

XIII. *Versuch einer mathematischen Theorie der Gasentladungen; von A. Foepl.*

Im luftförmigen Aggregatzustande zeichnet sich das physikalische Verhalten der Körper im allgemeinen durch besonders einfache und unserer Erkenntniss relativ leicht zugängliche Gesetze aus.

Man wird es daher als auffällig bezeichnen dürfen, dass das Gesetz, welches die Leitung der Electricität in den verdünnten Gasen regiert, bisher auch nicht annähernd mit derselben Schärfe ermittelt wurde, die dem Ohm'schen Gesetze für die Electricitätsleitung in den Metallen und Electrolyten zukommt.

Allerdings liegt neben eingehenden Detailstudien der bei den Gasentladungen auftretenden Phänomene auch eine Anzahl schöner Versuche vor, welche sich auf die quantitativen Verhältnisse des Entladungsstromes beziehen und die nächste Grundlage für die Ableitung eines dem Ohm'schen analogen Stromgesetzes zu bilden vermögen. Unter den neueren Arbeiten dürften in dieser Hinsicht namentlich die Untersuchungen von Hittorf, E. Wiedemann und Hertz zu beachten sein.

Bisher ist es indessen noch nicht gelungen, aus diesen an sich sehr werthvollen Feststellungen ein fundamentales Gesetz für die electricischen Ströme in den verdünnten Gasen abzuleiten. Nur das eine scheint festzustehen, dass weder das Ohm'sche Gesetz selbst, noch eine Modification desselben jene Erscheinungen befriedigend darzustellen vermag.

Es schien mir, dass es für die Erreichung jenes Zieles förderlich sein würde, die Sache einmal von der anderen Seite anzufassen und zu untersuchen, zu welchen Consequenzen man gelangt, wenn man sich einerseits auf die kinetische Theorie der Gase und andererseits auf die Electrostatik stützt. Allerdings begegnet man dabei der Schwierigkeit, dass keine jener Disciplinen Auskunft darüber geben kann, wie sich zwei electricisirte Molecüle beim Zusammenstosse verhalten. Wenn man indessen alle a priori möglich erscheinenden Fälle aufzählt und die aus ihnen fliessenden Folge-

rungen mit den vorliegenden Erfahrungen vergleicht, wird es möglich sein, zu sicheren Schlüssen zu gelangen.

In dieser Absicht habe ich den Versuch unternommen, jenen Weg einzuschlagen, und bitte, die hierbei erlangten, wie mir scheint, nicht unerheblichen Resultate hier kurz mittheilen zu dürfen.

In erster Linie ging ich von der Betrachtung des continuirlichen Stromes aus. Man hat lange daran gezweifelt, ob eine continuirliche Strömung im Gase möglich sei. Besonders von Hrn. E. Wiedemann wurden gegen diese Annahme gewichtige Gründe vorgebracht. Durch die eingehende Beweisführung des Hrn. H. Hertz scheint es indessen sicher festgestellt zu sein, dass bei hinreichender Electricitätszufuhr eine continuirliche Strömung im Gase zu Stande kommt.

Ausser den von anderen Beobachtern erhaltenen und allgemein bekannten Versuchsergebnissen liess ich mich bei dieser Untersuchung namentlich auch durch diejenigen leiten, welche ich selbst erhielt und vor kurzem veröffentlichte.¹⁾ Dieselben gipfeln in dem Nachweise, dass man durch relativ beträchtliche electromotorische Kräfte auf dem Wege der Volta- oder Magnetinduction in einem durch ein verdünntes Gas gebildeten geschlossenen Kreise keine merklichen Ströme erhält. Wenn man vielleicht auch entgegenhalten könnte, dass in den von mir untersuchten Fällen die Ströme zu klein gewesen wären, um sich bemerklich zu machen, so glaubte ich doch, meine Erfahrungen hier zu der Annahme erweitern zu sollen, dass auf die bezeichnete Weise Ströme überhaupt nicht zu Stande gebracht werden könnten.

Unter diesem Gesichtspunkte schränkt sich die Zahl der a priori hinsichtlich des Mechanismus der Gasentladungen ins Auge zu fassenden Möglichkeiten wesentlich ein.

1) A. Foeppel, Wied. Ann. 33. p. 492. 1888. Leider ist es mir entgangen, dass Hr. Hittorf (Wied. Ann. 24. p. 138) schon vor längerer Zeit den gleichen Gedankengang verfolgte und bei Verwendung des Entladungsschlages einer Leydener Flasche positive Ergebnisse erhielt. In der oben stehenden Abhandlung konnte ich mich darauf nicht mehr beziehen, weil dieselbe bereits gedruckt war, als ich durch Hrn. Hertz freundlichst hierauf aufmerksam gemacht wurde.

Soweit ich sehe, werden in erster Linie die folgenden fünf möglichen Fälle zu unterscheiden sein:

I. Auf die den Electroden benachbarten Molecüle tritt freie Electricität von diesen über. Die Bewegungen der geladenen Molecüle werden durch das Potentialgefälle gerichtet. Sie übertragen bei den Zusammenstößen ihre Ladungen ganz oder theilweise auf andere.

II. Der Vorgang findet ähnlich wie sub I statt, jedoch mit dem Unterschiede, dass ein Electricitätsübergang nur in der unmittelbaren Nachbarschaft der Electroden infolge der dort modificirten Umstände, nicht aber im freien Gasraume möglich ist.

III. Die Aetherhüllen der einzelnen Molecüle werden durch das bestehende Potentialgefälle deformirt; infolge davon tritt bei den wechselseitigen Zusammenstößen Aether zwischen den Molecülen über. Diese Aetherübergänge stellen den electrischen Strom dar.

IV. Die Gase leiten electrolytisch. Die Molecüle zerfallen, und die entstehenden Ionen sind eo ipso von electrischer Polarität.

V. Der extramoleculare Aether ist das Substrat des Stromes. Das Vacuum leitet den Strom.

Ausser diesen fünf einfachen Fällen sind dann noch diejenigen zu beachten, welche durch eine Combination mehrerer derselben miteinander entstehen.

Die Annahmen I und II sind wohl von allen zuerst ins Auge gefasst worden; sie entsprechen unseren sonstigen Vorstellungen am besten. Freilich schien es, als wenn sie durch die besonders von Hrn. E. Goldstein¹⁾ vorgebrachten Einwände endgültig widerlegt wären. Es ist als das wichtigste Resultat der vorliegenden Arbeit anzusehen, dass diese Einwände sich als hinfällig erwiesen. Dasselbe Resultat kommt auch der Annahme IV zu statten, gegen welche sich die gleichen Bedenken richteten.

Die Annahme III liegt der von Hrn. E. Wiedemann²⁾

1) E. Goldstein, *Electrische Abstossung*. Berlin 1880.

2) E. Wiedemann, *Wied. Ann.* 10. p. 202. 1880; 20. p. 778. 1883.

gegebenen Theorie zu Grunde; IV tritt in den Arbeiten der Herren Schuster¹⁾ und Arrhenius²⁾ auf, und V entspricht der Aethertheorie des Hrn. Edlund.

Mit meinen Versuchsergebnissen und der Annahme, dass denselben allgemeine Gültigkeit zuzuschreiben sei, treten in unmittelbarem Widerspruch die Fälle III und V. Ohne Zweifel müsste man auf Grund dieser Anschauungen schliessen, dass durch Induction in einem Gas-, resp. Vacuumstromkreise Ströme erregt werden könnten. Bringt man nämlich die Thatsache, dass Magnete und Gasströme sich gegenseitig ablenken, in Verbindung mit der von Hrn. H. v. Helmholtz³⁾ gegebenen Ableitung für die electromotorische Kraft der Induction, so folgt, dass das Princip der Erhaltung der Kraft im vorliegenden Falle das Auftreten einer inducirten Kraft fordert.

Auch gegen die Hypothese IV erheben sich auf Grund meiner Resultate Bedenken, oder sie schränken sie wenigstens dahin ein, dass nur im Bereiche der Electroden eine primäre Zersetzung der Molecüle möglich sei. Da ich nun dem Plane meiner Untersuchung gemäss nur die Strombildung in dem freien Gasraume betrachten kann, die Vorgänge an den Electroden aber ausschliessen muss, bedarf infolge dieser Einschränkung die Annahme IV hier keiner besonderen Behandlung. Denn es ist leicht ersichtlich, dass ein blosser Austausch bei dem Zusammenstoss der Atome mit den nicht zersetzten Molecülen keine Aenderung bewirkt. Wenn demnach eine primäre Zersetzung im freien Gasraume durch das bestehende Potentialgefäll nicht als möglich zu erachten ist, so fällt wenigstens in den Grundzügen und hinsichtlich der Behandlung, welche ihnen hier zu Theil werden soll, die Annahme IV mit II zusammen.

Aus diesen Erörterungen geht hervor, dass ich mich hier damit begnügen kann, die Fälle I und II näher zu be-

1) A. Schuster, *Proc. of the Roy. Soc.* **37.** p. 317. 1884; **42.** p. 371. 1887.

2) Arrhenius, *Wied. Ann.* **32.** p. 545. 1887.

3) H. v. Helmholtz, *Gesammelte Abhandl.* **1.** p. 62. 1882.

trachten. Dass übrigens die für den Strom im freien Gasraume abzuleitenden Gesetze der experimentellen Prüfung zugänglich sein werden, obschon bisher nur durch Vermittelung von Electroden electriche Strömungen durch Entladungsröhren geleitet werden konnten, ist unmittelbar ersichtlich. Man hat zu diesem Zwecke nur die Erscheinungen in verschieden langen Röhren unter homologen Bedingungen zu vergleichen, wie es von Hittorf längst geschehen ist.

a. Verfolgung der Hypothese I.

Man weiss, dass in einem Gase auch bei den in den Entladungsröhren gewöhnlich angewendeten hohen Verdünnungen die Zahl der Zusammenstösse, welchen ein Molecül in der Secunde unterliegt, eine sehr grosse ist. Vermögen die Molecüle ihre electriche Ladungen hierbei theilweise auszugleichen, so wird man schliessen müssen, dass innerhalb eines kleinen Raumes alle Molecüle nahezu gleiche Ladungen besitzen. Bezeichnet man die durchschnittliche Ladung eines dieser Molecüle mit ϵ und die Anzahl derselben in 1 ccm mit N , so erhält man für die räumliche Dichte der freien Ladung an jener Stelle:

$$(1) \quad \varrho = \epsilon \cdot N,$$

wobei, wie im Folgenden stets, alle Grössen im electrostatischen C.-G.-S.-Systeme gemessen werden sollen.

Das im Gasraume herrschende Potentialgefäll verursacht Druckunterschiede, vermag aber direct keine continuirliche Strömung hervorzubringen. Diese ist vielmehr in der Veränderlichkeit von ϱ und ϵ mit dem Orte und in dem molecularen Austausch bei der Begegnung begründet. Der ganze Vorgang lässt sich mit der Wärmeleitung in Parallele stellen.

Durch ein Flächenstück df , das senkrecht zur X -Axe steht, gehen im Zeitelemente dt im Sinne der wachsenden x :

$$\frac{N}{2} \cdot u_m \cdot df \cdot dt$$

Molecüle über, wenn u_m das arithmetische Mittel der positiven Geschwindigkeitscomponenten u (berechnet also mit Ausschluss aller sich im negativen Sinne bewegendenden Molecüle) bedeutet, und eine ebenso grosse Zahl passirt die Fläche

im entgegengesetzten Sinne. Der mittlere senkrechte Abstand der Stelle, an welcher der letzte Zusammenstoß stattfand von df , sei a . Derselbe ergibt sich aus dem Maxwell'schen Gesetze der Geschwindigkeitsvertheilung durch eine bekannte Rechnung, auf welche indessen hier nicht zurückgegriffen zu werden braucht.

Die die Fläche df durchschreitenden Molecüle führen electriche Ladungen mit sich, deren Höhe von dem Orte des letzten Zusammenstoßes abhängt. Für die spezifische Stromintensität i_x erhält man demnach:

$$i_x = -N \cdot u_m \cdot a \cdot \frac{\partial s}{\partial x},$$

wofür auch, da N nur geringe Aenderungen mit x zeigen kann, sich setzen lässt:

$$(2) \quad i_x = -c \frac{\partial q}{\partial x},$$

wobei der Coëfficient c zwar von Druck und Temperatur des Gases, nicht aber von den Coordinaten abhängig ist.

Für den continuirlichen Strom muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0,$$

oder, wenn Δ^2 das Zeichen der Laplace'schen Operation bedeutet:

$$(3) \quad \Delta^2 q = 0.$$

Verbindet man hiermit die Laplace-Poisson'sche Gleichung und bezeichnet das electrostatische Potential mit φ , so ist dieses der Differentialgleichung unterworfen:

$$(4) \quad \Delta^2 (\Delta^2 \varphi) = 0.$$

In dem mittleren Theile einer langen, geraden Entladungsröhre wird man annehmen können, dass die äquipotentiellen Flächen senkrecht zur Rohrxaxe stehen und nur eine geringe Krümmung besitzen. Es müsste dann φ eine algebraische Function dritten und q eine solche ersten Grades der längs der Rohrxaxe gemessenen Abscisse sein.

Nach den Versuchen von Hittorf ist die Vertheilung des Potentials im freien Gasraume bei verschiedenen Stromintensitäten nicht merklich verschieden. Mit dieser Erfah-

rungsthatsache lässt sich die eben besprochene Hypothese nicht wohl vereinigen, wie Gl. (2) und die mit ihr in Verbindung zu bringende Laplace-Poisson'sche Gleichung deutlich zeigt. Ueberdies finden die Hittorf'schen Resultate eine indirecte Bestätigung durch die Beobachtung des Hrn. E. Wiedemann, dass die im Rohre entwickelte Wärmemenge der Stromintensität und nicht dem Quadrate derselben proportional ist.

Es wird sich demnach der Schluss nicht abweisen lassen, dass die Annahme I dem wahren Vorgange bei der Entladung nicht entspricht.

b. Verfolgung der Hypothese II.

Nachdem ich durch die oben dargelegten Erwägungen dazu gelangte, alle übrigen a priori möglich erscheinenden Annahmen zu verwerfen, muss ich schliessen, dass die Hypothese II, resp. die Hypothese IV, welche sich mit der als erforderlich erkannten Beschränkung nicht mehr wesentlich von jener unterscheidet, den Mechanismus der Entladung richtig schildere. In der That wird sich zeigen, dass die Schlüsse, welche sich aus ihr in Bezug auf das Stromgesetz ableiten lassen, den bisher bekannten Fundamentalthatsachen nicht widersprechen.

Es sei zunächst der Weg eines einzelnen electrisirten Molecüls unter einer Menge electrisch neutraler Molecüle desselben Gases betrachtet. Wenn keine electriche Kraft die Bewegung beeinflusst, möge u die Geschwindigkeitscomponente parallel zur X -Axe bezeichnen; dieselbe ist eine Function der Zeit, welche zwischen zwei Zusammenstössen constante und während derselben schnell wechselnde Werthe ergibt. Besteht dagegen ein Potentialgefäll, so tritt eine Variation von u ein, welche mit δu bezeichnet werden soll. Für die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen gilt die Gleichung:

$$(5) \quad \frac{d\delta u}{dt} = -\frac{s}{m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

worin m die Masse des Molecüls bedeutet.

Um den Einfluss der Zusammenstösse beurtheilen zu können, nehme ich an, dass neben dem soeben betrachteten

sich noch eine Anzahl anderer Molecüle unter den gleichen Bedingungen in der Gasmasse befinde. Der mittlere Werth u_m aller u ist dann gleich Null zu setzen, während der mittlere Werth der δu oder δu_m als eine stetige Function der Zeit angesehen werden kann.

Die Grössenordnung des Zeitelementes dt soll so gewählt sein, dass es zwar gegenüber der mittleren Dauer zwischen zwei Zusammenstössen verschwindet, während andererseits innerhalb derselben doch eine gewisse relativ kleine, absolut genommen aber nicht unbeträchtliche Zahl der electricisirten Molecüle zum Zusammenstosse gelangt. Die Veränderung, welche δu_m in dt erfährt, setzt sich dann aus zwei Theilen zusammen, aus einer Vergrösserung, welche der Beschleunigung der nicht zusammenstossenden Molecüle durch die electricische Kraft ihren Ursprung verdankt, und aus einer Verringerung wegen der theilweisen Uebertragung des durch die δu bedingten Momentes auf die neutralen Molecüle. Man könnte unter der Annahme der Gültigkeit der Gesetze des elastischen Stosses und auf Grund des Maxwell'schen Gesetzes denjenigen Bruchtheil jenes Momentes berechnen, welcher den electricisirten Molecülen selbst verbleibt. Da aber zu so specialisirenden Betrachtungen hier gar keine Nöthigung vorliegt, werde ich mich von denselben frei halten und den auf die neutralen Molecüle abgegebenen Bruchtheil jenes Momentes durch den unbekannten, aber constanten Factor α charakterisiren, von dem ich nur noch annehme, dass er positiv ist und zwischen 0 und 1 liegt, ohne sich einer dieser beiden Grenzen sehr zu nähern.

Man erhält dann die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{d\delta u_m}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\alpha}{\tau_m} \cdot \delta u_m,$$

in welcher τ_m die mittlere Dauer des freien Weges zwischen zwei Zusammenstössen bedeutet.

Die Gleichung (6) kann sofort integrirt werden, und man erhält aus ihr:

$$-\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\alpha}{\tau_m} \delta u_m = C. e^{-\frac{\alpha}{\tau_m} \cdot t}.$$

Die Integrationsconstante C lässt sich ermitteln, wenn der Anfangszustand (für $t = 0$) bekannt ist. Den grössten Werth nimmt δu_m für $t = \infty$ an. Diesem Werthe kommt es aber schon dann sehr nahe, wenn t viel grösser als τ_m geworden ist, d. h. schon nach Ablauf einer Zeitdauer, die zu gering ist, um die Molecüle nach Orten mit merklich abgeänderten Bedingungen überzuführen. Wir dürfen daher überall setzen:

$$(7) \quad \delta u_m = - \frac{\tau_m}{\alpha} \cdot \frac{s}{m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Analoge Gleichungen gelten für die anderen Coordinatenrichtungen.

Bei der Ableitung dieser Gleichung ist keine Rücksicht darauf genommen worden, dass die electricische Kraft Druckdifferenzen im Gase hervorruft, welche einen Rückstrom des ganzen Gemisches neutraler und electricirter Molecüle hervorrufen. Diesem Umstande wird alsbald durch die Bedingung Rechnung getragen werden, dass die Zahl aller im Volumenelemente enthaltenen Molecüle sich mit der Zeit nicht ändern darf.

Die Zahl der Molecüle in 1 ccm, welche die Ladung ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ besitzen, sei jetzt mit $Nf(\varepsilon)d\varepsilon$ bezeichnet; $f(\varepsilon)$ ist dann nicht nur von ε , sondern auch von den Coordinaten abhängig. Dann ist:

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = 1.$$

Der durch die Bewegungen δu_m veranlasste Electricitätsstrom im Sinne der X -Axe wird gleich:

$$- \frac{\tau_m}{\alpha \cdot m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot N \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon.$$

Die Gesamtzahl der die Flächeneinheit im Sinne der positiven X -Axe mehr als im entgegengesetzten Sinne passirenden Molecüle, welche die soeben angegebene Ladung überführen, wird durch einen Ausdruck dargestellt, den man aus dem Vorstehenden erhält, wenn man unter dem Integralzeichen einen der beiden Factoren ε unterdrückt. Mit Be-

nutzung des Zeichens ρ für die räumliche Dichte der freien Ladung kann man dafür auch schreiben:

$$-\frac{\tau_m}{\alpha m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \rho.$$

Der Rückstrom, welcher durch die im Sinne der X -Axe bestehende Druckdifferenz veranlasst wird, ergibt sich hieraus durch Multiplication mit ρ/N .

Bei Aufstellung der Gleichung für die wirklich eintretende Stromcomponente i_x ist noch auf die Wirkung der Diffusion Rücksicht zu nehmen, welche durch die Veränderlichkeit von $f(\epsilon)$ mit dem Orte bedingt wird. Bezeichnet man den von Temperatur und Dichte des Gases in bekannter Weise abhängigen Diffusionscoefficienten mit D , so erhält man schliesslich:

$$(9) \quad i_x = -\frac{\tau_m}{\alpha \cdot m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left\{ N \int_{-\infty}^{+\infty} f(\epsilon) \cdot \epsilon^2 d\epsilon - \frac{\varrho^2}{N} \right\} - D \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Durch diese Formel wird das gesuchte Stromgesetz noch nicht in expliciter Form gegeben, da vorläufig kein Anhaltspunkt für die Ermittlung der Function $f(\epsilon)$ besteht. Wenigstens haben mich verschiedene Bemühungen in dieser Hinsicht bisher nicht zum Ziele geführt. Doch hindert dies nicht, aus Gleichung (9) eine Reihe wichtiger Schlüsse zu ziehen.

Der nächstliegende Schritt wird nun darin bestehen müssen, zu versuchen, ob man durch vereinfachende Annahmen über die Gestalt der Function $f(\epsilon)$ sich den bisher bekannten Thatsachen anzuschliessen vermag.

c. Specialisirung der gefundenen Lösung.

Nur beispielsweise soll hier in der soeben erwähnten Absicht der einfachste Fall behandelt werden, welcher in Bezug auf die Form der Function $f(\epsilon)$ gedacht werden kann. Derselbe beansprucht übrigens aus dem Grunde ein besonderes Interesse, weil er der Annahme von der electrolytischen Leitung der Gase entspricht.

Es sei also jetzt (indessen nur vorübergehend) angenommen, dass unter den N Gasmoleculen, welche das Volumen

von 1 ccm ausfüllen, n sich befinden, welche die bei allen gleiche positive Ladung e besitzen, während n' mit der negativen Ladung $-\varepsilon_1$ behaftet, und alle $N - n - n_1$ übrigen unelectrisch sind. In diesem Falle ist $\rho = \varepsilon n - \varepsilon_1 n_1$ zu setzen, und die Gl. (9) geht über in:

$$(9_a) \ i_x = - \frac{\tau_m}{\alpha \cdot m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left\{ \varepsilon^2 \frac{n(N-n)}{N} + \varepsilon_1^2 \frac{n_1(N-n_1)}{N} + 2\varepsilon\varepsilon_1 \frac{nn_1}{N} \right\}.$$

Das Glied, welches sich auf die Diffusion bezieht, habe ich dabei vernachlässigt. Dass dasselbe unter gewöhnlichen Umständen ziemlich irrelevant sei, lässt sich schon von vornherein vermuthen; es ergibt sich dies aber auch aus den weiterhin folgenden Auseinandersetzungen.

Der durch die Formel (9_a) gegebene Ausdruck schliesst sich in mehrfacher Beziehung den Erfahrungen an. Zunächst vermag i_x grösser zu werden, ohne dass sich $\partial \varphi / \partial x$ merklich ändert, und zwar durch blosser Aenderung der n und n_1 . Allerdings würde in dieser Hinsicht ein Maximum erreicht werden können, dessen analytische Bedingung von der Relation zwischen n und n_1 abhängt. Man würde also anzunehmen haben, dass bei den bisher ausgeführten Versuchen die Zahl der neutralen Molecüle jene der electricisirten sehr überwog.

Ferner wächst mit abnehmender Gasdichte die „Leitungsfähigkeit“ des Gases. Freilich ergibt die Formel eine Abnahme dieser Leitungsfähigkeit bei steigender Temperatur. Indessen gilt dies nur so lange, als der ganze Entladungsraum erwärmt wird, und in diesem Falle wird aller Wahrscheinlichkeit nach der Vorgang an den Electroden in einem dem Stromflusse günstigen Sinne beeinflusst, d. h. n und n' erhöht, sodass trotz der Verringerung des vor der Klammer stehenden Factors τ_m der Strom anwachsen kann. Erhitzt man dagegen nur local, so wird nicht nur τ_m , sondern zugleich N geändert. Die Verkleinerung von τ_m erniedrigt, die gleichzeitige Verminderung von N erhöht die Leitungsfähigkeit.

Es hat gar keine Schwierigkeit, diese Verhältnisse rechnermässig zu verfolgen; ich sehe aber von der Wiedergabe der betreffenden Formeln ab, weil es vorläufig keineswegs

in meiner Absicht liegt, die Gl. (9_a) für das wahre Stromgesetz auszugeben. Für jetzt genügt es, nachgewiesen zu haben, dass Gl. (9_a) und daher auch die allgemeinere Gl. (9) den hier zur Prüfung herangezogenen Thatsachen nicht widerspricht.

d. Numerische Werthe.

Das nach der Convectionstheorie anzunehmende Stromgesetz Gl. (9) lässt keine Vorausberechnung der in einem concreten Falle zu erwartenden Stromintensität zu, weil in demselben noch eine unbekannte Function enthalten ist. Dagegen kann man umgekehrt die durch das Experiment gegebenen Zahlenwerthe zur Erforschung jener Unbekannten benutzen. Diesen Weg habe ich bisher nur in beschränktem Umfange einschlagen können, weil Versuchsreihen, in denen alle in Gl. (9) vorkommenden, der Messung zugänglichen Grössen zusammengehörig festgestellt wären, bisher nicht vorliegen. Indessen reicht das vorhandene Material aus, das Vorausgegangene wenigstens zu erläutern und das später Folgende zu begründen.

Setzt man der Kürze wegen:

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} N f(\varepsilon) \frac{\varepsilon^2}{m} d\varepsilon = \gamma,$$

so lässt Gl. (9) einen Schluss auf den Werth von γ wenigstens der Grössenordnung nach zu. Es sei in einem Entladungsrohre die specifische Stromintensität $= 10^7$ mechanischen Einheiten; d. h. etwa $\frac{1}{360}$ Daniell-Siemens auf 1 qcm Querschnittsfläche, ein Werth, um welchen die von den Herren E. Wiedemann und Hertz beobachteten Grössen schwanken. Ferner soll im freien Gasraume (bei grösserer Rohrlänge) $\partial\varphi/\partial x = \frac{1}{1500}$ statischen Einheiten, d. h. etwa 1 Volt auf 5 cm gesetzt werden, was im Hinblick auf die Versuche des Hrn. Hittorf wenigstens ungefähr den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen wird. Setzt man die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen $\tau_m = 10^{-6}$ sec, so entspricht dies einer relativ hohen Verdünnung, die aber vielfach bei diesen Versuchen überschritten wurde. Für α möge rund 0,5 gesetzt werden, was wenigstens der Grössenordnung nach auch in

dem Falle als sicher zulässig zu erachten ist, wenn die in dem Entladungsraum vorhandenen Molecüle, resp. Atome verschiedene Massen haben.

Berücksichtigt man in Gl. (9) nur das mit γ behaftete Glied und setzt die angegebenen Werthe ein, so erhält man daraus:

$$\gamma = 75 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-2}.$$

In Wirklichkeit muss indessen γ noch etwas grösser sein wegen des zweiten Gliedes in der Klammer der Gl. (9), während der Einfluss der Diffusion wieder vernachlässigt werden kann. Aus der Ableitung der Formeln geht indessen hervor, dass dieser Umstand auf die Grössenordnung des für γ zu setzenden Werthes nicht von merklichem Einflusse sein kann.

Es wird nun zu prüfen sein, ob der sehr hohe Werth von γ , auf den wir hier geführt wurden, sich auf Grund unserer bisherigen Kenntniss als wahrscheinlich oder wenigstens als möglich bewährt. Den grössten Werth würde γ nach Gl. (10) annehmen, wenn alle Molecüle die grösste (positive oder negative) Ladung hätten. Umgekehrt muss diese grösste Ladung einzelner Molecüle wesentlich höher sein, als wir sie durch gleiche Vertheilung auf alle Molecüle berechnen können. Unter dieser letzteren Annahme würde man für γ setzen können:

$$\frac{N e^2}{m} \quad \text{oder} \quad \frac{e^2}{N m}.$$

Denken wir uns die Röhre mit Sauerstoff gefüllt, so würde im Einklange mit der Annahme für τ_m die Dichte etwa gleich $5 \cdot 10^{-5}$ derjenigen bei atmosphärischem Drucke, und daher $N \cdot m$ ungefähr gleich $6 \cdot 10^{-8} \text{ g}$ pro Cubikcentimeter zu setzen sein. Damit würden wir auf den Werth:

$$\rho = 22 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$$

geführt. Um eine missverständliche Auffassung dieses Resultates zu verhüten, hebe ich noch ausdrücklich hervor, dass bei der Ableitung desselben so gerechnet wurde, als wenn alle Ladungen das gleiche Vorzeichen hätten, weil dieses letztere auf den Werth von γ ganz ohne Einfluss ist. Der gefundene Werth von ρ ist also keineswegs mit dem wahren Werthe der räumlichen Dichte der freien Ladung zu wechseln.

Immerhin lässt uns dieses Resultat erkennen, dass Molecüle mit so hohen (theils positiven, theils negativen) Ladungen vorkommen müssen, dass man auf den ersten Blick an der Wahrscheinlichkeit derselben und damit an der Zulässigkeit der ganzen Convectionstheorie zweifeln möchte. Dieser Zweifel verschwindet indessen, wenn man zum Vergleiche eine Angabe über die Electrolyse des Wassers heranzieht. Man weiss, dass bei diesem Processe 1 Amp. in der Secunde rund 0,08 mg Sauerstoff abscheidet. Andererseits entspricht 1 Amp. dem Uebergange von $3 \cdot 10^9$ electrostatischen Einheiten pro Secunde. Man wird also sagen dürfen, dass an 1 g Sauerstoff etwa $40 \cdot 10^{12}$ mechanische Einheiten der Electricität gebunden erscheinen. Nach diesem Maassstabe würden wir auf die in dem oben behandelten Beispiele in 1 ccm enthaltene Menge von $6 \cdot 10^{-8}$ g einen electrischen Inhalt von $24 \cdot 10^6$ C.-G.-S.-Einheiten als möglich anzusehen haben.

Diese Zahl ist aber nicht nur von gleicher Grössenordnung wie die oben als mindestens nothwendig gefundene, sondern übertrifft sie noch um das Hundertfache.

In grober Annäherung müssen wir also bei Zugrundelegung der Convectionstheorie den geladenen Molecülen Ladungen von gleicher Grössenordnung zuschreiben, wie sie bei der Electrolyse an jene geknüpft erscheinen.

Man wird mir wohl ohne weiteres zugeben, dass dieses Resultat viel eher geeignet erscheint, die untersuchte Hypothese zu stützen, als dieselbe zu entkräften. Ebenso gelangt man zu Ergebnissen, welche mit den hier gezogenen Grundlinien der Convectionstheorie conform sind, wenn man die Kräfte und Beschleunigungen bestimmt, welche den electrisirten Molecülen zukommen.

Zu diesem Zwecke greife ich auf Gl. (5) zurück. Setzt man, wie seither, $Nm = 6 \cdot 10^{-8}$, $\partial \varphi / \partial x = \frac{1}{1500}$ und $N\epsilon > 22 \cdot 10^3$, so wird:

$$\frac{du'}{dt} > 24 \cdot 10^7.$$

Die electrische Kraft ist also ganz erheblich grösser als die Schwerkraft. Nehmen wir dem oben gezogenen Vergleiche entsprechend an, dass der wahre Werth von du'/dt

für die Molecüle mit der grössten Ladung 100 mal so gross ist als die gefundene untere Grenze, so kommen wir auf eine Beschleunigung, welche $24 \cdot 10^6$ mal so gross ist als jene der Schwere. Während der Zeit $\tau_m = 10^{-6}$ sec zwischen zwei Zusammenstössen kommt eine Geschwindigkeitsvermehrung von 240 m pro Secunde, d. h. eine zwar erhebliche, aber keineswegs excessive Erhöhung der Temperatur zu Stande.

Es ist klar, dass bei der Wirksamkeit so grosser Kräfte der Einfluss der Diffusion auf den Strom unter gewöhnlichen Umständen nicht in Betracht kommen kann.

e. Stromschwankungen.

Die Erklärung des Zustandekommens der Stromschwankungen, und namentlich der grossen Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser letzteren legt scheinbar der Convectionshypothese die grössten Schwierigkeiten in den Weg. Dies geht so weit, dass man geglaubt hat, den electrisch geladenen Molecülen Geschwindigkeiten von 10 Meilen und mehr beilegen zu müssen. Nachdem sich diese vom Standpunkte der kinetischen Gastheorie ganz unhaltbare Annahme auch durch optische Versuche zurückweisen liess, hielt man sich für berechtigt, auf die gänzliche Unhaltbarkeit der Convectionstheorie zu schliessen.

Die Zurückweisung jenes Einwandes wird daher als der wichtigste Theil dieser Untersuchung zu betrachten sein. Diese Zurückweisung ist mir nicht nur vollständig gelungen, sondern ich wurde zu diesem Resultate auch ohne jegliche ad hoc eingeführte Annahme durch eine consequente Weiterentwicklung der an die Spitze dieser Untersuchung gestellten Annahme II geführt. Der Einwand, welcher die Convectionstheorie für immer zu beseitigen schien, erweist sich daher nicht nur als nicht stichhaltig, sondern er ist geradezu falsch, weil er mit den Grundanschauungen über den convectiven Entladungsvorgang unvereinbar ist. Der Beweis, den ich für diese Behauptung jetzt führen werde, ist ein rein mathematischer und daher, wenn kein Rechenfehler vorliegt, zwingender.

In einem Gasraume möge zunächst ein constanter electrischer Strom bestehen. Die Intensität desselben kann auch

gleich Null sein, nur soll dann angenommen werden, dass diejenige Mischung geladener und neutraler Molecüle vorhanden ist, welche hier als Vorbedingung für das Zustandekommen eines Gasstromes erkannt wurde.

Der vorher constante Zustand soll dann zur Zeit $t = 0$ an irgend einem Orte eine Störung erfahren. Es soll die Stromschwankung behandelt werden, die dadurch in dem ganzen durchströmten Raume bewirkt wird. Da wir nach den Versuchsergebnissen von vornherein vermuthen müssen, dass sich diese Schwankung mit äusserst grosser Geschwindigkeit fortpflanzt, genügt es, den Vorgang innerhalb einer Zeit zu betrachten, die so klein ist, dass dagegen selbst die Zeitdauer zwischen zwei Zusammenstössen verschwindet.

Die Bezeichnungen der den Stromschwankungen entsprechenden Grössen sollen von den früher gebrauchten gleichartigen durch Accente unterschieden werden. Der Stromcomponente i_x , welche der Zeit nach constant ist, superponirt sich also die variable Intensität i'_x . Ebenso ist φ' die Variation des Potentials φ , welche durch die Störung und die durch sie veranlasste Stromschwankung zu Stande kommt.

An Stelle der Gl. (6) tritt jetzt:

$$(11) \quad \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi'}{\partial x}.$$

Denn während des sehr kleinen Zeitraumes, in dem der Verlauf der Stromschwankung untersucht werden soll, bleibt das zweite Glied auf der rechten Seite der Gl. (6), welches die Wirkung der vereinzelt vorkommenden Zusammenstösse berücksichtigt, unendlich klein gegenüber dem ersten. Da i'_x in leicht ersichtlicher Weise von u' abhängt, ergibt sich aus Gl. (11) mit Benutzung des durch Gl. (10) definirten Werthes γ :

$$(12) \quad \frac{\partial i'_x}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial i'_y}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad \frac{\partial i'_z}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial \varphi'}{\partial z}.$$

Differentiirt man der Reihe nach diese Gleichungen nach x, y, z und addirt, so erhält man:

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial i'_x}{\partial x} + \frac{\partial i'_y}{\partial y} + \frac{\partial i'_z}{\partial z} \right\} = -\gamma \Delta^2 \varphi'.$$

Der Klammerwerth auf der linken Seite stellt aber den

negativen Differentialquotienten der Dichte ρ' nach der Zeit dar, während man für die rechte Seite den aus der Laplace'-Poisson'schen Gleichung folgenden Werth einsetzen kann. Man erhält hierdurch:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = -4\pi\gamma \cdot \rho'.$$

Die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$(15) \quad \rho' = U_1 \cos(t\sqrt{4\pi\gamma}) + U_2 \sin(t\sqrt{4\pi\gamma}),$$

worin U_1 und U_2 von der Zeit unabhängige Functionen der Coordinaten sind.

Die Gleichung (15) spricht aus, dass sich die Störung in Form einer Welle ausbreitet. Für die Schwingungsdauer t_0 einer Welle erhält man:

$$(16) \quad t_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Oben ergab sich, dass man γ höher als $75 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-2}$ setzen muss. Demnach ist der höchste Werth, den man vorläufig für t_0 setzen kann:

$$t_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ sec},$$

jedenfalls also nur ein ziemlich kleiner Bruchtheil der mittleren Zeitdauer zwischen zwei Zusammenstößen.

Um aus der Schwingungsdauer auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit schliessen zu können, bedarf man noch eines Kriteriums für die Wellenlänge. Durch die hier dargelegte Theorie wird ein solches nicht gegeben; vielmehr wird derselbe Gasraum fähig sein, Stromschwingungen von verschiedener Wellenlänge fortzupflanzen, je nach der Art der Erregung.

Es liegt nahe, die Stromschwankungen in Parallele zu stellen mit den Schallschwingungen. Der Schall pflanzt sich dadurch fort, dass die von demselben afficirten Molecüle beim Anstosse ihren Nachbarmolecülen einen Theil des der Schallschwingung entsprechenden Momentes abgeben. Bei der Stromschwankung beginnt dagegen der Einfluss der afficirten Molecüle auf ihre Nachbarmolecüle schon lange vor dem Zusammenstosse und bei den minimalsten Verrückungen. Die Gleichung (16) und der aus ihr gefundene Zahlenwerth zeigen, dass die Stromschwankung schon um eine Anzahl von Wellenlängen vorangeschritten ist, bis jedes Molecül

durchschnittlich einmal zum Anstosse gelangt. Daraus erklärt sich die viel grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stromschwankung gegenüber jener des Schalles.

Im Gegensatze zur Fortpflanzung des Schalles und jener des Lichtes ist ein Gasraum von gegebener Zusammensetzung nur zur Fortpflanzung von Stromschwankungen gleicher Schwingungsdauer fähig. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit muss daher für verschiedene Wellenlängen verschieden gross ausfallen. Offenbar entsprechen indessen relativ kleinen Wellenlängen mit Rücksicht auf Gleichung (16) schon beträchtliche Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Wer dünkte bei der Discussion dieser Stromschwankungen nicht an die geschichtete Entladung? Es liegt zwar keineswegs in meiner Absicht, hier die Frage zu erörtern, wie durch die Bewegungen der geladenen und neutralen Moleküle die Lichterscheinungen im Entladungsraume bedingt werden. Die Analogie jener Schichten mit den Phasen einer Schwingungsbewegung ist aber eine so offenbare und auch schon längst hervorgehobene, dass ich nicht umhin kann, auf dieselbe hier Rücksicht zu nehmen. Es soll davon aber nur mit dem ausdrücklichen Vorbehalte Gebrauch gemacht werden, dass die Widerlegung der gegen die Convectionshypothese vorgebrachten Einwände von der Benutzung dieses Beweismittels ganz unabhängig ist.

Setzt man dem Schichtenabstande ungefähr entsprechend die Wellenlänge der behandelten Stromschwankung gleich 5 cm, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit grösser als $25 \cdot 10^7$ cm oder mehr als 300 Meilen in der Secunde. Die Geschwindigkeiten der leuchtenden Gasmoleküle sind hiergegen unvergleichlich gering und nicht grösser, als sie die kinetische Gastheorie für die betreffende Temperatur erfordert.

Für eine Welle, welche sich in der Richtung der X-Axe ausbreitet, erhält man noch:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} i'_x &= c_1 + w \left\{ c_2 \cos \left(x \sqrt{\frac{4\pi\gamma}{\omega^2}} \right) + c_3 \sin \left(x \sqrt{\frac{4\pi\gamma}{\omega^2}} \right) \right\} \cos (t \sqrt{4\pi\gamma}), \\ &\quad + w \left\{ c_4 \cos \left(x \sqrt{\frac{4\pi\gamma}{\omega^2}} \right) + c_5 \sin \left(x \sqrt{\frac{4\pi\gamma}{\omega^2}} \right) \right\} \sin (t \sqrt{4\pi\gamma}), \end{aligned} \right.$$

worin die c constante Coëfficienten und w die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeuten.

f. Schlussbemerkungen.

Durch die vorstehende Analyse habe ich meinen Zweck erreicht, welcher nur darin bestand, den Nachweis zu führen, dass die Annahme der convectiven Entladung mit den bisher gefundenen Thatsachen keineswegs im Widerspruche steht, vielmehr besser damit zu vereinen ist, als jede andere Theorie. Ich möchte hier nur noch hinzufügen, dass, soweit ich sehe, alle Schwierigkeiten, welche der Erklärung jener Phänomene bisher entgegenstanden, hinwegfallen, wenn man auf die frühere mechanische Theorie der Herren G. Wiedemann und Rühlmann in ihren Grundzügen zurückgeht und sich zugleich einigen der von Hrn. A. Schuster vertretenen Anschauungen anschliesst. In der letzteren Hinsicht glaube ich zwar nicht, dass die wesentlich electrolytische Leitung der Gase durch die Thatsachen bewiesen oder auch nur sehr wahrscheinlich gemacht sei. Indessen sprach bei der hier durchgeführten Untersuchung nichts gegen und manches für jene Annahme; ich habe mich daher bemüht, jene Frage überall als eine offene zu behandeln.

Mehrere Ausführungen des Hrn. Schuster sind indessen, wie mir scheint, nicht mit Nothwendigkeit an die Voraussetzung der electrolytischen Leitung gebunden. Dies gilt besonders von den Bemerkungen über Stromverzweigungen, transversale Leitungsfähigkeit, Widerstand des dunklen Kathodenraumes und das Auftreten der Dunkelfläche (dark area).

Nach alledem halte ich die Auffassung der Gasentladung als einer wesentlich convectiven für die richtige Erklärung der Thatsachen, sei es nun, wie ich zunächst annehmen möchte, dass die unzersetzten Molecüle, sei es, dass die durch Electrolyse aus denselben hervorgehenden Ionen die Vehikel der Electricität bilden.

Leipzig, im Januar 1888.