DELLA TRASFORMAZIONE CUBICA

DI UNA FORMA BINARIA CUBICA.

Nota del prof. **Gabriele Torelli**, a Napoli.

Adunanza dell'8 luglio 1888.

1. Il Clebsch nella classica Memoria *Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genugen* (*), accenna che se in una forma binaria c contenente a grado $2n+1$ o $2n$ le variabili x_1, x_2 queste debbono trasformarsi nelle y_1, y_2 mediante l'equazione

$$y_1 b_x^m - y_2 a_x^m = 0 \ ,$$

l'ordine m della trasformazione, quando supera n, può ribassarsi ad n, giacchè è sempre possibile determinare tre forme α, β, γ tali che si abbia

$$\alpha_x^n b_x^m - \beta_x^n a_x^m = \gamma_x^{m-n-1} . c \ , \tag{1}$$

se il grado di c è $2n+1$, e

$$\alpha_x^n b_x^m - \beta_x^n a_x^m = \gamma_x^{m-n} . c \ , \tag{2}$$

(*) *Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* Fünfzehnter Band, S. 67.

se il grado di c è $2n$. Cosicchè la risultante l fra le

$$c = 0\,, \qquad y_1 b_x^m - y_2 a_x^m = 0$$

differisce dalla risultante λ fra le

$$c = 0\,, \qquad y_1 \beta_x^n - y_2 \alpha_x^n = 0$$

soltanto per un fattor costante.

L'asserita possibilità della determinazione di α, β, γ risulta dal fatto che, eguagliando i coefficienti delle medesime potenze delle variabili fra i due membri della (1) o della (2), si deducono fra gli $m + n + 2$, oppure $m + n + 3$ ignoti coefficienti delle α, β, γ, $m + n + 1$ equazioni lineari omogenee.

In particolare qualunque trasformazione di una cubica si riduce così ad una trasformazione lineare.

Le forme α, β, γ sono covarianti del sistema delle tre forme a, b, c; e il fattore, pel quale la risultante l differisce dalla risultante λ, ne è un invariante.

Però quantunque immediatamente si ricavano sotto forma di determinante i coefficienti di α, β, γ per mezzo dei coefficienti di a, b, c; non è agevole lo studiare in generale la loro formazione invariantiva per mezzo di a, b, c; nè quella del fattore pel quale l differisce da λ.

Nella presente Nota io mi propongo di eseguire questa ricerca nel caso particolare che una forma binaria cubica si trasforma mediante una trasformazione cubica, per quindi dedurne come i covarianti quadratico e cubico della trasformata si ottengono per mezzo di a, b, c.

2. Sia dunque c_x^3 la forma da trasformarsi,

$$y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0$$

l'equazione che stabilisce il legame fra le antiche variabili, e le nuove.

In un mio precedente lavoro (*) stabilii che, ponendo

$$\theta_x^3 = (ab)(bc)(ca)\,a_x b_x c_x\,,$$

(*) « *Sul sistema di più forme binarie cubiche* » (*Rendiconti della R. Accad. di scienze fisiche e matem. di Napoli* — Ottobre 1885; oppure *Annali del R. Istituto tecnico di Napoli*. vol. III).

e indicando con P, ∇_x^2, K_x^3 rispettivamente il discriminante, e i covarianti quadratico e cubico di questa forma θ, deve aver luogo l'identità

$$\begin{vmatrix} (a K)^3 & (\nabla a)^2 a_x & a_x^3 \\ (b K)^3 & (\nabla b)^2 b_x & b_x^3 \\ (c K)^3 & (\nabla c)^2 c_x & c_x^3 \end{vmatrix} = 0;$$

ossia, posto

$$(a K)^3 (\nabla c)^2 c_x - (c K)^3 (\nabla a)^2 a_x = \alpha_x$$

$$(b K)^3 (\nabla c)^2 c_x - (c K)^3 (\nabla b)^2 b_x = \beta_x$$

$$(a K)^3 (\nabla b)^2 b_x - (b K)^3 (\nabla a)^2 a_x = \gamma_x,$$

si ha identicamente

$$\alpha_x . b_x^3 - \beta_x . a_x^3 = \gamma_x . c_x^3 .$$

Laonde la risultante l_y^3 fra le

$$c_x^3 = 0, \qquad y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0,$$

e la risultante λ_y^3 fra le

$$c_x^3 = 0, \qquad y_1 \beta_x - y_2 \alpha_x = 0$$

differiranno soltanto di un fattor costante. Dunque:

La trasformazione cubica

(3) $$y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0$$

da operarsi sulla forma binaria cubica c_x^3, può ridursi alla trasformazione lineare

(4) $$y_1 \beta_x - y_2 \alpha_x = 0,$$

dove

$$(5)\qquad \alpha_x = (a\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 c_x - (c\mathrm{K})^3 (\nabla a)^2 a_x$$

$$(6)\qquad \beta_x = (b\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 c_x - (c\mathrm{K})^3 (\nabla b)^2 b_x ;$$

essendo ∇_x^2, K_x^3 *i covarianti quadratico e cubico della forma*

$$\theta_x^3 = (ab)(bc)(ca)\, a_x b_x c_x .$$

3. Cerchiamo ora il modulo $(\alpha\beta)$ della trasformazione lineare (4). Dalla (5) si deduce

$$(7)\qquad (\alpha\beta) = (a\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 (c\beta) - (c\mathrm{K})^3 (\nabla a)^2 (a\beta);$$

ma la (6) dà

$$(c\beta) = (b\mathrm{K}')^3 (\nabla' c')^2 (cc') - (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla' b)^2 (cb)$$

$$(a\beta) = (b\mathrm{K}')^3 (\nabla' c')^2 (ac') - (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla' b)^2 (ab);$$

dunque sostituendo nella (7) e riflettendo che

$$(a\mathrm{K})^3 . (b\mathrm{K}')^3 . (\nabla c)^2 (\nabla' c')^2 (cc')$$

è nullo, si ha

$$(\alpha\beta) = (a\mathrm{K})^3 (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla c)^2 (\nabla' b)^2 (bc) + (c\mathrm{K})^3 (b\mathrm{K}')^3 (\nabla a)^2 (\nabla' c')^2 (c'a)$$

$$+ (c\mathrm{K})^3 (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla a)^2 (\nabla' b)^2 (ab)$$

$$= (c'\mathrm{K}')^3 [(a\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 (\nabla' b)^2 (bc) + (b\mathrm{K})^3 (\nabla a)^2 (\nabla' c)^2 (ca) + (c\mathrm{K})^3 (\nabla b)^2 (\nabla' a)^2 (ab)].$$

Ora dal § 6 della medesima mia Nota più sopra citata si ricavano le relazioni

$$3(\nabla b)^2 (\nabla' a)^2 (ab) = 2\mathrm{P}\,(ab)^3$$

$$3(\nabla c)^2 (\nabla' b)^2 (bc) = 2\mathrm{P}\,(bc)^3$$

$$3(\nabla a)^2 (\nabla' c)^2 (ca) = 2\mathrm{P}\,(ca)^3,$$

donde moltiplicando rispettivamente per $(c\,\mathrm{K})^3$, $(a\,\mathrm{K})^3$, $(b\,\mathrm{K})^3$ e sommando

$$3[(c\mathrm{K})^3(\nabla b)^2(\nabla' a)^2(ab)+(a\mathrm{K})^3(\nabla c)^2(\nabla' b)^2(bc)+(b\mathrm{K})^3(\nabla a)^2(\nabla' c)^2(ca)]$$

$$=2\,\mathrm{P}\,[(ab)^3\,(c\,\mathrm{K})^3+(b\,c)^3\,(a\,\mathrm{K})^3+(c\,a)^3\,(b\,\mathrm{K})^3];$$

ma

$$(a\,b)^3\,c_x^3+(b\,c)^3\,a_x^3+(c\,a)^3\,b_x^3=3\,\theta_x^3,$$

perciò

$$(a\,b)^3\,(c\mathrm{K})^3+(b\,c)^3\,(a\,\mathrm{K})^3+(c\,a)^3\,(b\,\mathrm{K})^3=3\,(\theta\,\mathrm{K})^3=3\mathrm{P};$$

laonde

$$(c\mathrm{K})^3(\nabla b)^2(\nabla' a)^2(ab)+(a\mathrm{K})^3(\nabla c)^2(\nabla' b)^2(bc)+(b\mathrm{K})^3(\nabla a)^2(\nabla' c)^2(ca)=2\mathrm{P}^2,$$

e quindi infine

$$(\alpha\beta)=2\,(c\,\mathrm{K})^3\mathrm{P}^2,$$

la quale, posto per semplicità

$$(c\,\mathrm{K})^3=\Upsilon,$$

può scriversi

$$(\alpha\beta)=2\,\Upsilon\,\mathrm{P}^2. \tag{8}$$

4. Ciò posto designamo delle tre forme c_x^3, λ_y^3, l_y^3 rispettivamente con g, Γ, G i discriminanti, con Δ_x^2, φ_y^2, f_y^2 gli hessiani, con Q_x^3, Σ_y^3, S_y^3 i covarianti cubici.

Essendo $(\alpha\beta)$ il modulo della trasformazione lineare che conduce da c_x^3 a λ_y^3, si ha

$$\Gamma=(\alpha\beta)^6 g,$$

e quindi in virtù della (8)

$$\Gamma=2^6\,\Upsilon^6\,\mathrm{P}^{12}\,g.$$

Ora si ha inoltre (*)

$$2^2 G=3^{12}\Upsilon^2 g:$$

(*) Vedi le due mie Note « *Teoremi sulle forme binarie cubiche e loro applicazione geometrica* », e « *Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali* » (*Annali del R. Istituto tecnico di Napoli*, vol. II, 1885 e *Giornale di Matem. Battaglini*, paragonando le due ultime relazioni si trae

$$3^{12}\Gamma = 2^8\Upsilon^4 P^{12} G.$$

Or poichè λ_y^3 non differisce da l_y^3 che per un fattor costante, e Γ discriminante di λ_y^3 differisce da G discriminante di l_y^3 pel fattore $\frac{2^8}{3^{12}}\Upsilon^4 P^{12}$, vuol dire che λ_y^3 non differisce da l_y^3 che pel fattore $\frac{2^2}{3^3}\Upsilon P^3$. Avremo perciò

$$3^3\lambda_y^3 = 2^2\Upsilon P^3 l_y^3 .$$

Dunque:

Applicando alla forma binaria cubica c_x^3 la trasformazione lineare (4) si perviene al risultato cui condurrebbe la trasformazione cubica (3) moltiplicato pel fattore $\frac{2^2}{3^3}\Upsilon P^3$; dove $\Upsilon = (c K)^3$, e P è il discriminante della forma θ_x^3.

5 Ciò premesso è noto che operando la trasformazione lineare si ha

$$(\text{Risultante di } \Delta_x^2 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{1}{(\alpha\beta)^2}\varphi_y^2$$

$$(\text{Risultante di } Q_x^3 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{1}{(\alpha\beta)^3}\Sigma_y^3 .$$

Ora pel precedente paragrafo si ha

$$\varphi_y^2 = \frac{2^4}{3^6}\Upsilon^2 P^6 f_y^2$$

$$\Sigma_y^3 = \frac{2^6}{3^9}\Upsilon^3 P^9 S_y^3,$$

vol. XXIV, 1886, pag. 270, 280). Fu il Workman nella Memoria « *The Theory of the singular solutions of integrable differential equations of the first order* » (*The Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, anno 1887, p. 198) il quale fece notare la connessione fra la teoria delle equazioni algebrico-differenziali, e quella delle trasformazioni di ordine superiore trattate dal Gordan nella Memoria « *Ueber die Invarianten binärer Formen bei hoheren Transformationen* » (*Giornale di Crelle*, vol. 71, p. 164). Se prima io avessi studiata quest'ultima memoria avrei nella mia « *Contribuzione* etc. » abbreviati alcuni ragionamenti, poggiandomi per le ulteriori deduzioni su qualche risultato già ottenuto dal Gordan.

e pel paragrafo 3 si ha

$$(\alpha\beta) = 2\,\Upsilon\,\mathrm{P}^2;$$

dunque

$$(\text{Risultante di } \Delta_x^2 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{2^2}{3^6}\,\mathrm{P}^2 f_y^2$$

$$(\text{Risultante di } Q_x^3 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{2^3}{3^9}\,\mathrm{P}^3 S_y^3,$$

le quali ultime offrono la relazione fra i covarianti quadratico e cubico della forma ottenuta da c_x^3 mediante la trasformazione cubica, e i medesimi covarianti della forma primitiva.

Napoli, giugno 1888.

G. TORELLI.