Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen.

(Erste Abhandlung.)

Von

Martin Krause in Rostock.

Die Theorie der doppelt periodischen Functionen zweiter Art ist von Herrn Hermite*) aufgestellt worden. Er zeigt, dass dieselben sich sämmtlich auf Functionen der Form:

$$e^{\lambda x}\frac{\vartheta_3(v-b)}{\vartheta_3(v-a)}$$

in einer einfach angebbaren Weise reduciren lassen. Die Entwickelung dieser Primfunctionen in trigonometrische Reihen ist von Jacobi, Scheibner**), Hermite***) wirklich durchgeführt worden. Die Functionen dritter Art sind in neuester Zeit in einer Reihe wichtiger und interessanter Arbeiten behandelt worden, von denen die der H. H. Hermite†), Biehler††) und Appell†††) besonders hervorgehoben werden mögen. Die Resultate, die sich in diesen Arbeiten ergeben, sind in zusammenhängender und äusserst eleganter Weise in dem jüngst erschienenen ersten Bande des Werkes von Herrn Halphen*†) über die

*) Cf. Hermite. Note sur la théorie des fonctions elliptiques ajoutée à la 6e édition du Traité de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885. Siehe auch Frobenius. Kronecker Journal Band 93.

**) Scheibner. Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form Leipzig 1879. Supplement dazu Leipzig 1880.

***) Hermite. Annales de l'école normale supérieure. 3e Série t. II. 1885.

†) Hermite. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris. 1861. II, 1862 II.

††) Biehler. Sur les développements en séries des fonctions doublement, périodiques de troisième espèce. Paris 1879.

Sur les fonctions doublement périodiques etc. Kronecker Journal. Band 88.

†††) Appel. Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Comptes rendus. 1883. Annales de l'école normale supérieure IIIe série tome I, II.

*†) Halphen. Traité des fonctions elliptiques. Paris 1886.

Theorie der elliptischen Functionen mitgetheilt worden. Es mögen diese Resultate kurz scizzirt werden.

Es zeigt sich, dass als Primfunctionen d. h. als solche, aus denen alle Functionen dritter Art zusammengesetzt werden können, die Functionen anzusehen sind:

$$(1) \qquad \Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x^{mn} q^{mn(n-1)} \Theta(x q^{2n}),$$

wobei m positiv, q dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist und $\Theta(x)$ in folgender Weise zu specialisiren ist: Ist die zu untersuchende Function eine ganze transcendente, so lautet die Primfunction:

$$(2) \quad E_r(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^{mn+r} q^{mn(n-1)+2nr}, \quad r=0, 1, \cdots, m-1, \quad x = e^{\frac{\pi i(u-\omega)}{\omega}},$$

d. h. es ist:

$$\Theta(x) = x^r;$$

hat die Function mehr Nullstellen als Unendlichkeitsstellen und ist gebrochen transcendent, so lautet die Primfunction:

$$(3) \qquad F(u, v) = \frac{i\pi}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^{mn} q^{mn(n-1)} \frac{y}{xq^{2n} - y},$$

$$x = e^{\frac{\pi i(u-\omega)}{\omega}}, \qquad y = e^{\frac{\pi i(v-\omega)}{\omega}},$$

d. h. es ist:

$$\Theta(x) = \frac{i\pi}{\omega} \frac{y}{x-y}.$$

Hierbei ist x als Argument aufzufassen, während y Parameter ist.

Hat die Function mehr Unendlichkeitsstellen als Nullpunkte, so lautet die Primfunction ebenso, nur ist jetzt y als Argument, x als Parameter aufzufassen.

Auf Grund dieser Zerlegung ist es dann möglich, die Entwickelung einer ungemein grossen Anzahl von Functionen in trigonometrische Reihen wirklich durchzuführen, wie es besonders Herr Appell in den schon citirten Arbeiten gezeigt hat.

So elegant diese Methode ist, so besitzt sie doch einige Eigenschaften, die es nach verschiedenen Richtungen hin wünschenswerth erscheinen lassen, sie durch eine andere zu ersetzen.

Erstens ist die Behandlung der periodischen Functionen zweiter und dritter Art eine getrennte. Es kann das nicht in der Natur der Sache liegen, denn schliesslich können wir die Functionen zweiter Art als speciellen Fall der Functionen dritter Art ansehen, nämlich als den Fall, in welchem die Zahl der Nullpunkte gleich der Zahl der Unendlichkeitspunkte ist. Es fragt sich, ob es nicht Methoden giebt, bei denen die Functionen zweiter und dritter Art unter demselben Gesichtspunkt betrachtet werden. Zweitens sind als Primfunctionen neue Functionen eingeführt, die in ihrer allgemeinen Gestalt bisher in der Theorie der elliptischen Functionen noch keine Verwendung gefunden haben und mit den bisher betrachteten in keinem einfachen Zusammenhang stehen. Es fragt sich, ob es nicht unter den bisher gebrauchten Functionen solche giebt oder aus ihnen solche unmittelbar hergeleitet werden können, welche dasselbe leisten, wie die neu eingeführten Grössen.

Dann aber kommt der Umstand hinzu, dass in demjenigen Falle, in welchem die Zahl der Nullpunkte kleiner als die der Unendlichkeitspunkte ist, die Primfunctionen nicht denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, wie die zu construirenden. Erst die additive Vereinigung mehrerer derselben führt bei richtiger Constantenbestimmung zu Functionen, die die gesuchten ersetzen können.

Ferner ist es bisher nicht möglich gewesen, analoge Primfunctionen im Gebiete der Functionen mehrerer Veränderlichen herzustellen. Herr Appell bemerkt ausdrücklich, dass ihm das nicht gelungen sei. Es fragt sich, ob diese Schwierigkeiten in der Natur der Sache liegen oder aber durch Schaffung anderer Primfunctionen gehoben werden können.

Hierzu tritt eine wirkliche Lücke für den Fall, dass die Zahl der Nullstellen grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitsstellen. In den fertigen Formeln treten eine Anzahl unbekannter constanter Grössen als Factoren der Functionen $E_r(u)$ linear auf. Es wird nun zwar eine Methode angegeben, in welcher Weise diese Constanten zu bestimmen sind, aber diese Methode kommt im Wesentlichen auf die Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen heraus. Dieselbe ist daher sehr complicirt und im allgemeinen Falle unbrauchbar. Es fragt sich nun, ob es nicht möglich sein sollte, die Coefficienten in expliciter Form darzustellen und damit das Problem endgültig zu lösen, die Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Alle die aufgeworfenen Fragen sollen im Folgenden beantwortet werden. Die Beantwortung zerfällt in mehrere Theile.

Erstens soll gezeigt werden, dass für den Fall, in welchem die Zahl der Nullstellen grösser oder gleich der Zahl der Unendlichkeitsstellen ist, als Primfunctionen die Grössen:

$$\frac{\vartheta_3[k](nv-b,\, n\tau)}{\vartheta_3(v-a,\, \tau)}$$

gewählt werden können: Diese Grössen sind der Transformationstheorie unmittelbar zu entnehmen.

In den allgemeinen Formeln treten dann eine Anzahl von Constanten linear auf. Die Bestimmung derselben stösst zunächst auf dieselben Schwierigkeiten, wie die Bestimmung der entsprechenden Grössen in den Formeln des Herrn Appell. Es soll im zweiten Paragraphen gezeigt werden, dass in zwei Fällen die Bestimmung der Constanten unmittelbar in expliciter Form gegeben werden kann. Die Bestimmung erfolgt im ersten Falle auf Grund eines Additionstheorems, welches vom Verfasser*) aufgestellt worden ist, der zweite Fall führt zu den bekannten Resultaten von Herrn Hermite.

Die Bestimmung sämmtlicher Constanten in expliciter Form erfolgt dann im dritten Paragraphen. In demselben wird das ursprünglich gestellte allgemeine Problem auf eine neue Art in Angriff genommen, bei welcher die sämmtlichen Functionen zweiter und dritter Art unter *einem* Gesichtspunkt betrachtet werden. Es zeigt sich hierbei, dass als Primfunctionen die Grössen gewählt werden können:

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\vartheta_3(nv,n\tau)$$

und

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\frac{1}{\vartheta_3(nv,n\tau)};$$

es zeigt sich ferner, dass mit ihrer Hülfe das Problem der Darstellung der allgemeinen doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in expliciter Form unmittelbar gegeben werden kann. Dabei lassen die Functionen:

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\vartheta_3(nv,n\tau)$$

sich unmittelbar in einfacher Weise auf die in den früheren Paragraphen behandelten Primfunctionen zurückführen, so dass *das Problem der allgemeinen Constantenbestimmung in expliciter Form damit völlig gelöst ist.* Diese Formeln stellen die naturgemässe Verallgemeinerung der Hermite'schen Formeln für den Fall der Functionen zweiter Art im Falle der Functionen zweiter und dritter Art dar und enthalten dieselben als speciellen Fall in sich.

Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass die neuen Primfunctionen im Gebiete der Functionen mehrerer Veränderlicher eine unmittelbare Verallgemeinerung zulassen.

Zur vollständigen Lösung des Problems die Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen zu entwickeln, ist es demnach nur nöthig dasselbe Problem für die aufgestellten Primfunctionen zu lösen. Es ist dieses mit Hülfe elementarer Methoden leicht möglich und kann u. a. auf die Multiplication zweier bekannter trigonometrischer Reihen reducirt werden.

---

*) Cf. Berichte der math. phys. Classe der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1886. Math. Annalen Band 27.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Unendlichkeitspunkte alle von einander verschieden sind. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass im allgemeinen Falle keine weiteren Schwierigkeiten eintreten.

§ 1.

Darstellung der Functionen zweiter und derjenigen Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der Nullstellen grösser als die Zahl der Unendlichkeitsstellen ist, durch die Primfunctionen $\vartheta_3[k](nv-b,\ n\tau) : \vartheta_3(v-a,\ \tau)$.

Es sei eine ganze transcendente Function der Veränderlichen:

$$x = e^{2\pi i v}$$

vorgelegt, welche den folgenden Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(v+1) &= f(v), \\ f(v+\tau) &= f(v)\, e^{-\pi i n(2v+\tau)-2w\pi i}. \end{aligned}$$

Eine solche Function, bei welcher n eine ganze positive Zahl bedeutet, während w beliebig gewählt sein kann, ist eine doppelt periodische dritter Art, welche im Endlichen keinen Unendlichkeitspunkt hat. Die Bedingungsgleichungen, denen sie Genüge leistet, sind nicht in der allgemeinsten Form gegeben, indessen braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass hiermit keinerlei wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit des Problems eingetreten ist.

Derartige Functionen enthalten bekanntlich n von einander unabhängige Constanten linear in sich. Es genügt also n derartige Grössen zu kennen, um alle übrigen aus ihnen linear zusammensetzen zu können. In der Wahl dieser Primfunctionen herrscht eine grosse Willkür. Wir wollen zunächst die folgenden Functionen in Betracht ziehen, die sich unmittelbar aus denjenigen ergeben, die in neuester Zeit vor allem von Herrn Klein und seinen Schülern betrachtet worden sind und also lauten:

$$(2)\quad \vartheta_3[k](nv+w,\ n\tau) = e^{-2\pi i k\left(v+\frac{w}{n}\right)+\frac{\pi i}{n}k^2\tau} \cdot \vartheta_3(nv+w-k\tau,\ n\tau).$$

Von unwesentlichen Unterschieden abgesehen stimmen dieselben mit den Grössen überein, die Herr Halphen durch $E_r(u)$ bezeichnet.

Es folgt dann leicht die Darstellung:

$$(3)\qquad f(v) = \sum_{0}^{n-1}{}_k\, c_k\, \vartheta_3[k]\,(nv+w,\ n\tau),$$

wobei die Grössen c_k willkürliche Constanten bedeuten.

Die Darstellung kann aber noch in mannigfacher anderer Weise gegeben werden. Nehmen wir an, dass a_1 und a_2 zwei ganz beliebige Grössen sind, die nur nicht der Congruenz genügen:

$$a_1 \equiv a_2 \text{ mod. } m_1 \tau + m_2$$

(m_1 und m_2 sind willkürliche ganze Zahlen, die nicht zu gleicher Zeit der Null gleich werden), so können wir die Grössen bilden

$$\vartheta_3(v - a_\varepsilon) \cdot \vartheta_3[k]\left((n-1)v + w + a_\varepsilon,\ (n-1)\tau\right), \quad \varepsilon = 1, 2.$$

Lassen wir k der Reihe nach die Werthe $0, 1, \cdots, n-2$ durchlaufen, so folgt leicht, dass wir unter den definirten Grössen immer n von einander linear unabhängige wählen können. Hieraus folgt die Richtigkeit der Gleichung:

$$(4) \quad f(v) = \sum_0^{n-2} {}^k c_k^{(1)} \vartheta_3(v-a_1) \cdot \vartheta_3[k]\left((n-1)v + w + a_1,\ (n-1)\tau\right) \\ + c_k^{(2)} \vartheta_3(v-a_2) \cdot \vartheta_3[k]\left((n-1)v + w + a_2,\ (n-1)\tau\right).$$

Die Grössen $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ sind willkürliche Constanten. Wir können, wie nicht weiter auseinandergesetzt zu werden braucht, $(n-2)$ der Grössen $c_k^{(1)}$ oder auch der Grössen $c_k^{(2)}$ der Null gleich setzen, ohne der Allgemeinheit des Problems Abbruch zu thun.

In analoger Weise können wir weiter gehen. Sind a_1, a_2, a_3 drei willkürliche Grössen, von denen je zwei nicht einander nach dem Modul $m_1\tau + m_2$ congruent sein dürfen, so findet die Relation statt:

$$(5)\ f(v) = \sum \sum_0^{n-3} {}^k c_k^{(\varepsilon,\varepsilon_1)} \vartheta_3(v-a_\varepsilon) \cdot \vartheta_3(v-a_{\varepsilon_1}) \cdot \vartheta_3[k]\left((n-2)v + w + a_1 + a_2, (n-2)\tau\right). \\ \varepsilon < \varepsilon_1, \quad \varepsilon, \varepsilon_1 = 1, 2, 3.$$

Hierbei können je $n-3$ der Grössen $c_k^{(2,3)}$ und $c_k^{(1,3)}$ oder der Grössen $c_k^{(2,3)}$ und $c_k^{(1,2)}$ oder der Grössen $c_k^{(1,2)}$ und $c_k^{(1,3)}$ der Null gleich gesetzt werden, ohne der Allgemeinheit des Problems Abbruch zu thun. So können wir weiter gehen. Als letzten Fall wählen wir:

$$(6)\ f(v) = \sum c^{(r)} \vartheta_3(v-a_1) \cdot \vartheta_3(v-a_2) \cdots \vartheta_3(v-a_{r-1}) \cdot \vartheta_3(v-a_{r+1}) \cdots (v-a_n) \\ \cdot \vartheta_3(v+w+a-a_r) \\ a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Hierbei bedeuten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ beliebige Grössen, von denen niemals je zwei einander nach dem Modul $m_1\tau + m_2$ congruent sein können.

So erhalten wir n Darstellungen, die wir durch die Bezeichnungen, erste, zweite, $\cdots$, n^{te} von einander unterscheiden wollen.

Dividiren wir dann in der ersten Darstellung beide Seiten durch:

$$\vartheta_3(v - a_1),$$

in der zweiten durch:

$$\vartheta_3(v-a_1)\cdot\vartheta_3(v-a_2)$$

etc., in der n^{ten} durch:

$$\vartheta_3(v-a_1)\cdots\vartheta_3(v-a_n),$$

so erhalten wir in den $(n-1)$ ersten Fällen auf den linken Seiten doppeltperiodische Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der im Endlichen gelegenen Unendlichkeitspunkte resp. gleich $1, 2, \cdots, n-1$ ist, also jedenfalls kleiner als die der Nullpunkte. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass wir auf diese Weise zu den allgemeinsten Functionen der genannten Art gekommen sind oder doch zu Functionen, auf welche sich die allgemeinen unmittelbar reduciren lassen.

Die letzte Formel ergiebt die doppelt periodischen Functionen zweiter Art.

Wir finden somit den

Lehrsatz:

Die sämmtlichen doppelt periodischen Functionen zweiter Art und die sämmtlichen doppelt periodischen Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitspunkte lassen sich linear aus den Functionen zusammensetzen:

$$\frac{\vartheta_3[k](nv-b,\ n\tau)}{\vartheta_3(v-a,\ \tau)}\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

Hierbei kann n eine jede ganze positive Zahl bedeuten, b und a dagegen sind völlig willkürlich. In den fertigen Formeln treten n unbekannte Constanten linear auf.

Die Bestimmung derselben kann durch Auflösung eines linearen Gleichungssystems erfolgen, indessen ist dieselbe praktisch als werthlos zu bezeichnen. Es soll im Folgenden eine Darstellung derselben in expliciter Form gegeben werden.

§ 2.

Wirkliche Bestimmung der Constanten im ersten und letzten der im vorigen Paragraphen behandelten Fälle.

Im ersten und letzten der im vorigen Paragraphen behandelten Fälle ist es nicht schwer die Constantenbestimmung in expliciter Form durchzuführen.

Im ersten Falle beruht die Bestimmung auf einem Additionstheorem, welches zuerst vom Verfasser aufgestellt worden ist,

Wie nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht, kommt das Problem, die allgemeine ganze transcendente doppelt periodische

Function dritter Art in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln, darauf hinaus: das Product

$$\prod_{1}^{n}{}^{k}\, \vartheta_3(v - b_k)$$

in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln, wobei $b_1, b_2, \cdots, b_n$ beliebige Grössen bedeuten.

Nehmen wir dazu an, dass $v_1, v_2, \cdots, v_n$ beliebige von einander unabhängige Argumente bedeuten und betrachten das Product:

$$(1) \qquad P = \prod_{1}^{n}{}^{\varepsilon}\, \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau),$$

so kann dasselbe noch in eine andere Form gebracht werden.

Dazu setzen wir:

$$(2) \qquad v_\varepsilon' = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots + a_{\varepsilon n} v_n, \qquad \varepsilon = 1, \cdots, n$$

und lassen die ganzen Zahlen $a_{\varepsilon k}$ den Bedingungsgleichungen unterliegen:

$$(3)_a \qquad \begin{aligned} a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots + a_{\varepsilon n}^2 = m_\varepsilon, \qquad \varepsilon = 1, \cdots, n, \\ a_{\varepsilon 1} \cdot a_{k 1} + \cdots + a_{\varepsilon n} \cdot a_{k n} = 0, \qquad \varepsilon \gtrless k, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe sagt, den Gleichungen:

$$(3)_b \qquad \begin{aligned} \frac{a_{1\varepsilon}^2}{m_1} + \frac{a_{2\varepsilon}^2}{m_2} + \cdots + \frac{a_{n\varepsilon}^2}{m_n} = 1, \\ \frac{a_{1\varepsilon} \cdot a_{1k}}{m_1} + \cdots + \frac{a_{n\varepsilon} \cdot a_{nk}}{m_n} = 0; \end{aligned}$$

so folgt:

$$(4) \qquad P = \sum^{k} \prod_{1}^{n}{}^{\varepsilon}\, \vartheta_3[k_\varepsilon]\,(v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Summe ausgedehnt ist über alle $k_1 \cdots k_n$ nach den Moduln $m_1, \cdots, m_n$, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$k_1 \equiv a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \cdots + a_{1n} r_n \text{ mod. } m_1,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$k_n \equiv a_{n1} r_1 + a_{n2} r_2 + \cdots + a_{nn} r_n \text{ mod. } m_n.$$

Die Grössen $r_1 \cdots, r_n$ sind willkürliche ganze Zahlen.

In dieser Formel setzen wir an Stelle von $v_1 \cdots v_n$ resp. $v_1 - b_1, \cdots, v_n - b_n$. Die Grössen $v_1', \cdots, v_n'$ mögen dann übergehen in $v_1' - b_1', \cdots, v_n' - b_n'$, dann erhalten wir das Additionstheorem:

$$\prod_{1}^{n} \vartheta_3(v_\varepsilon - b_\varepsilon, \tau) = \sum^{k} \prod_{1}^{n} \vartheta_3[k_\varepsilon](v_\varepsilon' - b_\varepsilon', m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Summation in der angegebenen Weise zu nehmen ist.

Unterwerfen wir ferner die Zahlen $a_{\varepsilon k}$ den Bedingungsgleichungen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} &= n, \\ a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2} + \cdots + a_{\varepsilon n} &= 0, \qquad \varepsilon > 1, \end{aligned}$$

so erhalten wir die Gleichung, wenn noch $v_1 = v_2 = \cdots = v_n$ gesetzt wird:

$$(6) \quad \prod_{1}^{n} \vartheta_3(v - b_\varepsilon, \tau) = \sum^{k} \vartheta_3[k_1](nv - b_1', n\tau) \cdot \prod_{2}^{n} \vartheta_3[k_\varepsilon](-b_\varepsilon', m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Summation in der angegebenen Weise zu nehmen ist. Damit ist die gesuchte Darstellung in expliciter Form gefunden, vorausgesetzt, dass die Grössen $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ gegeben sind. Die Bestimmung derselben im allgemeinen Falle ist aber von dem Verfasser in den citirten Arbeiten gegeben worden, so dass dieser erste Fall vollkommen erledigt ist.

Noch einfacher gestaltet sich die Sache im letzten Fall. In demselben war:

$$(7) \qquad \frac{f(v)}{\prod_{1}^{n} \vartheta_3(v - a_\varepsilon)} = \sum_{1}^{n} c^{(\varepsilon)} \frac{\vartheta_3(v + w + a - a_\varepsilon)}{\vartheta_3(v - a_\varepsilon)}.$$

Setzen wir hierin an Stelle von v der Reihe nach:

$$a_\varepsilon + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2},$$

so erhalten wir die Constantenbestimmung in expliciter Form, wie es Herr Hermite angegeben hat.

§ 3.

Explicite Darstellung der allgemeinen doppelt periodischen Functionen dritter Art.

Es soll jetzt eine explicite Darstellung der doppelt periodischen Functionen dritter Art gegeben werden. Es geschieht das im wesentlichen durch passend gewählte Reduction auf das entsprechende Problem für doppelt periodische Functionen zweiter Art, welches wir als gelöst annehmen können. Die Möglichkeit dieser Reduction ist schon mehrfach bemerkt worden, insbesondere auch von Herrn Halphen. Derselbe weist sie aber zurück, weil sie erstens nicht völlig bestimmt ist und zweitens nicht zu Reihenentwickelungen führe. Es soll gezeigt werden, dass diese Uebelstände mit leichter Mühe vermieden werden können. Dazu gehen wir von der Formel aus:

$$(1)\qquad \vartheta_3(nv, n\tau) = c \cdot \prod_0^{n-1}{}_{\varepsilon}\, \vartheta_3\left(v + \frac{\varepsilon}{n}, \tau\right),$$

$$c = 2^{\frac{1-n}{3}} \frac{\vartheta_1'(0, \tau)^{\frac{n}{3}}}{\vartheta_1'(0, n\tau)^{\frac{1}{3}}}. \text{*)}$$

Sei nun eine doppelt periodische Function dritter Art $f(v)$ vorgelegt, welche den Gleichungen (1) des ersten Paragraphen Genüge leistet und welche m Unendlichkeitspunkte, $n+m$ Nullpunkte besitzt, so bilden wir den Ausdruck:

$$(2)\qquad \frac{f(v) \cdot \vartheta_3(nv, n\tau)}{c \cdot \prod_0^{n-1}{}_{\varepsilon}\, \vartheta_3\left(v + \frac{\varepsilon}{n}, \tau\right)} = F(v) \cdot \vartheta_3(nv, n\tau),$$

um in $F(v)$ eine doppelt periodische Function zweiter Art zu erhalten.

Es ergiebt sich somit der Satz:

Eine jede doppelt periodische Function dritter Art, welche mehr Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte besitzt, kann als Product von $\vartheta_3(nv, n\tau)$ und einer doppelt periodischen Function zweiter Art dargestellt werden.

Genau so ergiebt sich:

Eine jede doppelt periodische Function dritter Art, welche mehr Unendlichkeitspunkte als Nullpunkte besitzt, lässt sich als Quotient einer Function zweiter Art und $\vartheta_3(nv, n\tau)$ darstellen.

Hieraus folgt, dass wir als Primfunctionen die Grössen erhalten:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\vartheta_3(v-b)}{\vartheta_3(v-a)}\, \vartheta_3(nv, n\tau) \quad \text{und:} \\ &\frac{\vartheta_3(v-b)}{\vartheta_3(v-a)}\, \frac{1}{\vartheta_3(nv, n\tau)}. \end{aligned}$$

Die ersten lassen sich aber unmittelbar auf die Primfunctionen reduciren, die wir im ersten Paragraphen fanden. In der That, es gilt die Formel:

$$(4)\qquad \vartheta_3(x, n\tau) \cdot \vartheta_3(y, m\tau)$$
$$= \sum_0^{n+m-1}{}_{\mu}\, e^{\pi i(\mu^2 m\tau + 2\mu y)}\, \vartheta_3(ny - mx + nm\mu\tau,\ nm(n+m)\tau)$$
$$\cdot\, \vartheta_3(x + y + \mu m\tau,\ (n+m)\tau).$$

---

*) In dieser Formel ist n ungerade vorausgesetzt. Für ein gerades n besteht ein ähnlicher Ausdruck.

Diese Formel findet sich schon in der Habilitationsschrift von Herrn Schröter*). In Bezug auf dieselbe und ähnliche möge vor allem auf eine Arbeit von Herrn Rohde**) verwiesen werden.

In der aufgestellten Formel setzen wir an Stelle von $x : nv$, von $y : v - b$, von $m : 1$ um die Relation zu erhalten:

$$(5) \qquad \vartheta_3(v-b,\tau)\cdot\vartheta_3(nv,n\tau)$$
$$=\sum_0^n{}^{\mu}\, e^{\pi i[\mu^2\tau+2\mu(v-b)]}\,\vartheta_3(-nb+n\mu\tau,\, n(n+1)\tau)$$
$$\cdot\,\vartheta_3((n+1)v-b+\mu\tau,\,(n+1)\tau)$$
$$=\sum_0^n{}^{\mu}\,\vartheta_3[-\mu n]\,(-nb,\, n(n+1)\tau)$$
$$\cdot\,\vartheta_3[-\mu]\,((n+1)v-b,\,(n+1)\tau).$$

Damit ist die Reduction vollkommen erledigt. Setzen wir an Stelle von $\vartheta_3(v-b,\tau)\cdot\vartheta_3(nv,n\tau)$ den soeben gefundenen Ausdruck ein, so erhalten wir die explicite Darstellung aller Functionen dritter Gattung, bei denen $n > 0$ ist durch die Grössen:

$$\frac{\vartheta_3[k]\,(nv-b,\,n\tau)}{\vartheta_3(v-a,\,\tau)},$$

d. h. die gesuchte explicite Bestimmung der sämmtlichen unbekannten Constanten des ersten Paragraphen. Fassen wir die Resultate zusammen, so finden wir den

Lehrsatz:

Die sämmtlichen doppelt periodischen Functionen, bei denen $n \geqq 0$ *ist, lassen sich linear durch die Grössen:*

$$\frac{\vartheta_3[k]\,(nv-b,\,n\tau)}{\vartheta_3(v-a,\,\tau)}$$

ausdrücken, die sämmtlichen Functionen, bei denen $n < 0$ *ist, linear durch die Grössen:*

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\,\tau)}\,\frac{1}{\vartheta_3(nv,\,n\tau)}.$$

Die in den Formeln auftretenden Constanten können in expliciter Weise bestimmt werden.

Damit ist das Problem der allgemeinen Entwickelung in trigonometrische Reihen darauf reducirt, die Primfunctionen durch derartige Reihen darzustellen. Es ist das nach mannigfachen Methoden möglich.

---

*) Schröter. Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten etc. Breslau 1855.

**) Rohde. Zur Transformation der Thetafunctionen. Grunert's Archiv 2te Serie, Band 9.

Diejenige, welche sich zuerst darbietet und elementar durchführbar ist, besteht im ersten Falle in der Multiplication der Reihen, welche für

$$\vartheta_3[k](nv - b,\ n\tau) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\vartheta_3(v - a,\ \tau)}$$

aufgestellt sind, im zweiten Falle in der Multiplication der bekannten Reihen für:

$$\frac{\vartheta_3(v - b,\ \tau)}{\vartheta_3(v - a,\ \tau)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\vartheta_3(nv,\ n\tau)}.$$

Es soll hierauf bei anderer Gelegenheit näher eingegangen werden.

Den 2. Juni 1887.