Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen in seiner Anwendung auf eine Integralgleichung.

Von

Ernst Richard Neumann in Marburg.

Handelt es sich um die Aufgabe, aus irgendwelchen Bedingungen heraus eine Funktion auf der Kugelfläche zu bestimmen, so führt häufig die „Methode der unbestimmten Kugelfunktionen" zum Ziele, die darin besteht, daß man die Funktion zunächst als Laplacesche Reihe nach Kugelfunktionen mit unbestimmten Koeffizienten ansetzt, und diese Koeffizienten dann aus den Bedingungen des Problems heraus zu bestimmen sucht. Dabei tritt aber vielfach der Fall ein, daß man zwar zur Bestimmung der Koeffizienten eine Rekursionsformel erhält, die Anfangskoeffizienten aber, bzw. andere bei dem vorgelegten Probleme eingehende, und durch die Natur des Problems notwendigerweise völlig bestimmte Parameter zunächst unbestimmt bleiben, und doch scheinbar allen Forderungen des Problems Genüge geschieht, sobald man die rekurrent berechneten Koeffizienten benutzt. — In Wahrheit liegt in solchen Fällen nur eine formale Befriedigung der Bedingungen des Problems vor, während die so erhaltene Reihe gar nicht konvergiert und also auch nicht die gesuchte Funktion darstellen kann. Erst durch Hinzunahme der Forderung, daß die mit den rekurrent berechneten Koeffizienten gebildete Laplacesche Reihe konvergiere, werden sich die noch unbestimmt gebliebenen Größen und damit die Lösung des Problems ergeben.

Mir ist freilich in der Literatur kein Beispiel dafür bekannt, daß man nun aus dieser Konvergenzforderung heraus wirklich die Festlegung der Parameter und damit die endgültige Bestimmung der Koeffizienten durchgeführt hätte. — Ein Beispiel dieser Art will ich im folgenden geben.

Das Problem, um das es sich handelt, ist an sich nicht neu, und seine Lösung auf anderem Wege längst bekannt, weshalb weniger die Resultate als die Methoden der nachfolgenden Untersuchung Interesse beanspruchen dürften. Immerhin ergeben sich durch Vergleichung der nach der älteren und der neuen Methode gefundenen Resultate einige recht bemerkenswerte Beziehungen.

Das Problem ist das folgende: *Es sollen bei der Kugel für die Integralgleichungen, auf welche die beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie führen, die Eigenwerte und Eigenfunktionen bestimmt werden.*

Betrachtet man die Kugel als Fläche in einem gewöhnlichen Polarkoordinatensystem r, ω, φ, so ist das Problem (eben nach der Methode der unbestimmten Kugelfunktionen) leicht vollständig zu lösen. Als Eigenwerte ergeben sich die ungeraden positiven ganzen Zahlen, und zu einem solchen Eigenwerte

$$\lambda = 2\nu + 1$$

gehören alsdann genau $2\nu + 1$ linear unabhängige Eigenfunktionen, nämlich, wenn wir sie orthogonalisieren, die $2\nu + 1$ Kugelfunktionen ν-ter Ordnung

$$P_\nu(\cos\omega), \qquad P_{\nu j}(\cos\omega)\cdot\begin{pmatrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{pmatrix}^{1)} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

Sieht man hingegen die betrachtete Kugel als Fläche in einem dipolaren Koordinatensysteme l, ϑ, φ an[2]), wie man ein solches etwa durch Inversion aus einem gewöhnlichen Polarkoordinatensystem entstanden denken kann, und sucht dann das Problem nach der entsprechenden Methode zu bestimmen, so tritt der oben geschilderte Fall ein: wir erhalten für die Koeffizienten eine Rekursionsformel, die noch den Poincaréschen Parameter λ enthält, und dessen singuläre Werte, eben *die gesuchten Eigenwerte, ergeben sich dann erst aus der Feststellung, daß nur für sie die mit den rekurrent berechneten Koeffizienten gebildete Laplacesche Reihe konvergiert.*

Die Lösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Entdeckung Poincarés, daß bei der Berechnung von Zahlenfolgen $D_0, D_1, D_2, \ldots$ aus Rekursions-

---

[1]) In der Bezeichnungsweise folge ich F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Leipzig, bei Teubner 1887. — Es sind danach die $P_\nu(x) = P_\nu(\cos\omega)$ die bekannten Legendreschen Polynome und $P_{\nu j}(x)$ die „zugeordneten Kugelfunktionen“, die mit $P_\nu(x)$ durch die Gleichung

$$P_{\nu j}(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^j \frac{d^j P_\nu(x)}{dx^j}$$

zusammenhängen.

[2]) Eine kurze Einführung in die Theorie der dipolaren Koordinaten findet man in des Verfassers Aufsatz in Bd. 120 des Crelleschen Journals (1899) S. 62–66. — Ich werde mich an die dortige Bezeichnungsweise halten, nur den Parameter der Kugelflächen werde ich mit l anstatt mit λ bezeichnen.

formeln sich (unter gewissen in unserem Falle erfüllten Voraussetzungen) der Quotient aufeinanderfolgender Elemente $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ mit wachsendem n der Wurzel einer leicht angebbaren algebraischen Gleichung nähert. —

Der erste Paragraph bringt eine kurze Herleitung unserer Rekursionsformel. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt dann aber erst in deren weiterer Behandlung, wie sie die §§ 2—4 bringen.

§ 1.

Die Zurückführung des Problems auf die Untersuchung einer Rekursionsformel.

Poincaré hat bekanntlich die Randwertaufgaben der Potentialtheorie für das Innen- und Außengebiet derselben geschlossenen Fläche σ durch Einführung eines Parameters λ in eine Aufgabe zusammengefaßt. Er ersetzt die beiden Forderungen, daß die gesuchte Funktion vorgegebene innere bzw. äußere Randwerte f_s besitzen solle:

$$F_{is} = f_s \quad \text{bzw.} \quad F_{as} = f_s$$

durch die eine:

$$\text{(P)} \qquad \frac{1}{2}(F_{is} - F_{as}) - \frac{\lambda}{2}(F_{is} + F_{as}) = f_s,$$

die für $\lambda = -1$ bzw. $\lambda = +1$ jene speziellen Forderungen in sich enthält[3]).

Setzt man dann die Lösung F dieses allgemeinen Poincaréschen Problems (P) als Potential einer Doppelbelegung an:

$$F_p = \frac{1}{2\pi} \int \mu_\sigma (d\sigma)_p \qquad (p \text{ ein beliebiger Punkt}),$$

wo $(d\sigma)_p$ das bekannte C. Neumannsche Symbol, die „scheinbare Größe" des Flächenelementes $d\sigma$ von p aus, bedeutet:

$$(d\sigma)_p = \frac{\cos(E_{\sigma p}, \nu_\sigma)}{E_{\sigma p}^2} d\sigma \quad (\nu_\sigma = \text{innerer auf } d\sigma \text{ errichteter Normalen}),$$

so ergibt sich für das Moment μ die Integralgleichung zweiter Art:

$$\mu_s - \frac{\lambda}{2\pi} \int \mu_\sigma (d\sigma)_s = f_s \qquad (s \text{ ein beliebiger Randpunkt}),$$

und die zugehörige homogene Gleichung lautet:

$$(\mathrm{H_I}) \qquad \mu_s = \frac{\lambda}{2\pi} \int \mu_\sigma (d\sigma)_s,$$

und ganz entsprechende Überlegungen, angewandt auf die sogenannte zweite Randwertaufgabe (bei der anstatt der Randwerte die Werte der normalen

[3]) Poincaré, La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica, 20 (1896), S. 59–142.

Ableitungen vorgeschrieben sind) führen zu der anderen homogenen Gleichung:

$$(\mathrm{H_{II}}) \qquad \eta_s = \frac{\lambda}{2\pi} \int \eta_\sigma \, [d\sigma]_s,$$

wo

$$[d\sigma]_s = \frac{\cos(E_{\sigma s}, \nu_s)}{E_{\sigma s}^2} \, d\sigma \quad (\nu_s = \text{innerer Normale im Punkte } s).$$

Es sei nun die betrachtete Fläche σ speziell eine Kugelfläche (R). Dann ist augenscheinlich, wenn s und σ irgend zwei Stellen auf der Fläche bedeuten:

$$\cos(E_{\sigma s}, \nu_\sigma) = \cos(E_{\sigma s}, \nu_s) = \frac{E_{\sigma s}}{2R},$$

und daher:

$$(d\sigma)_s = [d\sigma]_s = \frac{1}{2R} \cdot \frac{d\sigma}{E_{\sigma s}},$$

und die beiden Gleichungen $(\mathrm{H_I})$ und $(\mathrm{H_{II}})$ für μ bzw. η fallen also in die eine zusammen:

$$(\mathfrak{H}) \qquad \eta_s = \frac{\lambda}{4\pi R} \int \eta_\sigma \frac{d\sigma}{E_{\sigma s}}.$$

Die speziellen Parameterwerte λ, für die diese Gleichung nicht verschwindende Lösungen η besitzt, sind die gesuchten *Eigenwerte* unseres Problems und die zugehörigen Funktionen η die *Eigenfunktionen*.

Man kann danach die Eigenfunktionen bei der Kugel definieren als die Dichtigkeiten solcher Flächenbelegungen, die die Eigenschaft haben, daß die Werte ihrer Potentiale auf der Fläche sich von den Werten der Dichtigkeiten nur durch konstante Faktoren unterscheiden.

Es gehöre nun die betrachtete Kugelfläche einem dipolaren Systeme l, ϑ, φ (Poldistanz 2a) mit dem Parameter $l = L > 0$ an $\left(\text{Radius } R = \frac{2a}{e^L - e^{-L}}\right)$. Nimmt man alsdann die Dichtigkeit η, also eine Funktion von ϑ und φ, in der Form an:

$$(\mathrm{L}) \qquad \eta_s = \psi_s^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n(\mu_s, \varphi_s),$$

wo μ und ψ als Abkürzungen in folgenden Bedeutungen stehen:

$$(\mathrm{a}) \qquad \mu = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \psi = e^L + e^{-L} - 2\cos\vartheta$$

und Y_n eine Laplacesche allgemeine Kugelfunktion n-ter Ordnung bedeutet, definiert durch eine Summe von der Form:

$$Y_n(\mu, \varphi) = \sum_{j=0}^{n} (A_{nj} \cos j\varphi + B_{nj} \sin j\varphi) \, P_{nj}(\mu)$$

mit unbestimmten Koeffizienten A_{nj} und B_{nj}, so sind die Oberflächenwerte des Potentials V dieser Belegung folgendermaßen darstellbar[4]):

$$V_s = 8\pi a \sqrt{\psi_s} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu_s, \varphi_s),$$

und unsere Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) nimmt daher die Gestalt an:

$$\psi^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n(\mu, \varphi) = \left(\lambda \frac{e^L - e^{-L}}{8\pi a}\right) \cdot 8\pi a \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

Der Parameter λ und die Koeffizienten A_{nj} und B_{nj} müssen also so bestimmt werden, daß dieser Gleichung Genüge geschieht, und zwar identisch in μ und φ. Daher müssen auch alle Glieder z. B. mit $\cos j\varphi$ beiderseits übereinstimmen, woraus

$$\text{(A)} \qquad \psi \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) = \lambda (e^L - e^{-L}) \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\mu)$$

folgt, und analog ergibt sich durch Vergleichung der Glieder mit $\sin j\varphi$

$$\text{(B)} \qquad \psi \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) B_{nj} P_{nj}(\mu) = \lambda (e^L - e^{-L}) \sum_{n=j}^{\infty} B_{nj} P_{nj}(\mu).$$

Von diesen beiden Formeln brauchen wir nun augenscheinlich nur die eine, etwa (A), weiter zu verfolgen: Wir setzen noch abkürzend

$$\text{(b)} \qquad \frac{e^L + e^{-L}}{2} = \mathfrak{c} \quad \text{und} \quad \frac{e^L - e^{-L}}{2} = \mathfrak{s},$$

so daß nach (a) also $\psi = 2\mathfrak{c} - 2\mu$ wird, und daher (A) die Form annimmt:

$$(\mathfrak{c} - \mu) \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) = \lambda \mathfrak{s} \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\mu).$$

Unter Anwendung einer bekannten Formel für die zugeordneten Kugelfunktionen[5]):

$$(2n+1)\mu P_{nj}(\mu) = (n+j) P_{n-1,j}(\mu) + (n-j+1) P_{n+1,j}(\mu)$$

können wir hierfür auch schreiben:

$$\sum_{n=j}^{\infty} [(2n+1)\mathfrak{c} - \lambda\mathfrak{s}] A_{nj} P_{nj}(\mu) = \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} [(n+j) P_{n-1,j}(\mu) + (n-j+1) P_{n+1,j}(\mu)$$

oder auch:

$$\sum_{n=j}^{\infty} [(2n+1)\mathfrak{c} - \lambda\mathfrak{s}] A_{nj} P_{nj}(\mu) = \sum_{n=j}^{\infty} [(n+1+j) A_{n+1,j} + (n-j) A_{n-1,j}] P_{nj}(\mu).$$

---

[4]) Vgl. z. B. C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig bei Teubner 1883, S. 266—267.

[5]) Vgl. F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig bei Teubner 1878, S. 74, Formel (β).

Wenn diese Gleichung aber identisch in μ gelten soll, müssen die Koeffizienten von $P_{nj}(\mu)$ beiderseits gleich sein, d. h. es folgt

$$[(2n+1)\mathfrak{c}-\lambda\mathfrak{s}]A_{nj}=(n+1+j)A_{n+1,j}+(n-j)A_{n-1,j} \quad \text{für } n=j, j+1, \ldots$$

oder aber, wenn wir $(n+1)$ statt n schreiben:

$$\text{(R)} \quad \begin{cases} (n+2+j)A_{n+2,j}+[\lambda\mathfrak{s}-(2n+3)\mathfrak{c}]A_{n+1,j}+(n+1-j)A_{nj} \\ \qquad\qquad \textit{für } n=j-1, j, j+1, \ldots \end{cases}$$

Damit ist die gesuchte Rekursionsformel für die Koeffizienten A_{nj} gefunden. — Dieselbe Formel hätte sich augenscheinlich aus (B) für die B_{nj} ergeben.

Denkt man sich nun für jedes j speziell A_{jj} und B_{jj} bekannt, so liefert stets die Formel (R), angewandt auf den Fall $n=j-1$, wo sie nur aus zwei Gliedern besteht, dazu ein ganz bestimmtes $A_{n+1,j}$ bzw. $B_{n+1,j}$, und die weiteren Formeln (R) für $n=j, j+1, \ldots$ liefern dann eindeutig auch alle weiteren A_{nj} bzw. B_{nj}, und alle diese Größen enthalten die als bekannt angenommenen Werte von A_{jj} bzw. B_{jj} als Faktoren. Aus den sich so für die verschiedenen Werte von j ergebenden Reihen

$$\text{(L}'\text{)} \quad \psi^{\frac{j}{2}}\sum_{n=j}^{\infty}(2n+1)A_{nj}P_{nj}(\mu)\cos j\varphi \quad \text{und} \quad \psi^{\frac{j}{2}}\sum_{n=j}^{\infty}(2n+1)B_{nj}P_{nj}(\mu)\sin j\varphi$$

setzt sich dann also die allgemeine Lösung η der Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) linear zusammen, und umgekehrt ist klar, daß jede dieser Reihen (L′) und daher auch jedes lineare Aggregat derselben mit willkürlichen konstanten Faktoren (A_{jj} bzw. B_{jj}) auch der Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) unseres Problems genügt, und zwar, welchen Wert wir auch dem in die Rekursionsformel (R) eingehenden Parameter λ beilegen — das widerspricht aber der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, nach der solche homogenen Gleichungen, deren Kern keine stärkeren Singularitäten aufweist, nichtverschwindende Lösungen nur für eine Reihe diskreter λ-Werte, eben die Eigenwerte, besitzen. Es liegt danach die Vermutung nahe, daß eben bei beliebigem λ im allgemeinen nur eine formale Befriedigung der Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) statthat, die Reihe (L) bzw. die Teilreihen (L′) aber divergieren, und daß nur für gewisse λ-Werte die rekurrent berechneten Koeffizienten zu konvergenten Reihen (L′) und damit zu brauchbaren Lösungen des Problems führen.

Um diese Vermutung zu prüfen, nehmen wir im nächsten Paragraphen direkt die folgende Frage in Angriff: Wie muß man die Werte des Parameters λ in der Rekursionsformel (R) bestimmen, damit die mit den rekurrent aus dieser Formel berechneten Koeffizienten A_{nj} (bzw. B_{nj}) gebildeten Laplaceschen Reihen (L′) konvergieren? — Die Mittel zur

Beantwortung dieser Frage wird uns ein Satz von Poincaré über Differenzengleichungen liefern.

Doch sei die Gleichung (R) zuvor noch in eine andere Form versetzt: Da darin j eine zwar beliebige Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots$ bedeutet, an der wir aber im folgenden immer festgehalten denken, so wollen wir den zweiten Index j hinfort unterdrücken, und da ferner der erste Index n von A_{nj} und B_{nj} nur die Werte $j, j+1, j+2, \ldots$ annimmt, so wollen wir für $A_j, A_{j+1}, A_{j+2}, \ldots$ kurz $C_0, C_1, C_2, \ldots$ schreiben, also allgemein

$$A_{n+j} = C_n \tag{c}$$

setzen. Dann lautet die Rekursionsformel für diese Größen C_n folgendermaßen:

$$(\mathrm{R}')\begin{cases} (n+2+2j)C_{n+2} + [(\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\,\mathfrak{c}) - (2n+2)\,\mathfrak{c}]\,C_{n+1} + (n+1)\,C_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \textit{für } n = -1, 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

§ 2.

Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen.

Poincaré hat wohl als erster in einer Arbeit im American Journal of Mathematics, Vol. VII (1885) eine wichtige Angabe über das Verhalten der Lösungen linearer homogener Differenzengleichungen (Rekursionsformeln) bei wachsendem Index gemacht. Sie bezieht sich auf eine Gleichung von der Form:

$$D_{n+r} + a_1^{(n)} D_{n+r-1} + a_2^{(n)} D_{n+r-2} + \ldots + a_r^{(n)} D_n = 0 \quad \textit{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

und setzt voraus, daß die Koeffizienten $a_i^{(n)}$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ mit wachsendem n je einem bestimmten Grenzwerte a_i zustreben. Dann zeigt Poincaré, daß sich bei beliebiger Wahl der ersten r Werte $D_0, D_1, \ldots, D_{r-1}$ die Quotienten $Q_n = \frac{D_{n+1}}{D_n}$ stets einer der Wurzeln ϱ der Gleichung

$$z^r + a_1 z^{r-1} + a_2 z^{r-2} + \ldots + a_r = 0 \tag{G}$$

nähern, vorausgesetzt, daß diese Wurzeln ϱ alle verschieden und auch von verschiedenem absolutem Betrage sind, also

$$\lim_{n=\infty} Q_n = \lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \varrho\,.$$

Dieses Resultat ist dann später von Pincherle[6]) und unter etwas weiteren Voraussetzungen von Perron[7]) präzisiert. Unter Hinzunahme

[6]) Pincherle, Sur la génération de systèmes recurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle, Acta mathematica, **16** (1893), S. 341–363.

[7]) Perron, Über einen Satz des Herrn Poincaré, Crelles Journal, **136** (1909), S. 17–38, insb. S. 26.

noch der weiteren Annahme, daß die letzten Koeffizienten $a_r^{(n)}$ der Differenzengleichung für alle Werte $n = 0, 1, 2, \ldots$ von 0 verschieden sind, beweist Perron, daß man durch passende Wahl der r Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots, D_{r-1}$ es stets erreichen kann, daß der Quotient Q_n sich einer beliebigen der r Wurzeln ϱ von (G) nähert, und zwar gibt es (immer abgesehen von einem willkürlichen Faktor) nur eine eindeutig bestimmte Lösung, für welche sich Q_n der absolut kleinsten Wurzel nähert (Pincherles „ausgezeichnete Lösung"), eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen, bei denen sich Q_n der zweitkleinsten Wurzel, eine zweifach unendliche, für die sich Q_n der drittkleinsten nähert, usw.

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind bei unserer Rekursionsformel (R′) erfüllt, sobald wir die Gleichung für den Index $n = -1$ ausschließen, denn für $n = -1$ wird der letzte Koeffizient $(n + 1)$, entsprechend dem obigen $a_r^{(n)}$, gleich 0. — Demgemäß wollen wir hinfort die *„Anfangsformel"* $(n = -1)$:

$$(\mathfrak{A}) \qquad (2j + 1)C_1 + (\lambda\mathfrak{z} - (2j + 1)\mathfrak{c})C_0 = 0$$

trennen von der eigentlichen *„Rekursionsformel"*:

$$(\mathfrak{R}) \begin{cases} (n+2+2j)C_{n+2} + [(\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\mathfrak{c}) - (2n+2)\mathfrak{c}]C_{n+1} + (n+1)C_n = 0 \\ \qquad\qquad \textit{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Nur mit dieser „Rekursionsformel ($\mathfrak{R}$)" beschäftigen wir uns zunächst. Sie ist genau von dem Poincaré-Perronschen Typus (für $r = 2$), die Koeffizienten

$$a_1^{(n)} = \frac{\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\mathfrak{c} - (2n+2)\mathfrak{c}}{n + 2 + 2j} \quad \text{und} \quad a_2^{(n)} = \frac{n+1}{n+2+2j}$$

nähern sich mit wachsendem n bestimmten Grenzwerten a_1 und a_2, es ist nämlich

$$a_1 = \lim_{n=\infty} a_1^{(n)} = -2\mathfrak{c} = -(e^L + e^{-L}) \quad \text{und} \quad a_2 = \lim_{n=\infty} a_2^{(n)} = 1,$$

und die Gleichung (G) lautet daher in unserem Falle:

$$z^2 - (e^L + e^{-L})z + 1 = 0,$$

und ihre beiden Wurzeln sind also:

$$(1) \qquad \alpha = e^{-L} \quad \text{und} \quad \beta = e^L.$$

Einer dieser beiden Größen nähert sich daher stets, d. h. bei beleibigen Anfangswerten C_0 und C_1, dem Poincaréschen Satze zufolge der Quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$:

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \alpha \quad \text{oder aber} = \beta.$$

Da nun aber von diesen beiden möglichen Grenzwerten der eine, nämlich α, ein echter Bruch, der andere, β, aber größer als 1 ist, so können die Größen C_n die Koeffizienten einer konvergenten Laplaceschen Reihe nur bilden, wenn eben der Quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ dem ersteren Werte α zustrebt. Wir müssen also die Anfangsglieder C_0 und C_1 so bestimmen, daß für die daraus rekurrent nach $(\mathfrak{R})$ berechneten Größen C_n

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \alpha \tag{3}$$

wird, und diese Bestimmung von C_0 und C_1 ist nach der Pincherle-Perronschen Erweiterung des Poincaréschen Satzes (von einem konstanten Faktor abgesehen) nur auf eine einzige Art möglich, und zwar bei beliebigem λ (Pincherles „ausgezeichnete Lösung").

Doch sind diese C_n der ausgezeichneten Lösung der Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$ nur dann für unser Problem brauchbar, wenn C_0 und C_1 auch noch die „Anfangsformel $(\mathfrak{A})$" befriedigen, und das ist, wie sich herausstellen wird, nur für gewisse Werte von λ, eben die Eigenwerte, der Fall.

Damit ist der weitere Weg der Untersuchung vorgezeichnet: Wir werden zunächst bei unbestimmtem λ die ausgezeichnete Lösung der „Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$" bestimmen (§ 3) und dann untersuchen, für welche Werte von λ diese Lösung zugleich der „Anfangsformel $(\mathfrak{A})$" genügt (§ 4).

§ 3.

Die Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$. Herleitung der „ausgezeichneten Lösung" nach Pincherle.

Der Grundgedanke Pincherles bei Herstellung der verschiedenen Lösungen einer Rekursionsformel vom Poincaréschen Typus ist der, daß er diese in Beziehung setzt zu einer linearen Differentialgleichung, und zwar in folgender Weise: Er bildet zunächst mit einer Funktion U, z. B. der Variablen t, einen linearen homogenen Differentialausdruck DU von solcher Beschaffenheit, daß zwischen den Koeffizienten einer Potenzreihe gerade die in Rede stehende Rekursionsformel bestehen muß, damit die Reihe formal der Gleichung $DU = 0$ genügt, d. h. damit, diese Potenzreihe für U eingesetzt, in DU die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von t verschwinden. — In unserem Falle der Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$, deren Koeffizienten bloße lineare Funktionen des Index n sind, und die nur drei aufeinanderfolgende Größen C_n miteinander verknüpft, ist dieser lineare homogene Differentialausdruck von der ersten Ordnung, und man kann ihn von folgender Form annehmen:

$$DU \equiv (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)\, t \frac{dU}{dt} + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)\, U, \tag{4}$$

denn die Forderung, daß nach Substituierung von

$$U(t) = \sum p_n t^n$$

die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von t in diesem Ausdruck (4) verschwinden, führt auf die Rekursionsformel

$$(\mathfrak{R}') \quad ((n+2)a_0 + b_0)p_{n+2} + ((n+1)a_1 + b_1)p_{n+1} + (na_2 + b_2)p_n = 0,$$

und diese ist durch passende Wahl der Konstanten tatsächlich mit $(\mathfrak{R})$ zu voller Übereinstimmung zu bringen, wir brauchen nur

$$(4') \qquad \begin{array}{lll} a_0 = 1 & a_1 = -2\mathfrak{c} = -(\alpha+\beta) & a_2 = 1 \\ b_0 = 2j & b_1 = \lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\mathfrak{c} & b_2 = 1 \end{array}$$

zu setzen.

Wir denken uns nun weiter mit Pincherle in diesen Differentialausdruck (4) mit einer erst bei einer bestimmten, sagen wir μ-ten, Potenz beginnenden Potenzreihe

$$(5) \qquad V(x) = \sum_{n=\mu}^{\infty} p_n x^n$$

hineingegangen[8]), wo die p_n nach wie vor der Rekursionsformel $(\mathfrak{R}')$ genügen. Dann zerstören sich in $DV(x)$ alle Potenzen von der $(\mu+2)$-ten an, und es wird daher $DV(x)$ eine ganze rationale Funktion $(\mu+1)$-ten Grades, genauer:

$$(6) \quad DV(x) = (\mu a_0 + b_0)p_\mu x^\mu + [((\mu+1)a_0 + b_0)p_{\mu+1} + (\mu a_1 + b_1)p_\mu]x^{\mu+1},$$

und umgekehrt ist klar, daß, *sobald eine Reihe von der Form* (5) *den Differentialausdruck* (4) *in eine ganze Funktion* $(\mu+1)$-*ten Grades verwandelt, die Koeffizienten* p_n *wenigstens von* $n = \mu$ *an der Rekursionsformel* $(\mathfrak{R}')$ *genügen*, denn diese Formel ist ja die Bedingung dafür, daß alle höheren Potenzen verschwinden.

Eine Reihe mit der genannten Eigenschaft erhält nun Pincherle durch die „Heinesche Transformation“:

Es sei $U(t)$ das Integral der homogenen Differentialgleichung:

$$7) \qquad DU(t) = 0,$$

die als einzige singuläre Stellen die beiden Nullstellen der Gleichung

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \equiv 1 - (\alpha+\beta)t + t^2,$$

d. h. die beiden Stellen $t = \alpha$ und $t = \beta$ besitzt. Dann ist bei passender Wahl des Integrationsweges

$$\int \frac{U(t)\,dt}{t-x} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad \left(q_n = \int \frac{U(t)\,dt}{t^{n+1}}\right)$$

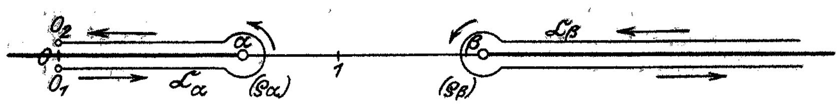
[8]) Nur aus formalen, sogleich ersichtlichen Gründen bezeichnen wir jetzt die Unabhängige mit x.

eine gewöhnliche Potenzreihe von x, die in jedem Kreise um den Nullpunkt konvergiert, der keinen Teil des Integrationsweges enthält.

Wir betrachten nun speziell den mit x^μ beginnenden Teil dieser Potenzreihe, den man auch folgendermaßen darstellen kann:

$$(8) \qquad W(x) = \sum_{n=\mu}^{\infty} q_n x^n = x^\mu \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)}.$$

Was den Integrationsweg anlangt, so denken wir uns zunächst die beiden singulären Stellen α und β der Differentialgleichung $DU = 0$ durch einen Schnitt verbunden, den wir längs der reellen Achse durch den Punkt ∞ führen. Alsdann denken wir uns den Integrationsweg $\mathfrak{C}_\beta$ bei ∞ beginnend längs des oberen Ufers jenes Schnittes bis nahe an β heran,



dann auf einem kleinen Kreise (ϱ_β) den Punkt β umlaufend und auf dem unteren Ufer des Schnittes nach ∞ zurückkehrend. Die Reihe (8) konvergiert dann augenscheinlich für alle $|x| < \beta$. — Die Zahl μ ist dabei so groß gewählt zu denken, daß das Integral (8) und ebenso auch die folgenden Integrale bei der geforderten Ausdehnung der Integration bis $t = \infty$ einen bestimmten Sinn behalten.

Aus (8) ergeben sich nun sofort die folgenden Formeln:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & W(x) - x^\mu \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)} = 0 \\ & x^h W(x) - x^\mu \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{t^h U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)} = -\, x^\mu \int_{\mathfrak{C}_\beta} \left(\frac{t^h - x^h}{t-x} \right) \frac{U(t)\,dt}{t^\mu} \quad (h = 1, 2), \end{aligned} \right.$$

und andererseits folgt durch Differentiation:

$$x W'(x) = \mu W(x) + x^{\mu+1} \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)^2}$$

oder, da $\frac{x}{(t-x)^2} = -\frac{1}{t-x} + \frac{t}{(t-x)^2}$ ist:

$$x W'(x) = \mu W(x) - W(x) + x^\mu \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^{\mu-1} (t-x)^2}.$$

Formen wir nun dieses letztere Integral noch durch partielle Integration um, so ergibt sich, da die dabei vor das Integral tretenden Glieder (nach der Wahl von μ) verschwinden:

$$x W'(x) = (\mu - 1) W(x) + x^\mu \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \left(\frac{U'(t)}{t^{\mu-1}} - (\mu - 1) \frac{U(t)}{t^\mu} \right) \frac{dt}{t-x},$$

und damit die erste der folgenden beiden, den Formeln (9) entsprechenden Gleichungen:

$$(9') \quad \begin{cases} (x W'(x)) - x^\mu \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{(t U'(t))\,dt}{t^\mu (t-x)} = 0 \\ x^h (x W'(x)) - x^\mu \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{t^h (t U'(t))\,dt}{t^\mu (t-x)} = - x^\mu \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \left(\frac{t^h - x^h}{t-x} \right) \frac{(t U'(t))\,dt}{t^\mu} \end{cases}$$

$$(h = 1, 2).$$

Diese Gleichungen (9) und (9′) multiplizieren wir nun mit b_0 und b_h bzw. a_0 und a_h $(h = 1, 2)$ und addieren sie sämtlich; dann erhalten wir:

$$D W(x) - x^\mu \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{D U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)}$$

$$= - x^\mu \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} [(b_1 + b_2 (t+x)) U(t) + (a_1 + a_2 (t+x)) t U'(t)] \frac{dt}{t^\mu}.$$

Wegen (7) verschwindet nun das Integral linker Hand, und es ergibt sich daher:

$$(10) \qquad D W(x) = - x^\mu \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \Big[(a_1 + a_2 t) t U' + (b_1 + b_2 t) U \Big] \frac{dt}{t^\mu} -$$

$$- x^{\mu+1} \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} [a_2 t U' + b_2 U] \frac{dt}{t^\mu}.$$

D. h. die Reihe (8), in unseren Differentialausdruck eingesetzt, verwandelt diesen in eine ganze rationale Funktion $(\mu+1)$-ten Grades. Nach dem, was wir oben feststellten, müssen also die Koeffizienten der Reihe, d. h. *die Größen*

$$(11) \qquad q_n = \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu} \quad \text{für} \quad n = \mu,\ \mu+1,\ \mu+2, \ldots$$

der Rekursionsformel $(\mathfrak{R}')$ *genügen.*

Dies zuvor festgestellt, formen wir jetzt noch die in (10) auftretenden Integrale, soweit darunter $U'(t)$ vorkommt, durch partielle Integration um:

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{t^h U'(t)\,dt}{t^\mu} = (\mu - h) \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{t^{h-1} U(t)\,dt}{t^\mu} \qquad (h = 1, 2),$$

wobei allerdings bezüglich der Zahl μ die weitere Annahme gemacht wird, daß auch noch

(12) $$\frac{U(t)}{t^{\mu-2}} \quad \textit{für} \quad t = \infty \quad \textit{verschwinden soll.}$$

Dann nimmt (10) die Gestalt an:

$$DW(x) = -x^{\mu}\int_{\mathfrak{C}_\beta}[((\mu-1)a_1+b_1)+((\mu-2)a_2+b_2)t]\frac{U\,dt}{t^{\mu}} -$$
$$- x^{\mu+1}\int_{\mathfrak{C}_\beta}((\mu-1)a_2+b_2)\frac{U\,dt}{t^{\mu}}.$$

Dies mit der aus (6) sich ergebenden Formel

$$DW(x) = x^{\mu}(\mu a_0+b_0)q_{\mu} + x^{\mu+1}[((\mu+1)a_0+b_0)q_{\mu+1}+(\mu a_1+b_1)q_{\mu}]$$

verglichen, liefert uns die beiden Gleichungen:

$$((\mu+1)a_0+b_0)q_{\mu+1}+(\mu a_1+b_1)q_{\mu}+((\mu-1)a_2+b_2)\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{U\,dt}{t^{\mu}} = 0,$$

$$(\mu a_0+b_0)q_{\mu}+((\mu-1)a_1+b_1)\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{U\,dt}{t^{\mu}}+((\mu-2)a_2+b_2)\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{U\,dt}{t^{\mu-1}} = 0,$$

welche aussagen, daß, wenn man nachträglich die Definition (11) der Größen q_n auch noch auf die Indizes $n=\mu-1$ und $n=\mu-2$ ausdehnt, *die Gesamtheit aller dieser Größen q_n für $n \geqq \mu-2$ der Rekursionsformel ($\mathfrak{R}'$) genügen.*

Da überdies $\sum q_n x^n$, wie schon festgestellt wurde, für jedes $|x| < \beta$ konvergiert, muß der

$$\lim_{n=\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqq \frac{1}{\beta} = \alpha$$

sein; da aber für diesen Grenzwert nur die beiden Werte α und $\beta > \alpha$ in Betracht kommen [vgl. (2)], so folgt also:

(13) $$\lim_{n=\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha,$$

d. h. die Größen q_n bilden für $n \geqq \mu-2$ die *„ausgezeichnete Lösung“* der Rekursionsformel ($\mathfrak{R}'$) [vgl. (3)].

Berücksichtigen wir nun die Werte (4′) der Koeffizienten $a_0 \ldots b_2$, so daß also die Differentialgleichung (7), ausführlicher geschrieben, lautet:

$$(1-2\mathfrak{c}t+t^2)t\frac{dU}{dt}+[2j+(\lambda\mathfrak{z}-(2j+1)\mathfrak{c})t+t^2]U = 0,$$

so erhalten wir für $U(t)$, das Integral dieser Gleichung, leicht die folgende Funktion:

$$U(t) = t^{-2j} \frac{(t-\alpha)^{\frac{\lambda+(2j-1)}{2}}}{(t-\beta)^{\frac{\lambda-(2j-1)}{2}}},$$

und da diese für $t = \infty$ selber wie $\frac{1}{t}$ verschwindet, so folgt nach (12), daß wir die Zahl μ gleich 2 annehmen dürfen. — So ergeben sich denn schließlich die Größen

$$(14) \qquad q_n = \int\limits_{\mathfrak{C}_\beta} t^{-(n+1+2j)} \frac{(t-\alpha)^{\frac{\lambda+(2j-1)}{2}}}{(t-\beta)^{\frac{\lambda-(2j-1)}{2}}} dt \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

als *die ausgezeichnete Lösung unserer Rekursionsformel* ($\mathfrak{R}$) *bei beliebigem* λ.

Hier dürfte es sich noch empfehlen, anstatt λ eine neue Größe δ einzuführen, indem man

$$(\mathrm{d}) \qquad \lambda = (2j+1) + 2\delta$$

setzt, und ferner die neue Integrationsvariable $s = \frac{1}{t}$ einzuführen. Dann lassen, da $\alpha\beta = 1$ ist, die q_n (nach Fortlassung eines unwesentlichen Zahlenfaktors) folgende einfachere Darstellung zu:

$$(15) \qquad q_n = \int\limits_{\mathfrak{C}_\alpha} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo jetzt der Integrationsweg $\mathfrak{C}_\alpha$ auf der e n d l i c h e n Strecke $\overline{O\alpha}$ längs der beiden Ufer unseres Schnittes verläuft und den Punkt α umkreist (vgl. die Figur S. 11).

Doch ist noch eines Ausnahmefalles Erwähnung zu tun, in dem unsere Integraldarstellungen (14) und (15) der ausgezeichneten Lösung versagen. — Um an (15) anzuknüpfen, zerlegen wir das Kurvenintegral entsprechend den 3 Teilen, aus denen der Integrationsweg besteht; dann erhalten wir, da bei der Umlaufung des Punktes α sich der Integrand nur um den Faktor $e^{2\pi i\delta}$ ändert, durch Zusammenfassung der beiden auf die geradlinigen Wege bezüglichen Integrale:

$$(16) \qquad q_n = (1 - e^{2\pi i\delta}) \int\limits_0^{\alpha-\varrho} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds + \int\limits_{(\varrho_\alpha)} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\beta)^{\delta+1}} ds.$$

Das Integral um die kleine Kreisperipherie (ϱ_α) verschwindet nun, falls δ ***negativ*** ist, im Grenzfalle $\varrho \to 0$, und wir sehen daher, daß, wenn δ überdies noch ganzzahlig, also eine ***negative ganze Zahl*** N ist, sämtliche q_n, wenigstens, wenn wir sie durch jene Integrale definieren, gleich 0 werden. Wir müssen uns also nach einem Ersatz für die Integraldarstellungen (14) und (15) umsehen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst $\delta \neq \mathsf{N}$ an; dann sind die nach (15) zugehörigen q_n — wir bezeichnen sie jetzt genauer mit $q_n(\delta)$ — auch so darstellbar:

$$q_n(\delta) = q_n(\delta) - q_n(\mathsf{N}) \qquad \text{(da eben } q_n(\mathsf{N}) = 0 \text{ ist)},$$

und diese Größen bleiben auch noch Lösungen der Rekursionsformel ($\mathfrak{R}$), wenn wir sie mit konstanten d. h. von n unabhängigen Faktoren versehen. Demnach stellen auch noch die Größen

$$\frac{q_n(\delta) - q_n(\mathsf{N})}{\delta - \mathsf{N}}$$

eine solche Lösung dar, wie nahe auch das δ bei N liegt, also ist auch noch

$$\left(\frac{d\,q_n(\delta)}{d\,\delta}\right)_{\delta = \mathsf{N}} \qquad \textit{eine Lösung von } (\mathfrak{R}) \textit{ im Falle } \delta = \mathsf{N}.$$

Nun unterscheidet sich aber $\frac{d\,q_n(\delta)}{d\,\delta}$ nach (15) von q_n nur dadurch, daß unter dem Integrale noch der Faktor $\log\left(\frac{s-\beta}{s-\alpha}\right)$ hinzutritt. Dieser ändert sich aber bei der Umlaufung der Stelle $s = \alpha$ additiv um $(-2\pi i)$, und dieselbe Schlußweise, die uns zu (16) führte, liefert uns daher im Grenzfalle $\varrho \to 0$ das Resultat, daß

$$2\pi i \int_0^\alpha s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\mathsf{N}}}{(s-\alpha)^{\mathsf{N}+1}}\,d\,s \qquad \textit{eine Lösung von } (\mathfrak{R}) \textit{ im Falle } \delta = \mathsf{N}$$

ist, womit für diesen Fall der gesuchte Ersatz für die Darstellung (15) gefunden ist. — Da es nun auf konstante Faktoren bei der Lösung nicht ankommt, können wir dieses Resultat mit dem oben aus (16) für negatives nicht ganzzahliges δ hergeleiteten leicht zusammenfassen, und erhalten so das folgende

Schlußresultat: *Es sei vorgelegt die Rekursionsformel* ($\mathfrak{R}$) S. 245:

$$(n+2+2j)\,C_{n+2} + [(\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\,\mathfrak{c}) - (2n+2)\,\mathfrak{c}]\,C_{n+1} + (n+1)\,C_n = 0$$
$$\textit{für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

in der j eine beliebige der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ *ist, und $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{c}$ in den aus* (b) S. 242 *ersichtlichen Bedeutungen stehen. Alsdann ist die ausgezeichnete Lösung dieser Formel, d. h. die Lösung, für welche*

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \alpha = e^{-L} < 1 \qquad [\text{vgl. } (3)]$$

wird, bei beliebigem λ folgendermaßen darstellbar: entweder durch das Kurvenintegral

$$(15) \qquad q_n = \int_{\mathfrak{C}_\alpha} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}}\,d\,s \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha} = e^L\right)$$

[vgl. die Figur S. 11] *oder durch das reelle Linienintegral*

$$(15') \qquad q_n = \int_0^\alpha s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds.$$

Dabei ist

$$\delta = \frac{\lambda - (2j+1)}{2} \qquad [\text{vgl. (d)}]$$

gesetzt, und es ist die erste oder aber die zweite Darstellung am Platze, je nachdem $\delta \geqq 0$ oder aber $\delta < 0$ ist.

§ 4.

Die Anfangsformel ($\mathfrak{A}$). Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Nach den Ausführungen am Schlusse von § 2 gilt es jetzt, die λ-Werte festzustellen, für welche die Anfangswerte q_0 und q_1 der soeben bestimmten ausgezeichneten Lösung der Rekursionsformel ($\mathfrak{R}$) auch noch der „Anfangsformel ($\mathfrak{A}$)"

$$(2j+1) C_1 + (\lambda \mathfrak{s} - (2j+1)\,\mathfrak{c}) C_0 = 0$$

unseres Problems genügen.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir den Ausdruck, der nach Substituierung von q_0 und q_1 in ($\mathfrak{A}$) auf der linken Seite steht, kurz mit A

$$(2j+1) q_1 + (\lambda \mathfrak{s} - (2j+1)\,\mathfrak{c}) q_0 \equiv \mathsf{A}$$

und untersuchen dann, für welche Werte von λ diese Größe A verschwindet.

Nun ist nach (15) bzw. (15'):

$$\mathsf{A} = \int [(2j+1)s + (\lambda \mathfrak{s} - (2j+1)\,\mathfrak{c})] \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds$$

oder, da wegen (d)

$$\lambda \mathfrak{s} - (2j+1)\,\mathfrak{c} = (2j+1)(\mathfrak{s} - \mathfrak{c}) + 2\delta\mathfrak{s} = -(2j+1)\alpha + \delta(\beta - \alpha)$$

ist:

$$\mathsf{A} = \int [(2j+\delta+1)(s-\alpha) - \delta(s-\beta)] \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds,$$

d. i. aber:

$$(17) \qquad \mathsf{A} = \int \frac{d}{ds}\left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right] ds,$$

und zwar ist je nachdem ob $\delta \geqq 0$ oder aber $\delta < 0$ ist, integriert zu denken längs der Schleifenkurve $\mathfrak{C}_\alpha$, oder aber längs der reellen Achse von 0 bis α.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, daß $\delta < 0$ ist. Dann ist also

$$\mathsf{A} = \int\limits_0^\alpha \frac{d}{ds}\left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^\delta}\right] ds = \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^\delta}\right]_{s=\alpha} - \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^\delta}\right]_{s=0},$$

oder

$$\mathsf{A} = 0 - \frac{(-\beta)^{2j+\delta+1}}{(-\alpha)^\delta} = \frac{\beta^{2j+\delta+1}}{\alpha^\delta} = \beta^{2j+2\delta+1} \neq 0,$$

und daraus ersehen wir, daß also *im Falle* $\delta < 0$ *die ausgezeichnete Lösung von* $(\mathfrak{R})$ *niemals auch der Anfangsformel* $(\mathfrak{A})$ *genügen kann.*

Es bleibt sonach nur noch der Fall $\delta \geqq 0$ zu untersuchen. In ihm muß das Integral (17) über den Schleifenweg $\mathfrak{C}_\alpha$ hinerstreckt werden, und es ergibt sich daher

$$\mathsf{A} = \int\limits_{\mathfrak{C}_\alpha} \frac{d}{ds}\left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^\delta}\right] ds = \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^\delta}\right]_{O_2} - \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^\delta}\right]_{O_1},$$

wenn O_1 und O_2 die beiden im Nullpunkte sich auf den verschiedenen Ufern des Schnittes gegenüberliegenden Punkte (Anfangs- und Endpunkt von $\mathfrak{C}_\alpha$) bedeuten [vgl. die Figur S. 11]. Die Werte der Funktion in diesen beiden Punkten unterscheiden sich aber nur durch den Faktor $e^{2\pi i\delta}$, es folgt also

$$\mathsf{A} = (1 - e^{2\pi i\delta})\frac{\beta^{2j+\delta+1}}{\alpha^\delta} = (1 - e^{2\pi i\delta})\,\beta^{2j+2\delta+1}$$

Hieraus ist aber ersichtlich, daß auch jetzt *nur für ganzzahlige* δ die Größe A zu 0 werden, also *die Anfangsformel* $(\mathfrak{A})$ *neben der Rekursionsformel* $(\mathfrak{R})$ *durch deren ausgezeichnete Lösung befriedigt werden kann.*

Diese Feststellung enthält aber nach den Ausführungen von § 2 das Resultat: Nur wenn δ eine positive ganze Zahl oder 0 ist, oder, was nach (d) dasselbe: *nur wenn* λ *eine ungerade ganze Zahl* $\geqq 2j+1$ *ist, bilden die aus den Formeln* $(\mathfrak{A})$ *und* $(\mathfrak{R})$ *rekurrent berechneten Größen* C_n *die Koeffizienten einer konvergenten Laplaceschen Reihe.*

Da nun aber j eine beliebige ganze Zahl $\geqq 0$ war, so erhalten wir als ausgezeichnete λ-Werte (Eigenwerte unseres Problems von § 1) sämtliche ungeraden positiven ganzen Zahlen

$$\lambda = 2\nu + 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

wie das auch von Betrachtungen in gewöhnlichen Polarkoordinaten her bekannt ist [vgl. die Einleitung] — und zugleich ergibt sich das Resultat, daß *in den Laplaceschen Reihen für die zu einem solchen Eigenwerte* (18) *gehörigen Eigenfunktionen nur zugeordnete Kugelfunktionen* $P_{nj}(\mu)$ *mit einem zweiten Index*

$$(19) \qquad j \leqq \nu$$

auftreten können.

Zu dem Eigenwerte $\lambda = 2\nu + 1$ erhalten wir nach (L') S. 6 somit $2\nu + 1$ linear unabhängige Eigenfunktionen, d. h. nicht verschwindende Lösungen unserer homogenen Integralgleichung $(\mathfrak{H})$ S. 4, und aus ihnen setzt sich die allgemeine Lösung von $(\mathfrak{H})$ linear mit konstanten Faktoren zusammen. — Diese $2\nu + 1$ Eigenfunktionen (L') lassen sich nun mit Rücksicht auf (A) S. 5 in doppelter Weise darstellen:

$$(20) \quad \left.\begin{matrix} u_{\nu j} \\ v_{\nu j} \end{matrix}\right\} = \psi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{pmatrix}^{9)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$$

oder auch:

$$(20') \quad \left.\begin{matrix} u_{\nu j} \\ v_{\nu j} \end{matrix}\right\} = (2\nu+1)(\beta-\alpha)\sqrt{\psi} \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, \nu).$$

Dabei verstehen wir unter den u immer die Funktionen mit den cos-Faktoren, unter den v die mit den sin-Faktoren. (Es gibt dann $\nu + 1$ Funktionen u, aber nur ν Funktionen v, da das v für $j = 0$ identisch 0 wird und daher ausscheidet.)

In diesen Formeln (20) und (20′) ist nun allgemein nach (c) S. 7

$$A_{nj} = C_{n-j}$$

zu setzen und die C_n jetzt also gleich den q_n, d. h. gleich den Elementen der eben bestimmten ausgezeichneten Lösung von $(\mathfrak{R})$, denn nur dann konvergieren eben diese Reihen.

Nun ist nach (d) S. 14 jetzt $\delta = \nu - j$, also eine ganze Zahl, und nach (16) reduziert sich daher das q_n definierende Kurvenintegral auf das Integral längs des kleinen den Punkt α umlaufenden Kreises (ϱ_α), bzw., wenn wir wieder $t = \frac{1}{s}$ als Integrationsvariable einführen, auf ein Integral längs des kleinen Kreises (ϱ_β) um den Punkt β. — Fügen wir noch geeignete Faktoren hinzu, so können wir die A_{nj} jetzt folgendermaßen definieren:

$$(21) \quad A_{nj} = \frac{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}{(\beta-\alpha)^j} \cdot \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int\limits_{(\varrho_\alpha)} s^{n-j} \frac{(s-\beta)^{\nu+j}}{(s-\alpha)^{\nu-j+1}}\, ds = \frac{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}}{(\beta-\alpha)^j} \cdot \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int\limits_{(\varrho_\beta)} t^{-(n+j+1)} \frac{(t-\alpha)^{\nu+j}}{(t-\beta)^{\nu-j+1}}\, dt.$$

Diese Koeffizienten A_{nj} der die Eigenfunktionen darstellenden Reihen (20) oder (20′) sind danach im wesentlichen die Residuen gewisser Funktionen an der Stelle α bzw. β, oder die Koeffizienten der $(\nu - j)$-ten

9) Da die früher von uns mit B_{nj} bezeichneten Koeffizienten sich von den A_{nj} nur durch konstante, d. h. von n unabhängige, Faktoren unterscheiden [vgl. S. 6], so dürfen wir sie eben auch den A_{nj} gleich setzen, wie hier geschehen ist.

Potenz in der Entwicklung der Funktion $s^{n-j}(s-\beta)^{\nu+j}$ nach Potenzen von $(s-\alpha)$, bzw. der Funktionen $t^{-(n+j+1)}(t-\alpha)^{\nu+j}$ nach Potenzen von $(t-\beta)$, also von Faktoren abgesehen:

$$\left[\frac{d^{\nu-j}}{ds^{\nu-j}}\left(s^{n-j}(s-\beta)^{\nu+j}\right)\right]_{s=\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \left[\frac{d^{\nu-j}}{dt^{\nu-j}}\left(t^{-(n+j+1)}(t-\alpha)^{\nu+j}\right)\right]_{t=\beta},$$

und auf Grund dieser Bemerkung ergeben sich für die A_{nj} leicht die folgenden beiden zur Berechnung wohl am besten geeigneten Darstellungen:

$$(22\text{a}) \qquad A_{nj} = \alpha^{n+\nu+\frac{1}{2}}(\nu+j)!\,(n-j)!\sum_{\varkappa=j}^{N}\frac{(-1)^{\varkappa}(\beta^2-1)^{\varkappa}}{(\varkappa-j)!\,(\varkappa+j)!\,(\nu-\varkappa)!\,(n-\varkappa)!},$$

wo N die kleinere der beiden Zahlen ν und n bedeutet, und:

$$(22\text{b}) \qquad A_{nj} = \alpha^{n-\nu+\frac{1}{2}}\frac{(\nu+j)!}{(n+j)!}\sum_{\varkappa=j}^{\nu}\frac{(-1)^{\varkappa}(n+\varkappa)!\,(1-\alpha^2)^{\varkappa}}{(\varkappa-j)!\,(\varkappa+j)!\,(\nu-\varkappa)!}.$$

Die Koeffizienten A_{nj} sind danach also stets darstellbar als Summen von höchstens $(\nu-j+1)$ Gliedern.

In diesen letzten Darstellungen (22a) und (22b) tritt deutlich zutage, daß sich bei festgehaltenem j mit wachsendem n der Quotient $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ dem Werte $\alpha = e^{-L}$ nähert. —

Erst durch diese Formeln (21) und (22) ist die Bestimmung der Koeffizienten A_{nj} des § 1 einschließlich der Konvergenzfrage erledigt.

Zusammenfassung: *Die Eigenwerte der Integralgleichung des* § 1 *sind die ungeraden positiven ganzen Zahlen:*

$$\lambda = 2\nu+1 \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und zu einem solchen Eigenwerte gehören dann $2\nu+1$ *Eigenfunktionen, wie sie durch die Formeln* (20) *oder* (20′) *definiert sind, in denen die Koeffizienten in den aus* (21) *oder auch* (22a) *oder* (22b) *ersichtlichen Bedeutungen stehen.*

§ 5.

Schlußfolgerungen.

Die soeben unter Anwendung der dipolaren Koordinaten bestimmten zu einem Eigenwerte $\lambda = 2\nu+1$ gehörigen $2\nu+1$ Eigenfunktionen $u_{\nu j}$ und $v_{\nu j}$ müssen sich nun linear zusammensetzen aus den mit Hilfe der gewöhnlichen Polarkoordinaten ermittelt gedachten $2\nu+1$ Eigenfunktionen

$$(23) \qquad P_\nu(\cos\omega) \qquad P_{\nu j}(\cos\omega)\cdot\binom{\cos j\varphi}{\sin j\varphi} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

[vgl. die Einleitung]. Lassen wir aber die Achse des gewöhnlichen Polarkoordinatensystems in die Verlängerung der Pollinie des dipolaren Systems fallen, derart, daß dem Punkte $\vartheta = 0$ unserer Kugelfläche auch in gewöhnlichen Polarkoordinaten der Wert $\omega = 0$ entspricht, und also die letzte Koordinate φ (geogr. Länge) in beiden Systemen dieselbe Bedeutung hat, so lehrt die Betrachtung der von φ abhängigen Faktoren sofort, daß die Funktionen $u_{\nu j}$ und $v_{\nu j}$ sich je von einer der Funktionen (23) nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden können.

Zur Bestimmung dieser Faktoren wollen wir die Funktionen $u_{\nu j}$ und $v_{\nu j}$ noch normieren und dabei auch auf ihre Orthogonalitätseigenschaften eingehen:

Zunächst ist nach den bekannten Integraleigenschaften der Kreisfunktionen klar, daß jedes u zu jedem v orthogonal ist, und ferner auch je zwei u (oder zwei v) zueinander, wenn nur ihre zweiten Indizes j voneinander verschieden sind, gleichgültig, ob sie zu denselben oder zu verschiedenen Eigenwerten (ersten Indizes) gehören. Es bleibt also nur noch der Fall zweier u (bzw. zweier v) mit demselben zweiten Index j zu untersuchen. Deshalb betrachten wir jetzt die (einander gleichen) Integrale

$$J_{\nu\nu'} = \int\limits_{(\sigma)} u_{\nu j} u_{\nu' j}\, d\sigma \quad \text{und} \quad \int\limits_{(\sigma)} v_{\nu j} v_{\nu' j}\, d\sigma, \tag{24}$$

hinerstreckt über die ganze Oberfläche σ unserer Kugel; dabei können wir, was die Indizes ν und ν' anlangt, von vornherein ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\nu \geqq \nu'$$

annehmen. — Wenn wir dann die Koeffizienten der zu $\lambda' = 2\nu' + 1$ gehörigen Eigenfunktionen durch einen Akzent kenntlich machen, ergibt sich:

$$J_{\nu\nu'} = \int\limits_{(\sigma)} \psi^3 \Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu)\Big)\Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A'_{nj} P_{nj}(\mu)\Big) \cos^2 j\varphi\, d\sigma,$$

oder, da $d\sigma = \frac{4a^2}{\psi^2} d\mu\, d\varphi$ ist[10]):

$$J_{\nu\nu'} = 4a^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \psi \Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu)\Big)\Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A'_{nj} P_{nj}(\mu)\Big) \cos^2 j\varphi\, d\mu\, d\varphi.$$

Führen wir hier die Integration nach φ aus und berücksichtigen zugleich noch (A) S. 5, so folgt weiter:

---

[10]) Dies folgt leicht aus Formel (9) S. 65 im 120. Bd. von Crelles Journal.

$$J_{\nu\nu'} = 4a^2 \varepsilon_j \pi\lambda(\beta-\alpha)\int\limits_{-1}^{+1}\Big(\sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\mu)\Big)\Big(\sum_{n=j}^{\infty}(2n+1)A'_{nj}P_{nj}(\mu)\Big)d\mu$$

$$(\varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 1).$$

Nach den bekannten Integraleigenschaften der zugeordneten Kugelfunktionen[11]) ist aber

$$(25) \qquad \int\limits_{-1}^{+1} P_{nj}(\mu) P_{mj}(\mu)\, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{sobald } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}\cdot\dfrac{(n+j)!}{(n-j)!} & \text{„} \quad m = n, \end{cases}$$

und infolgedessen kann man $J_{\nu\nu'}$ auf folgende Form bringen:

$$(26) \qquad J_{\nu\nu'} = 8a^2 \varepsilon_j \pi\lambda(\beta-\alpha)\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(n+j)!}{(n-j)!} A_{nj} A'_{nj} \qquad (\lambda = 2\nu+1).$$

Diese letzte Summe bezeichnen wir nun mit S; dann ist nach den Darstellungen (21) für die Koeffizienten A_{nj}:

$$S = \frac{\alpha^{\nu+\nu'+1}}{(\beta-\alpha)^{2j}}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\varrho_\alpha)} s^{n-j}\frac{(s-\beta)^{\nu+j}}{(s-\alpha)^{\nu-j+1}}ds\Big)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\varrho_\alpha)}\sigma^{n-j}\frac{(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(\sigma-\alpha)^{\nu'-j+1}}d\sigma\Big).$$

Da nun aber

$$\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}(s\sigma)^{n-j} = (2j)!\Big[1+\frac{2j+1}{1}(s\sigma)+\frac{(2j+1)(2j+2)}{1\cdot 2}(s\sigma)^2+\ldots\Big]$$
$$= (2j)!\,(1-s\sigma)^{-(2j+1)}$$

ist, so kann man für S auch schreiben:

$$(27) \qquad S = \alpha^{\nu+\nu'+1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\varrho_\alpha)}\frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-\alpha)^{\nu'-j+1}},$$

wenn $\Phi(\sigma)$ in der Bedeutung steht:

$$\Phi(\sigma) = \frac{(2j)!\,(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(\beta-\alpha)^{2j}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\varrho_\alpha)}\frac{(1-s\sigma)^{-(2j+1)}(s-\beta)^{\nu+j}}{(s-\alpha)^{\nu-j+1}}ds.$$

Danach ist aber $\Phi(\sigma)$, von Faktoren abgesehen, der Koeffizient von $(s-\alpha)^{\nu-j}$ bei einer Entwicklung der Funktion $(1-s\sigma)^{-(2j+1)}\cdot(s-\beta)^{\nu+j}$ in der Umgebung der Stelle $s=\alpha$, also

$$\frac{(\beta-\alpha)^{2j}}{(2j)!\,(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}\Phi(\sigma) = \frac{1}{(\nu-j)!}\Big[\frac{d^{\nu-j}}{ds^{\nu-j}}\Big((1-s\sigma)^{-(2j+1)}(s-\beta)^{\nu+j}\Big)\Big]_{s=\alpha}$$

$$= \frac{1}{(\nu-j)!}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-j}\binom{\nu-j}{\varkappa}\Big(\frac{(2j+\varkappa)!}{(2j)!}\sigma^{\varkappa}(1-\alpha\sigma)^{-(2j+\varkappa+1)}\Big)\Big(\frac{(\nu+j)!}{(2j+\varkappa)!}(\alpha-\beta)^{2j+\varkappa}\Big),$$

---

[11]) Vgl. z. B. F. Neumanns Vorlesungen [s. Anm. [1])], S. 79.

und daher $\Phi(\sigma)$ selbst:

$$\Phi(\sigma) = \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(1-\alpha\sigma)^{2j+1}}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-j}\binom{\nu-j}{\varkappa}\left(\frac{\sigma(\alpha-\beta)}{1-\alpha\sigma}\right)^{\varkappa}.$$

Nach dem binomischen Lehrsatz ist aber diese letztere Summe gleich

$$\left(1+\frac{\sigma(\alpha-\beta)}{1-\alpha\sigma}\right)^{\nu-j} = \left(\frac{1-\beta\sigma}{1-\alpha\sigma}\right)^{\nu-j} = \left(\frac{\alpha-\sigma}{\beta-\sigma}\right)^{\nu-j}\cdot\beta^{2(\nu-j)} \qquad (\text{da } \alpha\cdot\beta = 1)$$

und daher schließlich:

$$\Phi(\sigma) = \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(\beta-\sigma)^{2j+1}}\cdot\beta^{2j+1}\cdot\left(\frac{\sigma-\alpha}{\sigma-\beta}\right)^{\nu-j}\cdot\beta^{2(\nu-j)} = -\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\beta^{2\nu+1}\,\frac{(\sigma-\alpha)^{\nu-j}}{(\sigma-\beta)^{\nu-\nu'+1}}.$$

Es beginnt also die Entwicklung der Funktion $\Phi(\sigma)$ nach steigenden Potenzen von $(\sigma-\alpha)$ mit der $(\nu-j)$-ten Potenz, und es ist daher S, d. i. nach (27) im wesentlichen der Koeffizient der $(\nu'-j)$-ten Potenz in dieser Entwicklung, stets gleich 0, sobald $\nu' < \nu$ ist, und damit ist allgemein das Resultat

$$(28) \qquad J_{\nu\nu'} = 0 \quad \textit{sobald } \nu' \neq \nu$$

bewiesen, oder *die Orthogonalität je zweier zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen*, auch für den Fall gleicher zweiter Indizes — in bester Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie.

In dem sodann noch zu untersuchenden Falle $\nu' = \nu$ ist der Koeffizient von $(\sigma-\alpha)^{\nu'-j}$ in der Entwicklung von $\Phi(\sigma)$ gleich $-\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{\beta^{2\nu+1}}{\alpha-\beta}$, und daher ist nach (27) wegen $\alpha\beta = 1$:

$$S = -\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{1}{\alpha-\beta},$$

und daraus folgt nach (26) weiter das Resultat:

$$(29) \qquad J_{\nu\nu} = 8a^2\varepsilon_j\pi(2\nu+1)\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!},$$

das wir jetzt benutzen wollen, um die Funktionen $u_{\nu j}$ und $v_{\nu j}$ zu normieren: Zu diesem Zwecke multiplizieren wir sie mit

$$\frac{1}{\sqrt{J_{\nu\nu}}} = \frac{1}{2a\sqrt{2\varepsilon_j\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}\sqrt{\frac{(\nu-j)!}{(\nu+j)!}}.$$

Dann müssen sie (bis auf höchstens das Vorzeichen) mit den Funktionen (23) übereinstimmen, wenn wir diese auch noch normieren. Da aber das unserem $J_{\nu\nu}$ entsprechende, über die ganze Kugelfläche (R) hinerstreckte Integral dort

$$\int\limits_{(\sigma)}(P_{\nu j}(x)\cos j\varphi)^2\,d\sigma = R^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}P_{\nu j}^2(x)\cos^2 j\varphi\,dx\,d\varphi \qquad (x = \cos\omega)$$

ist, und also nach (25) den Wert hat:

$$\varepsilon_j \pi R^2 \cdot \frac{2}{2\nu+1} \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!} = \frac{8\,\varepsilon_j \pi a^2}{(\beta-\alpha)^2} \frac{1}{2\nu+1} \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!},$$

so sind die Funktionen (23) nach ihrer Normierung folgendermaßen darstellbar:

$$(23')\quad \frac{\beta-\alpha}{2a\sqrt{2\varepsilon_j\pi}} \sqrt{2\nu+1} \sqrt{\frac{(\nu-j)!}{(\nu+j)!}} P_{\nu j}(\cos\omega) \cdot \binom{\cos j\varphi}{\sin j\varphi} \quad (j=0,1,2,\ldots,\nu),$$

und die Gleichsetzung dieser Funktionen mit den $\frac{u_{\nu j}}{\sqrt{J_{\nu\nu}}}$ bzw. $\frac{v_{\nu j}}{\sqrt{J_{\nu\nu}}}$ liefert uns dann sofort die interessante Formel:

$$(30)\qquad P_{\nu j}(\cos\omega) \begin{cases} = (-1)^\nu \sqrt{\psi} \sum\limits_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\cos\vartheta) \quad \text{oder aber} \\ = \dfrac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cdot \dfrac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\beta-\alpha} \sum (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\cos\vartheta), \end{cases}$$

welche also den *Zusammenhang zwischen den zugeordneten Kugelfunktionen mit den Argumenten* $\cos\omega$ *und* $\cos\vartheta$ angibt, wenn ω und ϑ die, die geographische Breite bestimmenden, Parameter desselben Kugelpunktes *in einem gewöhnlichen Polarkoordinatensystem bzw. in einem dipolaren Systeme bedeuten*[12]). [Wegen der gegenseitigen Lage der beiden Systeme vgl. den Anfang des Paragraphen, und wegen der Bedeutung der A_{nj} die Formeln (21) oder (22)].

Diese Formel (30) läßt sich nun (einschließlich des Vorzeichens) leicht auf ihre Richtigkeit prüfen. Doch wollen wir uns dabei auf den Fall $j=0$, also den Fall der Legendreschen Polynome, beschränken: Wir setzen in (30) für die A_{n0} ihre Darstellungen (21) ein, dann folgt:

$$P_\nu(x) = (-1)^\nu \sqrt{\psi} \frac{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{(\varrho_\alpha)} s^n \frac{(s-\beta)^\nu}{(s-\alpha)^{\nu+1}} ds \right) P_n(\mu) \quad \begin{pmatrix} x = \cos\omega \\ \mu = \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

oder unter Benutzung der bekannten Formel:

$$(31)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-2s\mu+s^2}} \qquad (|s|<1)$$

und der Tatsache, daß $\alpha\beta = 1$ ist:

$$P_\nu(x) = (-1)^\nu \sqrt{\alpha\cdot\psi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho_\alpha)} \frac{1}{\sqrt{1-2s\mu+s^2}} \frac{(\alpha s-1)^\nu}{(s-\alpha)^{\nu+1}} ds,$$

---

[12]) Bei der obigen Schlußweise bleibt das Vorzeichen in der Formel (30) noch unbestimmt. Die Richtigkeit der getroffenen Wahl läßt sich unschwer durch Nachprüfung in einem speziellen Falle, z. B. $\omega = 0$ $(\vartheta = 0)$ feststellen, sie erhellt aber auch aus den noch folgenden Betrachtungen.

und dieses Integral können wir durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen z mittels der Gleichung

$$\frac{s-\alpha}{\alpha s-1}=-z$$

auf die neue Form bringen:

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho_0)}\sqrt{\frac{1-2\alpha\mu+\alpha^2}{(\alpha z+1)^2-2(\alpha z+1)(z+\alpha)\mu+(z+\alpha)^2}}\,\frac{dz}{z^{\nu+1}},$$

in der es jetzt hinzuerstrecken ist über einen kleinen Kreis (ϱ_0) um den Nullpunkt. — Danach sind *die* $P_\nu(x)\equiv P_\nu(\cos\omega)$ *gerade die Koeffizienten in der Entwicklung der unter dem Integrale stehenden (positiven) Quadratwurzel nach steigenden Potenzen von* z, es gilt also:

$$(32)\qquad \sqrt{\frac{1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2}{(\alpha z+1)^2-2(\alpha z+1)(z+\alpha)\cos\vartheta+(z+\alpha)^2}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^\nu P_\nu(\cos\omega),$$

und mit Rücksicht auf (31) muß daher diese Quadratwurzel gleich $\frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\omega+z^2}}$ sein, und in der Tat bestätigt eine einfache Umrechnung von gewöhnlichen Polarkoordinaten auf dipolare Koordinaten die Richtigkeit dieser aus (30) gezogenen Folgerung und damit auch die Richtigkeit der Formel (30) selber, wenigstens im Spezialfalle $j=0$.

Ist $j>0$, so liefert uns eine entsprechende Behandlung der Formel (30) das zu (32) analoge Resultat:

$$(32')\qquad \frac{(2j)!}{2^j\cdot j!}(1-\alpha^2)^j\frac{\sqrt{1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2}\,(\sin\vartheta)^j}{\sqrt{(\alpha z+1)^2-2(\alpha z+1)(z+\alpha)\cos\vartheta+(z+\alpha)^2}^{\,2j+1}}$$
$$=\sum_{\nu=j}^{\infty}z^{\nu-j}P_{\nu j}(\cos\omega),$$

das sich auch wieder leicht direkt bestätigen läßt.

(Eingegangen am 24. Juni 1919.)