# 9.

# Neue Theoreme der höheren Arithmetik.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein*, Privatdocent zu Berlin.)

---

Angeregt durch die gewichtigen Worte in No. 266. von *Gaufs* „Disquisitiones Arithmeticae," unternahm ich vor längerer Zeit eine ausführliche Untersuchung der quadratischen Formen mit mehreren Variabeln; die Früchte meiner Forschungen in diesem grofsen Felde zu publiciren bin ich bis jetzt theils durch andere Arbeiten, theils durch den Wunsch nach gröfserer Vereinfachung der Theorieen abgehalten worden. Ehe ich daher an die Herausgabe einer umfangreichen Abhandlung über diesen Gegenstand gehe, glaube ich den Freunden der Zahlentheorie vielleicht keinen unangenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich ihnen einstweilen einige neue Sätze mittheile, welche sich hauptsächlich auf positive ternäre quadratische Formen beziehen.

Die Grundzüge zu einer Theorie der ternären Formen, welche später von *Seeber* in einem besondern Werke weiter verfolgt worden sind, finden sich in Disq. Arithm. in der zweiten Hälfte der fünften Section von No. 266. an. Es ist sehr wahrscheinlich, dafs *Gaufs* seine Untersuchungen viel weiter ausgeführt hat, als er am angeführten Orte sehen läfst; indessen führt er uns dort die ternären Formen nicht um ihrer selbst willen vor, sondern nur in einer Digression und als Hülfsmittel für die Theorie der binären Formen, um diese letztern durch jene näher zu beleuchten. — Die Nomenclatur, welcher sich *Seeber* in seinem Werke bedient, weicht in einigen Puncten von der *Gaufsischen* ab; ich werde hier bei derjenigen bleiben, welche *Gaufs* eingeführt hat. Hiernach ist eine ternäre quadratische Form oder schlechthin eine ternäre Form ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'xx''+2b''xx' = f,$$

in welchem die Coëfficienten $a$, $a'$, $a''$, $b$, $b'$, $b''$ gegebene, die Gröfsen $x$, $x'$, $x''$ unbestimmte oder variable ganze Zahlen vorstellen. Die Form

$$Ax^2+A'x'^2+A''x''^2+2Bx'x''+2B'xx''+2B''xx' = F,$$

in welcher

$$A = b^2-a'a'',\quad A' = b'^2-aa'',\quad A'' = b''^2-aa',$$
$$B = ab-b'b'',\quad B' = a'b'-bb'',\quad B'' = a''b''-bb'$$

ist, nennt *Gaufs* die zugeordnete Form der Form $f$. Die Determinante der Form $f$ ist die Coëfficientenverbindung

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D;$$

sie ist zugleich die negative Determinante des linearen Systems

$$\begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix},$$

welches ich das Formensystem der Form $f$ nenne; das umgekehrte System des Formensystems mit der Determinante des letztern, d. h. mit $-D$, multiplicirt, liefert das Formensystem der zugeordneten Form; die Determinante der zugeordneten Form ist $= D^2$, und die zugeordnete von der zugeordneten $= Df$, d. h. sie geht aus $f$ hervor, wenn man alle sechs Coëfficienten mit $D$ multiplicirt. Wenn $f$ durch eine lineare Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} = S,$$

deren Coëfficienten ganze Zahlen und deren Determinante $= +1$ ist, in eine andere ternäre Form $f'$ übergeht, wodurch zugleich der Rückweg von $f'$ zu $f$ durch das umgekehrte System des Systems $S$, welches ebenfalls ganze Coëfficienten hat, gegeben ist, so heifsen die beiden Formen $f$ und $f'$ *äquivalent*. Ihre zugeordneten Formen $F$ und $F'$ sind dann ebenfalls äquivalent und man erhält die Substitution von $F$ in $F'$, wenn man das System $S$ umkehrt und dann transponirt, d. h. die Verticalreihen zu Horizontalreihen und die Horizontalreihen zu Verticalreihen macht. Äquivalente Formen haben dieselbe Determinante, denn das Formensystem von $f'$ wird erhalten, wenn man das transponirte System des Systems $S$, das Formensystem von $f$ und das System $S$ selbst in der genannten Reihenfolge mit einander zu einem neuen Systeme zusammensetzt. Zu diesen algebraischen Beziehungen ist noch hinzuzufügen, dafs für äquivalente Formen derselbe gröfste gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der Formensysteme Statt findet. Alle unter einander äquivalenten Formen werden jedesmal in eine Classe zusammengefafst; alle Formen einer Classe haben dieselbe Determinante; aber dieser Satz gilt nicht umgekehrt, sondern zu jeder Determinante gehört eine gewisse Anzahl Classen ternärer Formen, welche, wie *Gaufs* bewiesen hat, immer endlich ist. Dieses letztere Resultat gilt übrigens, um es beiläufig zu sagen, allgemein, und wenn man den Begriff des Formensystems, der Determinante und der Äquivalenz auf

Formen mit $n$ Variabeln erweitert, so gehört für quadratische Formen mit $n$ Variabeln zu jeder Determinante eine *endliche* Anzahl Classen.

Die Eintheilung der ternären Formen in bestimmte und unbestimmte und die der erstern in positive und negative ist nicht auf ganze Werthe der Coëfficienten und der Variabeln beschränkt. In der That läfst sich jede ternäre Form mit reellen Coëfficienten und reellen Variabeln durch eine lineare Substitution mit *reellen* Coëfficienten in eine Form transformiren, wie

$$\varepsilon\xi^2+\varepsilon'\xi'^2+\varepsilon''\xi''^2,$$

in welcher $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ den Werth $\pm 1$ haben. Sind nun $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ alle $=+1$, so ist die Form, von welcher man ausging, eine positive; sind $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ alle drei $=-1$, so ist sie eine negative; in den sechs übrigen Fällen ist sie eine unbestimmte Form. Diese Betrachtung gilt ebenfalls allgemein; nämlich jede quadratische Form mit $n$ reellen Variabeln und reellen Coëfficienten kann durch eine reelle Substitution in ein Aggregat von $n$ Quadraten transformirt werden, welche entweder durch $+$ oder durch $-$ verbunden sind; sind nun hier alle $n$ Quadrate mit $+$ oder alle $n$ mit $-$ behaftet, so ist die Form eine bestimmte, im ersten Fall eine positive, im zweiten eine negative; finden dagegen Zeichenwechsel Statt, so ist sie eine unbestimmte Form und man kann für letztere noch Unter-Abtheilungen nach der Anzahl der Zeichenwechsel machen; jede unbestimmte Form kann man übrigens auf diese Art in ein Aggregat von bestimmten Formen verwandeln, deren Anzahl bei ternären Formen immer $=2$ ist. Durch Betrachtung der positiven Formen sind zugleich die negativen erledigt, welche aus jenen hervorgehen, wenn man alle Coëfficienten mit $-1$ multiplicirt. Characteristische Eigenschaften der positiven Formen sind (aufserdem dafs sie für alle reellen Werthe der Variabeln keine negativen Werthe annehmen können): dafs alle reellen Werthe der Variabeln, für welche eine positive Form einen und denselben Werth annimmt, zwischen ganz bestimmten Grenzen eingeschlossen sind, und dafs sie den Werth Null nur dann erhalten können, wenn sämmtliche Variabeln $=0$ gesetzt werden.

Wenn man in das Substitutionssystem $S$ für die Coëfficienten $\alpha$, $\alpha'$ etc. alle möglichen ganzen Werthe successive einführt, welche die Determinante des Systems $=+1$ machen, und der Reihe nach alle daraus hervorgehenden Transformationen auf eine gegebene Form $f$ anwendet, so wird man nicht stets lauter verschiedene Formen erhalten, sondern die Form $f$ wird wiederkommen, und es werden überhaupt Formen wieder erscheinen, welche schon einmal da waren; man erhält durch diese Operation alle Formen der Classe $K$

der Form $f$, aber jede nicht einmal, sondern mehrmals; ja selbst unendlich oft. Wenn irgend eine dieser Formen nur eine *endliche* Anzahl mal erscheint, was bei positiven (negativen) Formen Statt findet, so erscheint jede andere Form derselben Classe eben so oft, nämlich so oft, als sich jede Form dieser Classe in sich selbst transformiren läfst; es sei $\delta$ mal. Nimmt man nun eine Form irgend einer andern Classe $K'$ und wendet auf sie ebenfalls alle möglichen Substitutionen $S$ an, so erhält man jede Form dieser Classe $\delta'$ mal, wenn $\delta'$ die Anzahl der Arten bezeichnet, auf welche sich jede Form der Classe $K'$ in sich selbst oder in jede andere Form derselben Classe transformiren läfst. Die Substitutionen $S$ sind für beide Classen dieselben, dagegen entspricht in der Classe $K$ je $\delta$ Substitutionen *nur eine einzige Form*, während in der Classe $K'$ je $\delta'$ Substitutionen *nur eine Form* entspricht. Obgleich daher jede Classe in der That unendlich viele Formen enthält, so kann man doch, wenn $\delta$ und $\delta'$ verschieden sind, nicht mit Recht sagen, dafs die Classe $K$ ebenso viele Formen enthielte, als die Classe $K'$; im Gegentheil kann man behaupten, dafs die Formen-Anzahlen dieser beiden Classen im reciproken Verhältnifs der beiden Zahlen $\delta$ und $\delta'$ stehen und dafs der reciproke Werth von $\delta$ das wahre *Maafs* für die Totalität der Formen einer *Classe*, gewissermafsen für die *Dichtigkeit* der Classe sei. Man thut daher Unrecht, wenn man bei der Vergleichung oder Zusammenstellung mehrerer Classen, jede Classe als eine Einheit zählt, weil, um mich so auszudrücken, nicht jede Classe gleiche Berechtigung hat; man mufs vielmehr jede Classe nach ihrem *Maafse* $\frac{1}{\delta}$ zählen. Durch die Einführung dieses neuen Begriffs des *Maafses* der Classen, wird die ganze Theorie der ternären und die aller übrigen quadratischen Formen aufserordeutlich vereinfacht und, wie ich zu glauben wage, verschönert, während ohne denselben kaum irgendwie vorwärts zu kommen wäre. Bei den binären Formen haben alle Classen *dasselbe* Maafs, gleiche Dichtigkeit; wenigstens gilt dies für alle Classen derselben Ordnung und mit wenigen Ausnahmen auch für die Vergleichung von Classen aus verschiedenen Ordnungen *); daher kommt es, dafs man bei den binären Formen die Maafse der Classen ganz vernachlässigen und jede Classe als Einheit zählen kann, denn der Begriff des Maafses ist nichts Absolutes, sondern hat nur relativen Sinn bei der Vergleichung der Classen unter einander, und man kann statt der Gröfse $\frac{1}{\delta}$ auch $\frac{c}{\delta}$

*) Diese Ausnahmefälle finden Statt, wenn die Determinante ein Quadrat, oder das Dreifache eines Quadrats ist. Vergl. Disq. Arithm. No. 179.

für das Maafs der Classen nehmen, wenn $c$ eine Constante vorstellt, welche für alle Classen dieselbe bleibt.

Unter dem Maafse des Complexes mehrerer Classen verstehe ich die Summe der Maafse aller diesen Complex constituirenden Classen: z. B. unter dem Maafse aller Classen, welche zu derselben Determinante gehören, die Summe der Maafse aller dieser Classen; unter dem Maafse einer Ordnung, eines Genus, die Summe der Maafse aller Classen, welche diese Ordnung, resp. dieses Genus ausmachen. Das Hauptproblem, welches ich mir nun bei meinen Untersuchungen gestellt habe, ist, um es gleich von vorn herein zu sagen, die Erforschung des Maafses der Gesammtheit der Classen, welche zu einer Determinante gehören, und es ist mir gelungen, dieses Maafs für alle Determinanten durch allgemeine Formeln auszudrücken. Will man, was vielleicht manchem Leser bequemer erscheint, die Gröfse, welche ich bestimmt habe, unabhängig von dem neuen Begriffe des Maafses der Classen definiren, so mufs man sagen, sie werde erhalten, wenn man ein System nichtäquivalenter ternärer Formen $f, f', f''$, etc. für eine gegebene Determinante $D$ aufstellt, zu jeder dieser Formen die Anzahl ihrer Transformationen $\delta, \delta', \delta'', \ldots.$ in sich selbst berechnet und die Summe der reciproken Werthe dieser Anzahlen, also die Summe

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}+\frac{1}{\delta''}+\text{ etc.}$$

nimmt. Da es mir in dieser Notiz nicht auf Erschöpfung des Gegenstandes ankommt, so will ich annehmen, die Determinante sei *ungerade;* dadurch vermeide ich die Eintheilung der Formen in eigentliche und uneigentliche, welche nur für gerade Determinanten Statt findet. Ehe ich jedoch zu der Darstellung der Theoreme übergehe, welche den Hauptgegenstand dieser Note bilden, mufs ich zuvor die Zusammenfassung der zu derselben Determinante gehörigen Classen in Ordnungen vortragen.

## Eintheilung in Ordnungen.

Das Princip, auf welchem die Eintheilung in Ordnungen bei den ternären Formen beruht, ist wesentlich verschieden von demjenigen bei den binären Formen. Wenn man nur solche Formen betrachtet, deren Coëfficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, was wir von jetzt ab durchweg thun wollen, so fällt die Eintheilung in Ordnungen bei den binären Formen ganz weg, und es bleibt nur die Unterscheidung der eigentlichen Formen von den uneigentlichen (Disq. Arithm. No. 226, 227). Bei den ternären Formen bleibt selbst dann noch, wenn man nur primitive Formen betrachtet, die Eintheilung in Ordnungen und beruht hier auf einem ganz neuen Eintheilungsgrunde. Wenn die Coëfficienten einer ternären Form $f$ ohne gemeinschaftlichen Theiler angenommen werden, so können immer noch die Coëfficienten ihrer zugeordneten Form $F$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher auf keine Art entfernt werden kann; es sei $\Omega$ der gröfste (positive) gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der Form $F$, so bleibt $\Omega$ für alle Formen $f$ einer Classe derselbe, da ja die zugeordneten Formen äquivalenter Formen ebenfalls äquivalent sind und deshalb denselben gröfsten gemeinschaftlichen Theiler ihrer Coëfficienten haben; jeder Classe entspricht also ein ganz bestimmter Werth von $\Omega$, den ich, um abzukürzen, den zugeordneten Factor dieser Classe nennen will; und man wird alle Classen, welchen derselbe Factor, d. h. derselbe gröfste gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der zugeordneten Formen entspricht, in eine Ordnung zusammenfassen können, so dafs sich dann alle zu derselben Determinante $D$ gehörigen Classen nach den verschiedenen Werthen, welche der zugeordnete Factor $\Omega$ erhalten kann, in eine Anzahl von Ordnungen zerlegen lassen. Sehen wir, welche Werthe dieser zugeordnete Factor für eine gegebene ungerade Determinante $D$ annehmen kann. Da es sich hier nur um positive Formen handelt, so ist $F$ negativ. Man setze $F = -\Omega\mathfrak{F}$, so wird $\mathfrak{F}$ eine positive und primitive Form. Die zugeordnete Form von $-\Omega\mathfrak{F}$ ist gleich dem Producte aus $\Omega^2$ und der zugeordneten von $\mathfrak{F}$; andrerseits ist die zugeordnete von $F$ gleich $Df$, und da $f$ primitiv angenommen worden ist, so mufs $\Omega^2$ in $D$ aufgehen; $\Omega^2$ mufs also quadratischer Theiler von $D$ sein: wenn also $D$ keine quadratischen Theiler hat, so existirt nur eine Ordnung, nämlich die Ordnung $\Omega = 1$. Es sei im Allgemeinen, da $D$ negativ ist,

$$D = -\Omega^2\Delta:$$

dann ist offenbar die zugeordnete von $\mathfrak{F}$ gleich $-\Delta f$, deren Coëfficienten den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler $\Delta$ haben, und die Determinante von $\mathfrak{F}$ ist $-\Delta^2\Omega$, so dafs einerseits die Zahlen $\Omega$ und $\Delta$, andrerseits die Formen $f$ und $\mathfrak{F}$ in Reciprocität zu einander stehen. Die Wurzeln aller quadratischen Theiler von $D$ können also Werthe von $\Omega$ sein; aber es folgt daraus noch nicht, dafs für alle diese Werthe von $\Omega$ wirklich Ordnungen existiren; die Wahrheit dieses Satzes, dafs jedem jener Werthe von $\Omega$ eine Ordnung entspricht, folgt erst daraus, dafs ich das Maafs für alle Ordnungen erforscht und dasselbe niemals gleich Null gefunden habe.

Wenn nun zunächst $D$ ein Product aus lauter ungleichen Primzahlen und $= -\Delta$ ist, so existirt für eine solche Determinante nur eine einzige Ordnung und deren Maafs ist

$$= \frac{2\Delta-1}{24} = \tfrac{1}{12}\Delta - \tfrac{1}{24}.$$

Man kann dies Resultat auch in folgender Art aussprechen:

„Wenn $\Delta$ ein positives Product aus lauter ungleichen Primfactoren ist, und man sucht für alle nichtäquivalenten positiven ternären Formen mit der Determinante $-\Delta$ die Anzahl ihrer Transformationen in sich selbst, so ist die zwölffache Summe der reciproken Werthe dieser Transformationszahlen, um $\frac{1}{2}$ vermehrt, gleich $\Delta$, d. h. gleich der negativen Determinante."

Die Induction an einigen Beispielen wird dies deutlicher machen. Für die Determinante $-1$ giebt es nur die eine Form $x^2+y^2+z^2$, deren Transformationszahl 24 beträgt, und es ist $\frac{12}{24}+\frac{1}{2}=1$. Für die Determinante $-3$ existiren die beiden Formen $\begin{pmatrix}1, 1, 3\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1, 2, 2\\ 1, 0, 0\end{pmatrix}$ mit den Transformations-Anzahlen $\delta=8$, $\delta'=12$, und es ist in der That

$$12(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{12})+\tfrac{1}{2} = 3;$$

während für die Determinante $-5$ die Transformations-Anzahlen 8 resp. 4 der beiden Formen $\begin{pmatrix}1, 1, 5\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1, 2, 3\\ 1, 0, 0\end{pmatrix}$, $12(\frac{1}{8}+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}=5$ ergeben. Zur Determinante $-7$ gehören drei Classen, welche durch die einfachsten Formen $\begin{pmatrix}1, 1, 7\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 4\\ 1, 0, 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 3\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$ repräsentirt werden können; die erste läfst sich 8mal, die zweite 4mal, die dritte 6mal in sich selbst transformiren und es ist $12(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6})+\frac{1}{2} = 12\left(\frac{3+6+4}{24}\right)+\frac{1}{2}=7$.

Im Allgemeinen habe ich aber zur Bestimmung des Maafses für alle Ordnungen folgendes Theorem gefunden, welches das obige als speciellen Fall einschliefst.

Theorem.

***„Es sei $D=-\Omega^2\Delta$ irgend eine negative ungerade Determinante, aus welcher irgend ein quadratischer Theiler $\Omega^2$ herausgezogen ist. Bezeichnet $R$ den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler von $\Omega$ und $\Delta$, und $r$, $r'$, $r''$, etc. die verschiedenen Primfactoren von $R$, so ist das Maafs $\mathfrak{M}$ derjenigen Ordnung positiver ternärer Formen für die Determinante $D$,***

*welcher der Factor $\Omega$ zugeordnet ist,*

$$= \tfrac{1}{12}\Omega\Delta\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{1}{r'^2}\right)\left(1-\frac{1}{r''^2}\right)\ldots,$$

*wenn $R$ kein Quadrat ist; ist dagegen $R$ ein Quadrat, so gilt folgende Formel:*

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{24}(2\Omega\Delta - Q)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{1}{r'^2}\right)\left(1-\frac{1}{r''^2}\right)\ldots,$$

*wo $Q$ das gröfste in $\Omega\Delta$ aufgehende Quadrat bedeutet.*"

Wenn $\Omega$ und $\Delta$ relative Primzahlen zu einander sind, so ist $R=1$ zu nehmen, und dann hat man $\mathfrak{M}=\frac{1}{24}(2\Omega\Delta-Q)$; denn $R=1$ ist ein Quadrat und es gilt also der zweite Fall.

Beispiel. Für die Determinante $-9$ existiren zwei Ordnungen, da 9 die beiden quadratischen Theiler 1 und $3^2$ enthält. Die erste Ordnung, welcher der Factor 1 zugeordnet ist, d. h. für welche $\Omega=1$, $\Delta=9$ ist, enthält zwei Classen, welche durch die Formen

$$\begin{pmatrix}1,1,9\\0,0,0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1,2,5\\1,0,0\end{pmatrix}$$

repräsentirt werden können; ihre Transformations-Anzahlen sind 8 resp. 4 und ihre Maafse $\frac{1}{8}$ resp. $\frac{1}{4}$, also ist das Maafs dieser Ordnung $=\frac{3}{8}$. Um die Richtigkeit der Formel zu prüfen, hat man zu bedenken, dafs hier $R=1$ ist, also der zweite Fall des Theorems gilt, und dafs $Q=9$ ist, weil $\Omega\Delta=9$ das gröfste Quadrat 9 enthält; die Formel giebt demnach $\mathfrak{M}=\frac{1}{24}(2\cdot9-9)$ $=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$; was mit der Beobachtung stimmt. — Die zweite Ordnung, welcher $\Omega=3$, $\Delta=1$ entspricht, enthält die beiden Formen

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix}1,3,3\\0,0,0\end{pmatrix} & \text{und} & \begin{pmatrix}2,2,3\\0,0,1\end{pmatrix};\\ \delta=8 & & \delta=12\end{matrix}$$

ihr Maafs beträgt $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$. In Rücksicht auf die Formel gilt wieder der zweite Fall, weil $\Omega=3$ und $\Delta=1$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, also $R=1$ ist; ferner ist $Q=1$, da $\Omega\Delta=3$ keinen quadratischen Theiler hat, die Formel $\mathfrak{M}=\frac{1}{24}(2\Omega\Delta-Q)$ giebt also $\mathfrak{M}=\frac{1}{24}(2\cdot3-1)=\frac{5}{24}$; wie erforderlich. Es ist mir leider nicht möglich ein Beispiel beizubringen, welches sich auf den ersten Fall des Theorems bezöge, in welchem $R$ kein Quadrat ist, denn die Tabelle von *Seeber*, aus welcher die Formen entnommen sind *), obwohl sie bis 100 zu gehen scheint, geht doch in der That nur

*) Jedoch mit Übertragung auf die *Gaufsische* Bezeichnung.

bis zur Determinante $-25$; dies entspringt aus der abweichenden Definition, welche *Seeber* von einer Determinante gegeben hat; es wäre sehr zu wünschen, dafs ein geschickter Rechner es unternähme die *Seeber*sche Tabelle fortzusetzen. Die Transformations-Anzahlen der Formen, deren reciproke Werthe die Maafse der einzelnen Classen sind, finden sich natürlich nicht in der *Seeber*schen Tabelle; ich habe eine sehr einfache und expeditive Methode gefunden, nach welcher ich diese Anzahlen berechne, ohne die Transformationen selbst zu kennen. — Obgleich es mir an einem beobachteten Beispiel für den ersten Fall des allgemeinen Theorems mangelt, so will ich doch, um das Theorem in ein helleres Licht zu setzen, ein Beispiel nach der Theorie berechnen, welches eine gröfsere Mannigfaltigkeit darbietet. Ich wähle für die Determinante $-675 = -25 \cdot 27$ diejenige Ordnung, welcher der Factor 3 zugeordnet ist; ich setze also $\Omega = 3$ und $\Delta = 75$; hier ist $R = 3$, $r = 3$, und das Theorem giebt $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 75 (1 - \frac{1}{9}) = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 75 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 25}{12} = \frac{50}{3}$, so dafs also $\frac{50}{3}$ das Maafs derjenigen Ordnung für die Determinante $-675$ ist, welcher der Factor 3 zugeordnet ist. — Man zieht aus dem allgemeinen Theorem leicht die Folgerung, dafs diejenige Ordnung, welche zur Determinante $-\Omega^2 \Delta$ und zum Factor $\Omega$ gehört, dasselbe Maafs hat, wie diejenige Ordnung, welcher zur Determinante $-\Delta^2 \Omega$ und zum Factor $\Delta$ gehört, was auch a priori evident ist, und wir sehen zugleich, dafs nicht sowohl die Zahl $D$, als vielmehr die Zahl $\Omega \Delta$ die eigentliche Bestimmungsgröfse für ternäre Formen bildet, und dafs letztere sehr passend statt ersterer als Determinante eingeführt werden könnte.

Es existiren übrigens für gerade Determinanten ganz ähnliche Sätze, wenn man die eigentlichen und uneigentlichen Formen unterscheidet; wie schon weiter oben angedeutet worden ist.

## Eintheilung in Genera.

Die Unter-Abtheilung der Ordnungen in Genera ist bei den ternären Formen weit mannigfaltiger, als bei den binären. Bei den letztern geschieht die Eintheilung nach den quadratischen Relationen, welche die durch die Formen darstellbaren Zahlen zu den verschiedenen Primtheilern der Determinante haben, und nach den quadratischen Relationen derselben zur Vier oder zur Acht, wenn diese Statt finden. Bei den ternären Formen hat man nicht allein die quadratischen Relationen der Formen selbst, sondern auch diejenigen ihrer zugeordneten Formen zu betrachten, wenn man eine vollständige und erschöpfende

Eintheilung in Genera erlangen will. Es sei $D = -\Omega^2 \Delta$ die (ungerade) Determinante einer gegebenen ternären Ordnung, welcher der Factor $\Omega$ zugeordnet ist. Die Eintheilung dieser Ordnung in Genera beruht auf folgenden Principien.

1. Zu jedem Primtheiler $\omega$ von $\Omega$ sind die durch eine Form $f$ der Ordnung darstellbaren und nicht durch $\omega$ theilbaren Zahlen entweder sämmtlich quadratische Reste, oder sämmtlich quadratische Nichtreste; ich schreibe der Form $f$ im ersten Falle den Character $f\mathfrak{R}\omega$, $\left(\frac{f}{\omega}\right) = 1$, im zweiten Falle den Character $f\mathfrak{R}\omega$, $\left(\frac{f}{\omega}\right) = -1$ zu. Alle Formen der Classe, welche $f$ enthält, haben mit $f$ denselben Character, und dieser kann also auch der ganzen Classe zugeschrieben werden.

2. Wenn durch $F = -\Omega\mathfrak{F}$ die zugeordnete Form der Form $f$ bezeichnet wird, so ist $\mathfrak{F}$ primitiv und positiv, und die durch $\mathfrak{F}$ darstellbaren und durch irgend einen Primtheiler $d$ von $\Delta$ nicht theilbaren Zahlen sind zu diesem Primtheiler $d$ entweder sämmtlich quadratische Reste, oder sämmtlich Nichtreste. Ich schreibe je nach diesen beiden Fällen der Form $f$ die zugeordnete quadratische Relation oder den zugeordneten Character $\mathfrak{F}\mathfrak{R}d$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{d}\right) = 1$, oder den zugeordneten Character $\mathfrak{F}\mathfrak{R}d$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{d}\right) = -1$ zu.

3. Aufser den Primfactoren von $\Omega$ existirt keine ungerade Primzahl, zu welcher $f$ eine solche bestimmte quadratische Relation hätte, sondern in Bezug auf eine Primzahl, welche nicht in $\Omega$ aufgeht, als Modul, kann $f$ sowohl quadratische Reste, als auch Nichtreste darstellen; und aufser den in $\Delta$ aufgehenden Primfactoren, existirt keine ungerade Primzahl, zu welcher $\mathfrak{F}$ eine bestimmte quadratische Relation hätte; in Bezug auf eine solche nicht in $\Delta$ aufgehende Primzahl können die durch $\mathfrak{F}$ darstellbaren Zahlen ohne Unterschied sowohl quadratische Reste, als auch Nichtreste sein.

4. Keine ternäre Form mit ungerader Determinante stellt ausschliefslich Zahlen $4n+1$ oder ausschliefslich Zahlen $4n+3$ dar; um so weniger kann eine ternäre Form ausschliefslich Zahlen von einer der vier Formen $8n+1$, $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ darstellen; auch kann sie nicht ausschliefslich Zahlen darstellen, zu welchen $+2$ oder $-2$ quadratischer Rest oder Nichtrest wäre.

5. Jede ternäre Form in der Ordnung $\Omega, \Delta$ hat auf diese Weise zu allen Primtheilern von $\Omega$ und nur zu diesen ihre bestimmten eigenthümlichen, und zu allen Primtheilern von $\Delta$ und nur zu diesen ihre bestimmten zugeordneten Charactere. Die Gesammtheit aller dieser eigenthümlichen und aller die-

ser zugeordneten Charactere in Bezug auf die verschiedenen Primtheiler von $\Omega$ resp. $\Delta$ bildet den ***vollständigen Character*** der in Rede stehenden Form, so wie der sie enthaltenden Classe. Bezeichnet man demnach durch $\omega, \omega', \omega''$, etc. die Primfactoren von $\Omega$, welche nicht in $\Delta$ aufgehen, durch $\partial, \partial', \partial'', \ldots\ldots$ die Primfactoren von $\Delta$, welche nicht in $\Omega$ aufgehen, und durch $r, r', r'', \ldots\ldots$ die gemeinschaftlichen Factoren von $\Omega$ und $\Delta$, so wird der ***vollständige Character*** durch die Gesammtheit der Werthe folgender Symbole (*Legendre*schen Zeichen) gebildet:

$$(\sigma.)\quad \begin{cases} \left(\frac{f}{\omega}\right), \left(\frac{f}{\omega'}\right), \left(\frac{f}{\omega''}\right), \ldots\ldots, & \left(\frac{f}{r}\right), \left(\frac{f}{r'}\right), \left(\frac{f}{r''}\right), \ldots\ldots, \\ \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial'}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial''}\right), \ldots\ldots, & \left(\frac{\mathfrak{F}}{r}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{r'}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{r''}\right), \ldots\ldots, \end{cases}$$

wo jedes $\omega$ und jedes $\partial$ *einen*, jedes $r$ dagegen *zwei* Charactere entstehen läfst.

6. Die Gesammtheit aller Formen oder aller Classen, welchen derselbe vollständige Character entspricht, bildet ein Genus. Man erhält alle vollständigen Charactere der verschiedenen Genera, wenn man jedem der Symbole in dem Schema $(\sigma.)$ seine beiden Werthe $\pm 1$ ertheilt und alle Combinationen dieser Doppelwerthe bildet. Die Anzahl dieser Combinationen, also die Anzahl der Genera ist eine Potenz von 2, deren Exponent gleich ist der Anzahl aller $\omega$, plus der Anzahl aller $\partial$, plus der doppelten Anzahl aller $r$. Es ist übrigens keinesweges a priori evident, dafs jedem dieser vollständigen Charactere in der That ein Genus entspricht, aber ich habe das Maafs keines dieser Genera der Null gleich gefunden. Es geht hieraus unter andern hervor, dafs die Determinante $-1$ die einzige ist, zu welcher nur *ein* Genus ternärer positiver Formen gehört und dafs jede andere Determinante in jeder Ordnung mindestens zwei Genera enthält.

Für die Determinante $-9$ zerfällt z. B. jede der beiden Ordnungen in zwei Genera, deren jedes eine Classe enthält, so dafs die vier Classen dieser Determinante auf folgende Art eingetheilt werden:

$$D = -9$$

| $\Omega = 1$, | $\Delta = 9$ | $\Omega = 3$, | $\Delta = 1$ |
|---|---|---|---|
| $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = 1$ | $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = -1$ | $\left(\frac{f}{3}\right) = 1$ | $\left(\frac{f}{3}\right) = -1$ |
| $\begin{pmatrix}1, & 1, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 5\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1, & 3, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$ |
| $\delta = 8$ | $\delta = 4$ | $\delta = 8$ | $\delta = 12$ |

Die resp. Maafse dieser vier Genera sind $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$.

Wenn die Determinante eine negative Primzahl ist, so existiren immer nur zwei Genera; z. B. die Determinante $-7$ giebt ein Genus, für welches $\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=1$, welches zwei Classen enthält, und ein zweites, für welches $\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=-1$, mit einer Classe:

$$D = -7$$

$$\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=1} & \left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=-1 \\ \begin{pmatrix}1, & 1, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1, & 2, & 4\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix} \\ \delta = 8 & \delta = 4 & \delta = 6 \end{array}$$

Die Maafse dieser beiden Genera sind $\frac{3}{8}$ resp. $\frac{1}{6}$. In ähnlicher Art ist für die Determinanten $-3$ und $-5$:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{D=-3} & \multicolumn{2}{c}{D=-5} \\ \left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right)=1 & \left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right)=-1 & \left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right)=1 & \left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right)=-1 \\ \begin{pmatrix}1, & 1, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 2, & 2\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 1, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix} \\ \delta=8 & \delta=12 & \delta=8 & \delta=4 \end{array}$$

Im Allgemeinen, wenn $\Omega=1$ ist, so existiren nur die Relationen von $\mathfrak{F}$ zu den Primfactoren von $\Delta$ als Eintheilungsgrund für die Genera; wenn $\Delta=1$ ist, nur diejenigen von $f$ zu $\Omega$; wenn aber $\Omega$ und $\Delta$ beide von 1 verschieden sind, so vereinigen sich beide Arten von Relationen zu einem doppelten Eintheilungsgrunde.

Die Bestimmung des Maafses aller dieser Genera ist in folgendem allgemeinen Theorem enthalten:

## Theorem.

*„Es sei $D=-\Omega^2\Delta$ eine ungerade Determinante, welche den quadratischen Theiler $\Omega^2$ enthält; $\omega, \omega', \omega'', \ldots.$ seien die nicht in $\Delta$ enthaltenen verschiedenen Primfactoren von $\Omega$; $\partial, \partial', \partial'', \ldots.$ diejenigen „von $\Delta$, welche nicht in $\Omega$ aufgehen, endlich $r, r', r'', \ldots.$ die gemeinschaftlichen Primfactoren von $\Omega$ und $\Delta$. Giebt man den sämmtlichen Symbolen in dem Schema ($\sigma$.) bestimmte Werthe, so dafs man ein bestimmtes „Genus der Ordnung $\Omega, \Delta$ erhält, dessen vollständiger Character durch die „Gesammtheit jener Werthe ausgedrückt ist: so ist das Maafs eines solchen „Genus durch folgende Formel gegeben:*

$$\mathfrak{M} = \frac{\Omega\Delta}{24}(2-\varepsilon)\,\Pi\left\{\frac{\omega+\left(\frac{-\Delta f}{\omega}\right)}{2\omega}\right\}\,\Pi\left\{\frac{\partial+\left(\frac{-\Omega\mathfrak{F}}{\partial}\right)}{2\partial}\right\}\,\Pi\left\{\frac{r^2-1}{4r^2}\right\},$$

*wo* $\varepsilon = \pm 1$ *durch die Gleichung*

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\Omega-1}{2}\cdot\frac{\Delta-1}{2}}\left(\frac{-f}{\Omega}\right)\left(\frac{-\mathfrak{F}}{\Delta}\right)$$

*„bestimmt wird.“*

Die drei Multiplicationen $\Pi$ in der Formel des Theorems beziehen sich resp. auf alle $\omega$, alle $\partial$, alle $r$, welche weiter oben definirt worden sind, und es ist hierbei zu betrachten, dafs die Nenner 2 und 4, welche sich unter $\Pi$ befinden, nicht vor das Zeichen herausgesetzt werden dürfen, da sie in jedem Factor des Products vorkommen sollen. Ferner sind in der Formel $\left(\frac{-\Delta f}{\omega}\right)$ und $\left(\frac{-\Omega\mathfrak{F}}{\partial}\right)$ *Legendre*sche Zeichen, deren Werthe durch den vollständigen Character des Genus gegeben sind, denn $f$ bedeutet hier irgend eine beliebige Form des Genus, dessen Maafs man bestimmen will, und $-\Omega\mathfrak{F}$ die zugeordnete Form irgend einer solchen Form. Die Bedeutung der Symbole $\left(\frac{-f}{\Omega}\right)$ und $\left(\frac{-\mathfrak{F}}{\Delta}\right)$ in dem Werthe von $\varepsilon$ ist ebenfalls nicht zu verkennen; es sind dies verallgemeinerte *Legendre*sche Zeichen. — In die Formel für $\mathfrak{M}$ gehen also die einzelnen Charactere des Genus zu den Primzahlen $\omega$ und zu den $\partial$ ein, und auch die zu den $r$ finden sich wenigstens in dem Werthe von $\varepsilon$, den sie mitbestimmen helfen; es findet also *nicht*, wie bei den binären Formen, eine gleichförmige Vertheilung des Maafses der ganzen Ordnung auf ihre einzelnen Genera Statt, sondern eine ungleichmäfsige, indem sich im Allgemeinen das Maafs des Genus mit seinen Characteren zugleich ändert. Man kann jedoch eine Bedingung angeben, unter welcher Genera gleiches Maafs haben. Da nämlich in der allgemeinen Formel die Relationen zu den $r$ nur im Werthe von $\varepsilon$ vorkommen und sonst nicht weiter erscheinen: so wird man aus dem vollständigen Character irgend eines Genus den eines andern ableiten, welches mit jenem gleiches Maafs hat, wenn man die Relationen zu allen $\omega$ und zu allen $\partial$ ungeändert läfst und blofs die Relationen zu den $r$ ändert, letzteres mit der Rücksicht, dafs sich $\varepsilon$ nicht ändern darf, welches letztere höchstens eine einzige Bedingung zwischen den Relationen zu den $r$ geben kann. Die Anzahl der jedesmaligen Genera, welche gleiches Maafs haben, ist also entweder $2^{\mu-1}$ oder $2^{\mu}$, wenn $\mu$ die Anzahl aller $r$, und es ist zu leicht a priori anzugeben, welcher dieser beiden Fälle jedesmal Statt finden mufs, als dafs es nöthig wäre mich länger dabei aufzuhalten.

Um das Theorem an einem speciellen Falle deutlich zu machen, sei $D = -q$, wo $q$ eine ungerade Primzahl. In diesem Falle ist $\Omega = 1$, $\Delta = q$, also sind weder die $\omega$, noch die $r$ vorhanden und alle $\partial$ reduciren sich auf die einzige Primzahl $q$; ferner ist $\varepsilon = \left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)$; die Formel des Theorems giebt daher

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{48}\left\{2-\left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)\right\}\left\{q+\left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)\right\},$$

d. h. für dasjenige Genus, dessen Character $\mathfrak{F}\mathfrak{R}q$ oder $\left(\frac{\mathfrak{F}}{q}\right) = 1$ ist,

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{48}\left\{2-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}\left\{q+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\},$$

und für das andere Genus, dessen Character $\mathfrak{F}\mathfrak{N}q$, oder $\left(\frac{\mathfrak{F}}{q}\right) = -1$, ist,

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{48}\left\{2+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}\left\{q-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}.$$

Wir können die Vergleichung dieser Formel mit den obigen Beispielen für die Determinanten $-3$, $-5$ und $-7$ dem Leser überlassen.

Da nach einer Bemerkung von *Seeber* die Theorie der positiven ternären Formen für die Crystallographie von Wichtigkeit sein soll, so wünsche ich, dafs die neuen Sätze, welche mir dieser Theorie hinzuzufügen gelungen ist, für die Physik von einigem Nutzen sein mögen. Ich bitte zugleich die Crystallographen, mich in dieser Hinsicht zu belehren, damit ich mich bei meinen Untersuchungen über diesen Gegenstand ihrem Vortheil möglichst nahe anschliefsen könne.

Zum leichteren Verständnifs des hier Gesagten und für den practischen Gebrauch habe ich eine Tabelle beigefügt, welche für die dreizehn ungeraden Determinanten von $-1$ bis $-25$ die zu ihnen gehörenden Classen, in Ordnungen und Genera eingetheilt, enthält. Da es bequem ist, wenn man bei einer Form sogleich aus der blofsen Ansicht eines ihrer drei ersten Coëfficienten und eines der drei ersten Coëfficienten ihrer zugeordneten Form ihren vollständigen Character und also das Genus, in welches sie rangirt werden mufs, erkennen kann, so wird man die Classen durch solche Formen $f$ zu repräsentiren suchen, in welchen wenigstens einer der drei ersten Coëfficienten zur Determinante, oder wenigstens zu $\Omega$ relative Primzahl ist, und für welche zugleich die zugeordneten Formen $-\Omega\mathfrak{F}$ so beschaffen sind, dafs wenigstens einer der drei ersten Coëfficienten in $\mathfrak{F}$ zur Determinante, oder wenigstens zu $\Delta$ relative Primzahl ist. Entweder besitzt eine vorgelegte Form schon diese beiden Eigenschaften, oder man kann sie beide zugleich durch eine leicht zu findende Transformation in eine äquivalente Form erreichen, wenn man bedenkt, dafs irgend einer der drei ersten Coëfficienten in $f$, den man sofort zu jeder beliebigen Zahl zur relativen Primzahl machen kann, sich nicht ändert, wenn man den ihm entsprechenden Variabeln ungeändert läfst und blofs die beiden andern Variabeln transformirt: denn hierdurch erlangt man die Möglichkeit, noch aufserdem über einen der drei ersten Coëfficienten der zugeordneten Form zu disponiren. So erkennt man z. B. bei der Form $\begin{pmatrix}1, 3, 3\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}$, welche zu der Ordnung $\Omega = 3$, $\Delta = 1$ gehört, sogleich aus ihrem ersten Coëfficienten 1, dafs diese Form nur Zahlen darstellen kann, welche zu 3 quadratische Reste sind; und aus dem ersten oder zweiten Coëfficienten 2, der Form $\begin{pmatrix}2, 2, 3\\ 0, 0, 1\end{pmatrix}$, welche zu derselben Ordnung gehört, erkennt man sogleich, dafs diese Form nur Zahlen darstellen kann, welche zu 3 quadratische Nichtreste sind. Die Form $\begin{pmatrix}2, 3, & 5\\ 0, 0, & -1\end{pmatrix}$ gehört zur Ordnung $\Omega = 5$, $\Delta = 1$; ihr erster und zweiter Coëfficient 2 und 3 sind nicht durch 5 theilbar und zu 5 Nichtreste, also kann die Form überhaupt nur Zahlen $\mathfrak{N}5$, d. h. von der Form $5n \pm 2$ darstellen. Der Form $f = \begin{pmatrix}1, 2, 13\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}$, welche zur Ordnung $\Omega = 1$, $\Delta = 25$ gehört, ist die Form $\begin{pmatrix}-25, -13, -2\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}$ zugeordnet, also ist $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix}25, 13, 2\\ 1, 0, 0\end{pmatrix}$, und aus jedem der beiden Coëfficienten 13 oder 2 von $\mathfrak{F}$ erkennt man, dafs der Form $\begin{pmatrix}1, 2, 13\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}$ der Character $\mathfrak{F}\mathfrak{N}5$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right) = -1$ zugeordnet ist. — Da aus jeder vorgelegten Form ihre zugeordnete Form $F = -\Omega\mathfrak{F}$, also auch $\mathfrak{F}$ sehr leicht berechnet werden kann, so hielt ich es nicht für nöthig, die zugeordneten Formen oder die Formen $\mathfrak{F}$ in die Tabelle mit aufzunehmen. — Durch die Eintheilung in Genera wird die Lösung der Aufgabe, zu entscheiden, ob zwei vorgelegte ternären Formen mit derselben Determinante äquivalent sind, oder nicht, aufserordentlich vereinfacht: denn bevor man irgend eine andere Operation an den beiden Formen vornimmt, wird man zunächst untersuchen (was sehr leicht ist), ob sie in dasselbe Genus gehören, oder nicht; stimmen ihre vollständigen Charactere nicht vollkommen mit einander überein, so können die beiden Formen unmöglich äquivalent sein; stimmen aber ihre vollständigen Charactere überein, gehören also die Formen in dasselbe Genus, so kann es sich treffen, dafs dieses Genus nur eine Classe enthält, und dann sind die vorgelegten Formen sicher äquivalent; enthält das Genus dagegen mehrere Classen, so mufs man freilich eine andere Methode zu Hülfe nehmen. Wenn man also auf diese Weise auch nicht immer seinen Zweck erreicht, so hat das Verfahren doch jedenfalls den negativen Nutzen, dafs man sich durch dasselbe in vielen Fällen grofse Mühe ersparen kann. Unter den 33 Generibus, in welche sich die 52 Classen der Tabelle theilen, befinden sich 17, also etwa die Hälfte, in welchen nur eine Classe vorkommt, 14 Genera enthalten 2 Classen, 1 Genus enthält 3 und 1 Genus 4 Classen. Die Maafse der Genera, so wie die Anzahl der in ihnen enthaltenen Classen bilden mit steigenden Determinanten eine Progression, welche weit schneller wächst, als für die binären Formen. Die Anzahl der Determinanten, welchen eine bestimmte Classification entspricht, ist immer endlich, und im Allgemeinen kleiner als bei binären Formen.

Man bemerke noch folgende allgemeine Eigenschaft der Genera. Ich sagte oben, dafs kein Genus ausschliefslich weder Zahlen von einer der vier Formen $8n+1, 3, 5, 7$, noch ausschliefslich Zahlen von zweien dieser Formen repräsentiren könne; dagegen existiren in jeder Ordnung Genera, welche eine dieser vier Formen auf *keine Weise* repräsentiren können, während sie die drei übrigen ohne Unterschied repräsentiren, und während auch die übrigen Genera derselben Ordnung, welche diese Eigenschaft nicht besitzen, alle vier Formen ohne Unterschied darstellen. In der That findet zwischen den einzelnen Characteren, welche den vollständigen Character eines Genus in irgend einer Ordnung constituiren, entweder die Relation

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right)\left(\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) = +(-1)^{\frac{\Omega+1}{2}\cdot\frac{\Delta+1}{2}},$$

oder die entgegengesetzte Relation

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right)\left(\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) = -(-1)^{\frac{\Omega+1}{2}\cdot\frac{\Delta+1}{2}}$$

Statt. Hiernach theilen sich alle Genera derselben Ordnung in zwei Gruppen; die Genera der ersten Gruppe, für welche die erste der beiden eben geschriebenen Relationen Statt findet, stellen alle Zahlen der vier Formen $8n+1, 3, 5, 7$ dar; aber kein Genus der zweiten Gruppe kann eine Zahl darstellen, welche $\equiv 7\Delta$ (mod. 8) ist, wohl aber stellen die Genera der zweiten Gruppe ohne Unterschied Zahlen dar, welche $\equiv \Delta$, $3\Delta$ oder $5\Delta$ (mod. 8) sind. Sehr bekannt ist der specielle Fall, dafs keine Zahl $8n+7$ durch die Summe von drei Quadraten darstellbar ist; die Determinante $-1$ ist die einzige, für welche die erste Gruppe gänzlich fehlt. Für die Determinante $-3$ constituirt die Form $\begin{pmatrix}1, 1, 3\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}$, für welche $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = 1$ ist, die erste Gruppe; diese Form stellt ohne Unterschied Zahlen $8n+1, 3, 5, 7$ dar; die Form $\begin{pmatrix}1, 2, 2\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}$ dagegen, für welche $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = -1$, bildet die zweite Gruppe und stellt nur Zahlen $8n+1, 3, 7$ und nicht Zahlen $8n+5$ dar. Ich verweile nicht bei den ganz ähnlichen Unterscheidungen und den ganz ähnlichen Criterien, welche sich auf die vier Formen $8n$, $8n+2, 4, 6$ beziehen. Es sind dies Nachklänge des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in die ternären Formen hinüber, oder desjenigen Fundamentalsatzes, welcher bewirkt, dafs bei den binären Formen nur die Hälfte der a priori möglichen Genera wirklich existirt. Übrigens stellt jedes Genus sämmtliche (positive) Zahlen *wirklich* dar, welche es mit Hinsicht auf diese Criterien und mit Hinsicht auf seinen vollständigen Character darzustellen fähig ist. So stellt z. B. die Form $\begin{pmatrix}1, 1, 3\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}$ wirklich *jede* ungerade Zahl dar, und die Form $\begin{pmatrix}1, 2, 2\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}$ *jede* ungerade Zahl, welche nicht $\equiv 5 \pmod{8}$ ist; die Form $\begin{pmatrix}1, 5, 5\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}$ stellt in der That jede ungerade Zahl dar, welche zu 5 quadratischer Rest und nicht $\equiv 7 \pmod{8}$ ist; d. h. alle Zahlen $10n \pm 1$, welche nicht von der Form $8n+7$, sind durch ein Quadrat und die fünffache Summe zweier Quadrate darstellbar; die Form $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}$ endlich stellt wirklich alle ungeraden Zahlen dar, welche zu 5 quadratische Nichtreste sind, also alle Zahlen $10n \pm 3$.

Ich beschliefse dieses Résumé mit einigen speciellen Sätzen über die Darstellung von Zahlen durch quaternäre Formen. In diesen Sätzen erhalten die Variabeln der Formen alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis $\infty$, ohne weitere Beschränkung, wenn es sich um Darstellungen überhaupt handelt; bei den *eigentlichen* Darstellungen findet die Beschränkung Statt, dafs die Variabeln keinen gemeinschaftlichen Theiler haben dürfen.

„Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen irgend einer ungeraden „Zahl $m$ durch die Form $x^2+y^2+z^2+u^2$ beträgt

$$8a^{\alpha-1}(a+1)b^{\beta-1}(b+1)c^{\gamma-1}(c+1)\ldots\ldots = 8m\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ldots\ldots,$$

„wenn $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots$, und $a, b, c, \ldots\ldots$ die verschiedenen Primfactoren „von $m$ sind."

„Die Anzahl aller Darstellungen der ungeraden Zahl $m$ durch die Summe „von 4 Quadraten ist gleich der achtfachen Factorensumme dieser Zahl *)."

---

*) Dieser Satz ist nicht neu, sondern schon vor langer Zeit von *Jacobi* aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet worden.

„Es sei $m$ eine Zahl von einer der vier Formen $12n+1$, $12n+5$, „$12n+7$, $12n+11$; dann ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von „$m=a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.$ durch

$$x^2+y^2+z^2+3u^2,$$

„je nach diesen vier linearen Formen von $m$, resp. gleich dem 6fachen, 12fachen, „2fachen oder 4fachen des folgenden Products:

$$a^{\alpha-1}\left(a+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\left(\frac{c}{3}\right)\right)\ldots.\text{"}$$

„Die Anzahl aller Darstellungen von $m$ ebenfalls durch die Summe von drei Quadraten und ein dreifaches Quadrat ist je nach denselben vier linearen Formen von $m$ gleich der 6fachen, —12fachen, —2fachen, oder 4fachen Differenz zwischen der Summe derjenigen Factoren von $m$, welche eine der beiden Formen $12n\pm1$ haben, und der Summe derjenigen Factoren von $m$, welche eine der beiden Formen $12n\pm5$ haben."

„Mit Unterscheidung derselben vier linearen Formen $12n+1, 5, 7, 11$ „von $m$ ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von $m$ durch die Form

$$x^2+y^2+2z^2-2uz+2u^2$$

„resp. gleich dem 4fachen, 2fachen, 12fachen, oder 6fachen von

$$a^{\alpha-1}\left(a+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\left(\frac{c}{3}\right)\right)\ldots.,$$

„und die Anzahl aller Darstellungen von $m$ durch dieselbe Form ist resp. gleich „der 4fachen, —2fachen, —12fachen, oder 6fachen Differenz zwischen der „Summe derjenigen Factoren von $m$, welche eine der beiden Formen $12n\pm1$ „haben, und der Summe der übrigen Factoren von $m$, welche von einer der bei- „den Formen $12n\pm5$ sind."

„Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden, nicht durch „5 theilbaren Zahl $m$ durch die Form

$$x^2+y^2+z^2+5u^2$$

„beträgt, wenn $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.$, entweder

$$6\,a^{\alpha-1}\left(a+\left(\frac{a}{5}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+\left(\frac{b}{5}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+\left(\frac{c}{5}\right)\right)\ldots. \text{ oder}$$

$$4\,a^{\alpha-1}\left(a+\left(\frac{a}{5}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+\left(\frac{b}{5}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+\left(\frac{c}{5}\right)\right)\ldots.,$$

„je nachdem $m$ zu 5 quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

„Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden, nicht durch 5 theilbaren „Zahl $m$ durch die Form $x^2+y^2+z^2+5u^2$ ist, wenn $m$ zu 5 quadratischer

„Rest, gleich der 6fachen, und wenn $m$ zu 5 Nichtrest ist, gleich der $-4$fachen „Differenz zwischen der Summe derjenigen Factoren von $m$, welche zu 5 qua- „dratische Reste sind und der Summe derjenigen Factoren von $m$, welche zu 5 „Nichtreste sind."

Diese Sätze sind nur specielle Fälle eines allgemeinen Satzes, dessen Auseinandersetzung aber zu viele vorläufige Erörterungen und Definitionen erfordern würde.

Man kann nach *Jacobi's* Anleitung aus der Theorie der elliptischen Functionen, nämlich aus den in „Fundamenta nova etc." gegebenen Entwicklungen der zweiten, vierten, sechsten und achten Potenz von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ merkwürdige Theoreme über die Darstellung von Zahlen durch die Summe von zwei, vier, sechs und acht Quadraten ziehen. Bei meinen Untersuchungen werden diese Sätze durch rein arithmetische Betrachtungen bewiesen und erscheinen als specielle Fälle allgemeinerer Sätze; zugleich sieht man die Ursache ein, warum jene Entwicklungen mit der achten Potenz abgeschlossen sind, da in der That 8 die höchste Anzahl der Variabeln ist, für welche zur Determinante $-1$ nur eine Classe von Formen gehört, die durch die Summe von Quadraten repräsentirt werden kann. Aufser den bekannten Sätzen für 2 und 4 Quadrate hat man folgende:

„Die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl durch die Summe „von sechs Quadraten ist, wenn diese Zahl von der Form $4n+1$ ist, gleich „der 12fachen, und wenn sie von der Form $4n+3$ ist, gleich der $-20$fachen „Differenz zwischen der Summe der Quadrate derjenigen ihrer Factoren, welche „die Form $4n+1$ haben und der Summe der Quadrate derjenigen ihrer Fac- „toren, welche die Form $4n+3$ haben."

„Die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl durch die Summe von „acht Quadraten ist gleich der sechszehnfachen Summe der Cuben ihrer Factoren."

Für 10 Quadrate habe ich noch gefunden, „dafs die Zahlen von der Form $4n+3$ sich so oft durch 10 Quadrate darstellen lassen, als die 12fache Differenz zwischen der Summe der Biquadrate derjenigen ihrer Factoren, welche von der Form $4n+3$ sind, und der Summe der Biquadrate derer, welche von der Form $4n+1$ sind, beträgt." Aber für die Zahlen der Form $4n+1$ existirt kein ähnlicher Satz.

Ich kann nicht unterlassen, bei dieser Gelegenheit noch des grofsen Nutzens und der vortrefflichen Anleitung zu erwähnen, welche mir bei meinen Untersuchungen, aufser den Arbeiten von *Gaufs*, die von *Dirichlet*, im 19ten und 21ten Bande dieses Journals, gewährt haben.

Berlin, Februar 1847.

***Tabelle für die Eintheilung derjenigen positiven ternären Formen in Genera, welche zu den 13 ungeraden Determinanten von —1 bis —25 gehören.***

$D = -\Omega^2 \Delta$, zugeordnete Form von $f$ gleich $-\Omega \mathfrak{F}$.

| $D$ | $\Omega$ | $\Delta$ | Character von $f$ | Character von $\mathfrak{F}$ | Genera ternärer positiver Formen, durch die in ihren Classen enthaltenen einfachsten Formen repräsentirt. |
|---|---|---|---|---|---|
| —1 | 1 | 1 | . . | . . . | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| —3 | 1 | 3 | . . | $\mathfrak{N}3$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 3\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 2\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| —5 | 1 | 5 | . . | $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 5\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| —7 | 1 | 7 | . . | $\mathfrak{N}7$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 7\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 2, & 4\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}7$ | $\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ |
| —9 | 1 | 9 | . . | $\mathfrak{N}3$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 9\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 5\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | 3 | 1 | $\mathfrak{N}3$ | . . . | $\begin{pmatrix}1, & 3, & 3\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | $\mathfrak{N}3$ | . . . | $\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ |
| —11 | 1 | 11 | . . | $\mathfrak{N}11$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 11\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 3, & 4\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}11$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 6\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| —13 | 1 | 13 | . . | $\mathfrak{N}13$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 13\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}13$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 7\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\-1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ |
| —15 | 1 | 15 | . . | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 15\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 4, & 4\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 8\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 3, & 5\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| —17 | 1 | 17 | . . | $\mathfrak{N}17$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 17\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 2, & 9\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}17$ | $\begin{pmatrix}1, & 3, & 6\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ |
| —19 | 1 | 19 | . . | $\mathfrak{N}19$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 19\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 4, & 5\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\-1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}19$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 10\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 2, & 7\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ |
| —21 | 1 | 21 | . . | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}7$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 21\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}7$ | $\begin{pmatrix}1, & 3, & 7\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}7$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 11\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3, & 3, & 3\\0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}3$ $\mathfrak{N}7$ | $\begin{pmatrix}1, & 5, & 5\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 2, & 7\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ |
| —23 | 1 | 23 | . . | $\mathfrak{N}23$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 23\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 2, & 12\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 3, & 8\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1, & 4, & 6\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}23$ | $\begin{pmatrix}2, & 3, & 5\\-1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ |
| —25 | 1 | 25 | . . | $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}1, & 1, & 25\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 3, & 5\\-1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | | $\mathfrak{N}5$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 13\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2, & 2, & 9\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ |
| | 5 | 1 | $\mathfrak{N}5$ | . . . | $\begin{pmatrix}1, & 5, & 5\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ |
| | | | $\mathfrak{N}5$ | . . . | $\begin{pmatrix}2, & 3, & 5\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ |