

Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenz- erzeugender Faktoren.

Von

Hans Rademacher in Berlin.

Versieht man die Glieder einer divergenten Reihe positiver, monoton gegen Null abnehmender Zahlen abwechselnd mit verschiedenen Vorzeichen, so erhält man eine konvergente Reihe, gleichfalls wenn man diese Vorzeichenverteilung periodisch so vornimmt, daß in einer Periode gleich viele positive und negative Zeichen vorkommen. Es liegt danach nahe, nach asymptotischen Eigenschaften beliebiger Vorzeichenverteilungen zu fragen, die eine divergente monotone Reihe konvergent machen. In dieser Richtung liegt ein Satz von Cesàro¹⁾, der, wenn p_n die Zahl der positiven Zeichen unter den ersten n Zeichen ist, besagt, daß zur Konvergenz nötig ist

$$\lim \frac{p_n}{n} \leq \frac{1}{2} \leq \overline{\lim} \frac{p_n}{n}.$$

Die Sätze I und II der folgenden Arbeit können als Verallgemeinerung dieses Satzes gelten auf den Fall, daß nicht nur die Faktoren ± 1 , sondern beliebige komplexe Zahlen zur Erzeugung der Konvergenz als Faktoren in die monotone Reihe eingestreut werden. Zur weiteren Untersuchung der Cesàroschen Vorzeichenverteilung würde es sich dann darum handeln, asymptotische Aussagen über $\left| \frac{p}{n} - \frac{1}{2} \right|$ zu machen. Das geschieht in den Sätzen III und IV, und zwar gleich wieder für allgemeinere Faktoren.

Im Abschnitt II wird dann von Satz III eine Anwendung gemacht, indem ich zeige, daß eine von Herrn Faber²⁾ und von mir³⁾ angewandte

¹⁾ Sur une distribution de signes, Rom. Acc. Lincei Rend. (4) 4₂ (1888), S. 133–138.

²⁾ Über stetige Funktionen II, Math. Ann. 69 (1910), S. 372–443, insbesondere S. 395–400.

³⁾ Zu dem Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 306–311, auch 3 (1919), S. 317.

Beweismethode für den Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen sich verfeinern läßt bis zum Beweis eines von den Herren Hardy und Littlewood aufgestellten Satzes.

I.

Satz 1. *Es sei $u_1 > u_2 > \dots > u_r > u_{r+1} > \dots$, $u_r \rightarrow 0$ und $\sum_{v=1}^{\infty} u_v$ divergent; $e_1, e_2, \dots, e_r, \dots$ seien beliebige komplexe Zahlen. Dafür, daß $\sum_{v=1}^{\infty} e_v u_v$ konvergent ist, ist es notwendig, daß in der komplexen Zahlenebene der Nullpunkt in allen denjenigen konvexen abgeschlossenen Bereichen liegt, die nur endlich viele der Punkte $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n e_v$ nicht enthalten.*

Hierin sei ein konvexer Bereich wie üblich definiert, nur möge er sich auch ins Unendliche erstrecken dürfen.

Es sei K ein abgeschlossener konvexer Bereich, der höchstens endlich viele Punkte σ_n nicht enthalte. Daß K den Nullpunkt O enthält, ist äquivalent damit, daß seine Projektion auf jede durch O gehende Gerade L den Nullpunkt O enthält. Seine Projektion (eine Strecke, Halbgerade oder die ganze Gerade) enthält die Projektionen höchstens endlich vieler σ_n nicht. Die Gerade L bilde den Winkel φ mit der reellen Achse. Ohne die Anordnung der Projektionen auf L zu ändern, kann man die ganze Figur um $-\varphi$ drehen. Dann ist L die reelle Achse, die σ_n sind übergegangen in $\sigma_n \cdot e^{-i\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n e_v e^{-i\varphi}$; die Projektionspunkte haben dann die Abszissen $\Re(\sigma_n e^{-i\varphi})$. Behauptet wird, daß der Nullpunkt in jedem abgeschlossenen Intervall, das höchstens endlich viele $\Re(\sigma_n e^{-i\varphi})$ nicht enthält, liegen muß, also

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}).$$

Zum Beweise bemerke man, daß auch $\sum_{v=1}^{\infty} e_v e^{-i\varphi} u_v$ und somit auch $\sum u_v \Re(e_v e^{-i\varphi})$ als konvergent vorauszusetzen ist. Sei $\Re(e_v e^{-i\varphi}) = \gamma_v$, $\Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \Re(e_v e^{-i\varphi}) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \gamma_v = \tau_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{v=m}^M u_v \gamma_v &= \sum_{v=m}^M u_v (v \tau_v - (v-1) \tau_{v-1}) \\ &= -u_m (m-1) \tau_{m-1} + \sum_{v=m}^{M-1} v \tau_v (u_v - u_{v+1}) + u_M M \tau_M. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $u_\nu - u_{\nu+1} > 0$. Nimmt man nun entgegen dem ersten Teil der Behauptung (1) an

$$\lim \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) = \lim \tau_n = l > 0,$$

so kann m so groß angenommen werden, daß

$$\tau_\nu > \frac{l}{2} \quad \text{für } \nu \geq m.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=m}^M u_\nu \gamma_\nu &> -u_m(m-1)\tau_{m-1} + \frac{l}{2} \sum_{\nu=m}^{M-1} \nu(u_\nu - u_{\nu+1}) + \frac{l}{2} M u_M \\ &= -u_m(m-1)\tau_{m-1} + \frac{l}{2} \{m u_m + u_{m+1} + \dots + u_M\}. \end{aligned}$$

Hierin kann aber wegen der Voraussetzung der Divergenz von $\sum u_\nu$ die Klammer durch Wahl eines hinreichend großen M beliebig groß gemacht werden, was der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \gamma_\nu$ widerspricht.

Genau so ist die Annahme

$$\lim \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) = -l' < 0$$

zu widerlegen, womit der Satz I bewiesen ist. Die in diesem Satze angegebene Lage der Punkte σ_n in der komplexen Ebene läßt sich etwas einfacher angeben, wenn die σ_n beschränkt sind, was z. B. eintritt bei Beschränktheit der e_ν . Es gilt nämlich der

Satz II. Sind die e_ν beschränkt, $e_\nu < R$, so ist für die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu u_\nu$ notwendig, daß der Nullpunkt O in dem kleinsten abgeschlossenen konvexen Bereich K^* liegt, der sämtliche Häufungspunkte der Menge $\{\sigma_n\}$ enthält.

Zum Beweise dieses Satzes genügt es, nach Satz I zu zeigen, daß K^* der Durchschnitt sämtlicher konvexen Bereiche K ist, die nur endlich viele Punkte σ_n auslassen. Zunächst ist K^* in sämtlichen K enthalten. Denn jeder Bereich K enthält alle Häufungspunkte von $\{\sigma_n\}$. Ein abgeschlossener Bereich nämlich, der einen Häufungspunkt von $\{\sigma_n\}$ nicht enthielte, würde auch eine ganze Umgebung dieses Häufungspunktes und somit unendlich viele σ_n nicht enthalten. Jeder Bereich K enthält wegen seiner Konvexität folglich auch den kleinsten abgeschlossenen konvexen Bereich K^* , der alle Häufungspunkte von $\{\sigma_n\}$ enthält.

Der Durchschnitt aller K ist aber auch nicht größer als K^* . Denn man kann eine spezielle Folge von K angeben, die genau K^* als Durchschnitt aufweist. Es sei nämlich K_0 der Bereich aller der Punkte, deren

Abstand von K^* höchstens gleich ε ist. Es gilt $K_\varepsilon \supset K^*$, und K_ε ist konvex und abgeschlossen. Der Bereich K_ε läßt aber höchstens endlich viele σ_n aus. Ließe er nämlich unendlich viele σ_n aus, so hätten diese, da $|\sigma_n| < R$, außerhalb oder auf dem Rande von K_ε mindestens einen Häufungspunkt, der daher nicht in K^* enthalten wäre. K_ε ist also ein K . Die Folge $K_{\frac{1}{2}} \supset K_{\frac{1}{3}} \supset \dots \supset K_{\frac{1}{n}} \supset \dots$ hat aber gerade K^* zum Durchschnitt, womit der Beweis geführt ist.

Im Falle *reeller* beschränkter e_v ist der betrachtete konvexe Bereich K^* die abgeschlossene Strecke der reellen Achse, die sich von $\liminf \sigma_n$ bis $\limsup \sigma_n$ erstreckt, was für $e_v = \pm 1$ auf den in der Einleitung erwähnten Cesàro-schen Satz herauskommt.

Über die Lage von K^* läßt sich im allgemeinsten Fall bei beschränkten e_v noch folgende Bemerkung machen: Die σ_n sind die Schwerpunkte der n ersten mit gleichen Massen belegten e_v . Daraus folgt, daß K^* in jedem konvexen abgeschlossenen Bereich enthalten ist, der nur endlich viele e_v nicht enthält.

In den folgenden beiden Sätzen ist nur $u_v > u_{v+1}$, $u_v \rightarrow 0$, aber weder die Divergenz von $\sum u_v$, noch die Beschränktheit der e_v vorausgesetzt. Die Sätze geben einen gewissen Aufschluß über die Verstreueung der σ_n in der Zahlenebene. Unter diesem Gesichtspunkt ist der folgende einfache Satz von Wichtigkeit:

Satz III. Für die Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} e_v u_v$ ist ferner notwendig, daß $n \sigma_n = \sum_{v=1}^n e_v = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$ ist.

Beweis. Setzen wir $e_v u_v = a_v$ und $\frac{1}{u_n} = U_n$, so soll $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergieren, und U_1, U_2, \dots wird eine monoton wachsende Folge von der Beschaffenheit $U_v \rightarrow \infty$ sein. Dann ist nach einem Satze von Kronecker⁴⁾ notwendig:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots + a_n U_n}{U_n} = 0$$

oder in unserer Schreibweise:

$$\sum_{v=1}^n a_v U_v = o(U_n),$$

d. h.

$$\sum_{v=1}^n e_v = o\left(\frac{1}{u_n}\right),$$

q. e. d.

⁴⁾ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 103 (1886), S. 980—987.

Zu diesem Satz noch zwei kleine Bemerkungen. Erstens darf er offenbar bei Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ und bei Beschränktheit der e_n keine Einschränkung aussagen, da dann $\sum e_n u_n$ jedenfalls konvergiert. Aus der Beschränktheit der e_n folgt

$$(3a) \quad \sum_{v=1}^n e_v = O(n).$$

Satz III aber fordert

$$(3b) \quad \sum_{v=1}^n e_v = o\left(\frac{1}{u_n}\right).$$

Die Konvergenz der monotonen Reihe $\sum u_n$ zieht aber bekanntlich nach sich $nu_n \rightarrow 0$, so daß also

$$n = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

ist und somit wegen (3a) die Forderung (3b) in der Tat von selbst erfüllt ist.

Zweitens umfaßt Satz III einen Satz von Cesàro, den dieser wieder für $e_n = \pm 1$ bewiesen hat⁵⁾, und der in unserer Schreibweise lautet: „Wenn $n \cdot u_n$ von einem gewissen Index an eine feste positive Zahl über-

trifft, so existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n e_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ “ (welcher Limes nach Satz II nur

gleich 0 sein kann). In der Tat haben wir $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n e_v = o\left(\frac{1}{nu_n}\right)$, also

$$|\sigma_n| \cdot \text{konst.} < |\sigma_n| \cdot (nu_n) \rightarrow 0, \quad \text{also} \quad \sigma_n \rightarrow 0.$$

In diesem Falle präzisiert Satz III den Satz II dahin, daß die Menge $\{\sigma_n\}$ nur den Häufungspunkt 0 besitzt, der also dann den ganzen Bereich K^* ausmacht.

Daß Satz III keine *hinreichende* Bedingung angibt, ersieht man aus folgendem Beispiel: $u_v = \frac{1}{v}$, $e_v = \frac{1}{\log(v+1)}$. Hier ist

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n e_v &= \sum_{v=1}^n \frac{1}{\log(v+1)} = \frac{1}{\log 2} + \sum_{v=2}^{[\sqrt{n}]} + \sum_{v=[\sqrt{n}]+1}^n < 2 + \sqrt{n} + \frac{n}{\log \sqrt{n}} \\ &= o(n) = o\left(\frac{1}{u_n}\right). \end{aligned}$$

⁵⁾ a. a. O. ¹⁾, vgl. auch G. H. Hardy, Note on a theorem of Cesàro, Messenger of Math. 41 (1912), S. 17–22.

Dennoch ist $\sum_{v=1}^{\infty} e_v u_v = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v \log(v+1)}$ divergent.

Es gilt aber wenigstens der

Satz IV. *Hinreichend für die Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} e_v u_v$ ist, daß für ein gewisses positives α*

$$\sum_{v=1}^n e_v = O\left(\frac{1}{u_n^{1-\alpha}}\right)$$

gilt.

Zum Beweise möge $t_n = \sum_{v=1}^n e_v$ gesetzt werden. Dann ist

$$\sum_{v=m}^M e_v u_v = -t_{m-1} u_m + \sum_{v=m}^{M-1} t_v (u_v - u_{v+1}) + t_M u_M.$$

Nun ist

$$|t_{m-1} u_m| < |t_{m-1} u_{m-1}| = O(u_{m-1}^{\alpha}) \rightarrow 0,$$

$$t_M u_M = O(u_M^{\alpha}) = O(u_m^{\alpha}) \rightarrow 0,$$

und wieder bei der Bezeichnung $U_v = \frac{1}{u_v}$

$$\begin{aligned} \sum_{v=m}^{M-1} t_v (u_v - u_{v+1}) &= O\left(\sum_{v=m}^{M-1} \frac{u_v - u_{v+1}}{u_v^{1-\alpha}}\right) = O\left(\sum_{v=m}^{M-1} \frac{U_{v+1} - U_v}{U_v^{\alpha} U_{v+1}}\right) \\ &= O\left(\sum_{v=m}^{\infty} \frac{U_{v+1} - U_v}{U_v^{\alpha} U_{v+1}}\right). \end{aligned}$$

Nach einem Satz von Pringsheim⁶⁾ ist die letzte Summe aber ein Stück einer konvergenten Reihe, so daß also im ganzen $\sum_{v=m}^M e_v u_v$ bei wachsendem m gleichmäßig in M gegen 0 strebt, was zu beweisen war.

Zusatz. Bedient man sich statt des zitierten Pringsheimschen Satzes der logarithmischen Verschärfungen, die dieser Autor seinem Satze gegeben hat⁷⁾, so erkennt man leicht, daß zur Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} e_v u_v$ schon hinreicht, daß

$$\sum_{v=1}^n e_v = O\left(\frac{1}{u_n L_k\left(\frac{1}{u_n}\right) \left(\log_k \frac{1}{u_n}\right)^{\alpha}}\right) \quad (\alpha > 0),$$

⁶⁾ Pringsheim, Über Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen. Math. Annalen 35 (1890), S. 297–394, insbesondere S. 329.

⁷⁾ l. c. ⁶⁾, S. 333.

worin \log_k den $(k-1)$ -fach iterierten Logarithmus bedeutet und

$$L_k(x) = \log x \cdot \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \dots \cdot \log_k x$$

ist.

In den Sätzen III und IV ist über das Konvergenzverhalten von $\sum_1^\infty u_v$ keine Voraussetzung gemacht. Nimmt man aber die Reihe als divergent und zugleich die Bedingung von Satz IV als erfüllt an, so muß natürlich erst recht die Aussage von Satz I gelten. Sie gilt in der Tat, indem die Menge der $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n e_v$ den Nullpunkt zum Häufungspunkt hat. Dies ist wegen der Voraussetzung des Satzes IV, also wegen

$$|\sigma_n| < \frac{C}{n u_n^{1-\alpha}} \quad (\text{für } n \geq N)$$

gewiß dann der Fall, wenn $\frac{C}{n u_n^{1-\alpha}}$ den Nullpunkt zum Häufungspunkt hat.

Angenommen nun, dies fände nicht statt, so gäbe es also ein $\delta > 0$, so daß für $n > N'$

$$\frac{C}{n u_n^{1-\alpha}} > \delta$$

wäre. Das würde bedeuten

$$C' = \frac{C}{\delta} > n u_n^{1-\alpha},$$

$$u_n < \left(\frac{C'}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

also, im Gegensatz zur Voraussetzung von Satz I, die Konvergenz von $\sum_{v=1}^\infty u_v$ implizieren. Die Bedingungen des Zusatzes zu Satz IV würden einen analogen Schluß erlauben. — Auch Satz IV gibt also in gewissem Sinne Aufschluß über die Verteilung der σ_n in der Zahlenebene. — Daß übrigens $\sum_{v=1}^n e_v = O(1)$ für die Konvergenz der betrachteten Reihe gewiß hinreichend ist, sagt schon ein Satz von Abel und Dirichlet aus.

II.

Es soll nun noch eine Anwendung der vorhergehenden Sätze auf das Problem der asymptotischen Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen gemacht werden. Die folgenden Überlegungen, als Ergänzung zu meiner in der Einleitung erwähnten Arbeit gedacht, werden nicht ausführlich genug sein, um ohne Vergleichung mit jener Arbeit verständlich zu sein.

Ich habe dort, um nachzuweisen, daß die Dezimalbrüche aller Zahlen x des Intervalls 0 bis 1, abgesehen höchstens von einer Nullmenge, z. B. die Ziffer 3 asymptotisch $\frac{1}{9}$ so oft wie alle übrigen Ziffern zusammen enthalten, die „Grundfunktion“

$$(4) \quad \begin{cases} g(x) = (1-k)x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{3}{10} \\ g(x) = (1+9k)x - 3k & \text{für } \frac{3}{10} \leq x \leq \frac{4}{10} \\ g(x) = (1-k)x + k & \text{für } \frac{4}{10} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (0 < k < 1)$$

eingeführt (dort $f_1(x)$ genannt). Die monotone, stetige Funktion $g(x)$ hängt noch von dem Parameter k ab.

Nun sei $\frac{1}{9} > v_1 > v_2 > \dots > v_r > \dots$, $v_r \rightarrow 0$ eine monotone Folge mit den Eigenschaften

$$(5) \quad \sum_{r=1}^{\infty} v_r \text{ divergent, } \sum_{r=1}^{\infty} v_r^2 \text{ konvergent.}$$

Wähle ich nun in $g(x)$ den Parameter k gleich $v_1, v_2, \dots, v_r, \dots$, so erhalte ich eine Folge von Grundfunktionen $g_1(x), g_2(x), \dots, g_r(x), \dots$

Nun sei $f_1(x) = g_1(x)$. In der Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ soll nun jede aus der vorhergehenden auf folgende Weise gebildet werden. Um f_{n+1} aus f_n zu konstruieren, teilen wir das Intervall von 0 bis 1 in 10^n gleiche Teile. Sind dann a und b die Abszissen zweier benachbarter Teilpunkte, so ist $f_n(x)$ dazwischen linear

$$f_n(x) = \frac{x-a}{b-a} \{f_n(b) - f_n(a)\} + f_n(a) \quad \text{für } a \leq x \leq b.$$

Dann sei in demselben Teilintervall

$$f_{n+1}(x) = g_{n+1} \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \{f_n(b) - f_n(a)\} + f_n(a).$$

Ebenso wie in der zitierten Arbeit beweist man dann, daß im Intervall $0 \leq x \leq 1$ der Limes

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

gleichmäßig existiert, so daß $f(x)$ stetig und monoton wachsend ist. Durch Überlegungen, die den dort angestellten ganz analog sind, beweist man weiter, daß überall, wo $f'(x)$ existiert,

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

sein muß, worin der Limes rechts gewiß überall dort existiert, wo $f'(x)$ vorhanden ist. Nach einem Satze von Lebesgue tritt dies aber außer in einer Nullmenge im ganzen Intervalle ein.

Ferner ist

$$f'_n(x) = \prod_{\nu=1}^n (1 + e_\nu(x) v_\nu),$$

worin

$$(6) \quad \begin{aligned} e_\nu(x) &= 9, & \text{wenn } [x \cdot 10^\nu] \equiv 3 \pmod{10} \\ e_\nu(x) &= -1, & \text{,, } [x \cdot 10^\nu] \equiv 3 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Außer in einer Nullmenge von Werten x muß also

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^n (1 + e_\nu(x) v_\nu)$$

existieren. Gleichfalls muß

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^n (1 - e_\nu(x) v_\nu)$$

außer in einer Nullmenge von Werten x existieren. Das sieht man ein, wenn man in der Definition von $g(x)$ sich k durchweg durch $-k$ ersetzt denkt und mit dieser neuen Grundfunktion $g(x)$ die Funktionen $\bar{f}_n(x)$ ebenso gebildet denkt wie vorhin die $f_n(x)$. Diesmal ist wieder $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x) = \bar{f}(x)$ eine monotone stetige Funktion und

$$\bar{f}'_n(x) = \prod_{\nu=1}^n (1 - e_\nu(x) v_\nu),$$

so daß wegen $\bar{f}'_n(x) \rightarrow \bar{f}'(x)$ überall, wo $\bar{f}'(x)$ existiert, der Limes (8) nach Lebesgue außer höchstens in einer Nullmenge vorhanden sein muß.

Wegen der Voraussetzung (5) existieren aber (7) und (8) gemeinsam da und nur da, wo

$$(9) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu(x) v_\nu$$

konvergent ist, was also außer höchstens in einer Nullmenge der x stattfinden muß⁸⁾. Dazu ist aber nach Satz II zunächst notwendig, daß

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n e_\nu(x) \leq 0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n e_\nu(x)$$

gilt. Ist nun $n_3(x)$ die Anzahl von Ziffern 3, die unter den n ersten

⁸⁾ Wegen der Voraussetzung (5) strebt der eine der beiden Limes (7) und (8) überall dort gegen Null, wo der andere gegen $+\infty$ strebt. Die Grenzfunktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ haben also höchstens an einer Nullmenge die Ableitung Null, sind also, im Gegensatz zu der in meiner zitierten Abhandlung konstruierten Funktion, nicht „von konstanter 2-Variation“.

Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von x vorkommen, so kann man wegen der Definition (6) der $e_v(x)$ auch schreiben:

$$(11) \quad \sum_{v=1}^n e_v(x) = 9 n_3(x) - (n - n_3(x)) = -n + 10 n_3(x),$$

und nach Eintragung dieser Werte in (10) ergibt sich, wenn man bedenkt, daß die Auszeichnung der Ziffer 3 nicht wesentlich ist, der

Satz V. *Ist $n_\lambda(x)$ die Anzahl von Ziffern λ unter den ersten n Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von x ($0 < x < 1$), so gilt außer in einer Nullmenge der x*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\lambda(x)}{n} \leq \frac{1}{10} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\lambda(x)}{n}.$$

Dieser Satz sagt weniger aus als der Borelsche Satz, in dem außer in einer Nullmenge die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\lambda(x)}{n}$ behauptet wird. Wir erhalten aber noch mehr als dies, wenn wir Satz III heranziehen. Danach ist für die Konvergenz von (9) auch notwendig, daß

$$\sum_{v=1}^n e_v(x) = o\left(\frac{1}{v_n}\right)$$

gilt, was also außer in einer Nullmenge der x stattfinden muß. Unter Berücksichtigung von (11) und der folgenden speziellen, die Forderungen (5) befriedigenden Wahl der v_v ,

$$v_v = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}} (\log v)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} \quad \text{für } v > 80, \quad v_v = \frac{(81 - v) \cdot \frac{1}{9} + v}{81} v_{81} \quad \text{für } 1 \leq v \leq 80$$

erhält man den

Satz VI. *Unter den Bezeichnungen des Satzes V gilt, außer in einer Nullmenge der x ,*

$$(12) \quad \frac{n_\lambda(x)}{n} - \frac{1}{10} = O\left(\frac{(\log n)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}{n^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Dieser Satz, der den Borelschen einschließt, ist schon, und zwar in etwas schärferer Form, von den Herren Hardy und Littlewood erhalten worden, aber auf einem von dem unseren völlig verschiedenen Wege⁹⁾.

Die Herren Hardy und Littlewood gelangen mit ihren Methoden noch zu einem wichtigen Ergebnis, das die Abschätzung (12) ergänzt

⁹⁾ Some Problems of Diophantine Approximation, Acta Mathem. **37**, S. 155–239, Theorem 1.45 (S. 185). Siehe auch Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914) S. 421.

und ihrer möglichen Verbesserung eine Grenze zieht. Es gilt nämlich der Satz: *Nur* in einer Nullmenge gilt,

$$\frac{n_1(x)}{n} - \frac{1}{10} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{10}.$$

Aus diesem Satze soll hier noch eine Konsequenz gezogen werden.

Die Aussagen der beiden letzten Sätze sind für dekadische Bruchentwicklungen gemacht. Für dyadische würden ganz entsprechende Beweise gelten, und die Sätze lauten so:

In einer Menge vom Maße 1 des Intervalls 0 bis 1 gilt

$$(12a) \quad \frac{n_0(x)}{n} - \frac{1}{2} = O\left(\frac{(\log n)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}{n^{\frac{1}{2}}}\right),$$

und *nur* in einer Menge vom Maße Null

$$(13a) \quad \frac{n_0(x)}{n} - \frac{1}{2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Welche monotone Folge $\{v_r\}$ mit den Eigenschaften (5) man also auch immer wählen mag, so kann der oben durchgeführte Schluß niemals auf die Aussage führen, daß (13a) in einer Menge vom Maße 1 gilt.

Entsprechend zu (9) muß man im dyadischen Falle

$$(9a) \quad \begin{cases} e_r(x) = 1, & \text{wenn } [x \cdot 2^r] \equiv 0 \pmod{2}, \\ e_r(x) = -1, & \text{,, } [x \cdot 2^r] \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

definieren. Jeder Folge $e_1, e_2, \dots, e_r, \dots, e_r = \pm 1$, entspricht auch genau eine Zahl x des Intervalls 0 bis 1, deren $e_r(x)$ -Folge sie gemäß (9a) ist. Würde nun bei einer beliebigen, den Bedingungen (5) genügenden monotonen Folge $\{v_r\}$ die Summe

$$\sum_{r=1}^{\infty} e_r v_r, \quad e_r = \pm 1,$$

nur dann konvergieren, wenn

$$(14) \quad \sum_{r=1}^n e_r = O(\sqrt{n}),$$

so müßte

$$\sum_{r=1}^n e_r(x) = 2n_0(x) - n = O(\sqrt{n}).$$

oder

$$\frac{n_0(x)}{n} - \frac{1}{2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

¹⁰⁾ Folgt aus Theorem 1.47, a. a. O.⁹⁾, S. 187.

auf einer Menge vom Maße 1 stattfinden, im Gegensatz zu Aussage (13a). Folglich muß es Vorzeichenverteilungen $\{e_v\}$ geben, die $\sum_{v=1}^{\infty} e_v v_v$ konvergent machen, ohne (14) zu erfüllen. Man erhält somit den

Satz VII. Ist $v_1 > v_2 > \dots > v_v > \dots$, $v_v \rightarrow 0$ und $\sum_{v=1}^{\infty} v_v^2$ konvergent, dagegen $\sum_{v=1}^{\infty} v_v$ divergent, so gibt es Vorzeichenverteilungen, d. h. Folgen $e_1, e_2, \dots, e_v, \dots, e_v = \pm 1$, so daß

$$\sum_{v=1}^{\infty} e_v v_v$$

konvergiert, ohne daß

$$\sum_{v=1}^n e_v = O(\sqrt{n})$$

ist.

Dieser Satz ist unter seinen besonderen Voraussetzungen eine Ergänzung von Satz IV. Denn aus der Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} v_v^2$ könnte man wegen der Monotonität auf $v_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ schließen, aber damit aus Satz IV nur folgern, daß $\sum_{v=1}^{\infty} e_v v_v$ gewiß konvergiert, sobald $\sum_{v=1}^n e_v = O(\sqrt{n}^{-1-\alpha})$, $\alpha > 0$, oder aus dem Zusatz zu Satz IV z. B. daß $\sum_{v=1}^n e_v = O\left(\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{1+\alpha}}\right)$ für die Konvergenz hinreichend ist.

Einer Mitteilung des Herrn Knopp verdanke ich übrigens eine Konstruktionsvorschrift, durch die man zu einer Reihe mit den in Satz VII vorausgesetzten Eigenschaften stets eine konvergenzerzeugende Vorzeichenverteilung $\{e_v\}$ erhält, für die

$$\sum_{v=1}^n e_v \neq O(\sqrt{n})$$

ist. Nach dieser Vorschrift wähle man einfach eine Folge von positiven geraden Zahlen $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k < \dots$, so daß erstens

$$\sum_{k=1}^6 k v_k v_k^2$$

konvergiert und zweitens

$$v_{k+1}^2 > v_k^2 + k v_k$$

ausfällt. Die erste Forderung ist wegen $v_v \sqrt{v} \rightarrow 0$ gewiß erfüllbar und

zwar auch unter Erfüllung der zweiten Forderung. Dann werde folgende Vorzeichenverteilung vorgenommen:

$$(15) \quad \begin{aligned} &v_1 - v_2 + v_3 - + \dots - v_{v_1^2} | + v_{v_1^2+1} + v_{v_1^2+2} + \dots + v_{v_1^2+v_1} | \\ &+ v_{v_1^2+v_1+1} - + \dots - v_{v_2^2} | + v_{v_2^2+1} + \dots + v_{v_2^2+2v_2} | + \dots, \end{aligned}$$

d. h. für die Indizes von $v_k^2 + kv_k + 1$ bis v_{k+1}^2 erhalten die Glieder abwechselnde Vorzeichen (wobei wegen der Geradheit der v_k gleichviele $+$ und $-$ -Zeichen zur Anwendung gelangen), und vom Index $v_k^2 + 1$ bis $v_k^2 + kv_k$ sind lauter positive Zeichen zu nehmen. Die so gebildete Reihe (15) ist in der Tat konvergent. Denn nimmt man die Gruppen konsekutiver positiver Glieder ($v_{v_k^2+1} + \dots + v_{v_k^2+kv_k}$) heraus, so bleibt eine alternierende Reihe mit monoton zu Null abnehmenden Gliedern stehen. Wegen

$$v_{v_k^2+1} + \dots + v_{v_k^2+kv_k} < kv_k v_{v_k^2}$$

bilden aber die in Rede stehenden Gruppen positiver Glieder zusammen genommen eine absolut konvergente Reihe. Für die Vorzeichenverteilung gilt aber bei $n = v_k^2 + kv_k$

$$\sum_{r=1}^n e_r > kv_k, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n e_r > \frac{kv_k}{\sqrt{v_k^2 + kv_k}} > \frac{k}{\sqrt{2}},$$

letzteres, weil von selbst $v_k > k$ ist. Also ist

$$\overline{\lim} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n e_r = +\infty, \quad \sum_{r=1}^n e_r \neq O(\sqrt{n}).$$

(Eingegangen am 20. November 1920.)