. *Ueber das Krystallsystem des Phenakit;  
von E. Beyrich.*

---

Ein später wiederholter Besuch zu Framont setzt mich in den Stand noch Einiges über die Eigenthümlichkeiten und die weitere Entwicklung des Krystallsystems des Phenakit mitzutheilen <sup>1)</sup>. Das einfache, demselben zum Grunde liegende stumpfe Rhomboëder mit dem Endkantenwinkel von  $116^{\circ} 40'$ , welches, nach der Angabe des Hrn. Nordenskjöld, unter den Uralischen Phenakiten vorkommen soll, habe ich nun auch zu Framont in ausgezeichneten Krystallen gefunden; sie liegen hier besonders da, wo die Brauneisensteinmasse erdiger wird, meist klein und sehr klein. Außerdem stimmen die Elsasser Krystalle mit den Uralischen darin überein, daß in der horizontalen Zone die Seitenflächen der zweiten sechsseitigen Säule durchaus die herrschenden sind, die der ersten untergeordnet vorkommen. Das Dihexaëder aus der Kantenzone des Hauptrhomboëders, welches an den Krystallen von Framont so gern und oft überwiegend in der Endigung auftritt, ja bei größeren Krystallen fast nie fehlt, scheint den Uralischen Krystallen fremd zu seyn; auch ist bei letzteren noch nichts von Zwillingerscheinungen beobachtet. Diefs möchten die wesentlichsten Punkte für die Vergleichung beider Vorkommen seyn.

Was die Flächen von Drei- und Dreikantnern betrifft, welche, wie ich schon erwähnt habe, nie symmetrisch vollzählig, sondern immer nur zur Hälfte nach der

1) Vergl. *Annalen*, Bd. XXXIV S. 519.