

Über Teiler von Formen.

Von O. Dorner in Königsberg i. Pr.

Der Zweck dieser Arbeit ist, über einige Untersuchungen betreffend die Teilbarkeit der Formen von ν Variablen zu berichten, die in meiner Dissertation¹⁾ näher ausgeführt sind. Bevor ich jedoch zum eigentlichen Thema übergehe, möchte ich kurz die im Gebiete der Teilbarkeit in Frage kommenden Arbeiten und Methoden besprechen. Dieselben knüpfen im wesentlichen an die Namen: Kronecker, Brill, Gordan, Junker, Fr. Meyer und Hočevár. Aronhold²⁾, Brioschi³⁾ und Thaer⁴⁾ behandeln nur die kubische Ternärform und die Bedingung ihres Zerfallens in drei lineare Faktoren.

Die Kroneckersche Methode⁵⁾ lehrt, wie man allgemein die Faktoren einer Form ermitteln kann. Man setze

$x_1 = t^q \dots x_\nu = t^{q^{\nu-1}}$, wo $q > \mu$. (μ = höchster Grad der Form in einer der Variablen.) Die so entstehende Form $F(t)$ wird auf ihre Zerlegbarkeit geprüft und aus ihren Faktoren werden die dazu gehörigen möglichen Teiler von f gefunden; ob sie wirklich Teiler sind, lehrt die Division. Herr Brill⁶⁾ hat sich vornehmlich mit der Frage der Zerlegbarkeit einer Ternärform in lineare Faktoren beschäftigt. Er findet die Bedingungen dafür in der Gestalt:

$$\begin{aligned} 0 &= (s_j f_n)_n \\ 0 &= (s_j f_{n-1})_{n-1} + \dots + (n) (s_{j-1} f_n)_{n-1} \\ &\vdots \\ 0 &= s_j + s_{j-1} f_1 + s_{j-n} f_n, \end{aligned}$$

¹⁾ Dissertation: Königsberg i. Pr. 1908.

²⁾ Aronhold: Journ. f. r. u. a. Math. 55 (1858).

³⁾ F. Brioschi: Ann. math. pur. appl. 7 (1875/76).

⁴⁾ Thaer: Math. Ann. 14, 1879.

⁵⁾ L. Kronecker: Grundzüge einer arithmetischen Theorie d. algebraischen Größen. Berlin 1882. Vgl. auch für diese und die folgenden Zitate: Enzyklopädie der math. Wissenschaften, I. Artikel von Netto: Über Reduktibilität, sowohl in deutscher wie in französischer Ausgabe.

⁶⁾ Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1896. Math. Ann. 50, 1898. A. Brill: Über die Zerfällbarkeit der Ternärform in lineare Faktoren.

wobei die Form ist: $t^n f_0 + t^{n-1} f_1 + \dots + f_n = f(t)$, die s_j die Ausdrücke in den f sind, die die Potenzsummen der Wurzeln von $f(t) = 0$ darstellen und die Klammern den Überschiebungsprozeß andeuten. Diese Formeln für $j = n$ bis $3(n-1)^2$ enthalten das Kriterium für den Zerfall der Form in lineare Faktoren. Durch Hesses Verfahren der Ränderung mittels Linienkoordinaten u, v, w geht die linke Seite der ersten Gleichung für $j = n$ in eine ternäre Form über, die, wie Herr Gordan¹⁾ gezeigt hat, noch den Faktor $(ux + vy + wz)^2$ besitzt; wird durch ihn gehoben, so stellt das identische Verschwinden der erhaltenen Form die notwendige und hinreichende Bedingung dar für das Zerfallen von f in lineare Faktoren.

Herr Junker²⁾ behandelt ebenfalls die Kriterien für den Zerfall einer Form in Linearfaktoren mit Hilfe von symmetrischen Funktionen. Er zeigt, daß zwischen den Elementarfunktionen der symmetrischen Funktionen mehrerer Größenreihen Beziehungen bestehen und stellt für diese Relationen auch die Differentialgleichungen auf. Die Bedingungen dafür, daß die Form gleich sei dem Produkte von ν Linearfaktoren, ist dann dadurch gegeben, daß zwischen entsprechenden Koeffizienten die Relationen erfüllt sind, die für Elementarfunktionen gelten, wobei die Form die Gestalt habe: $a_{\nu,0} x_1^\nu + a_{\nu-1,1} x_1^{\nu-1} x_2 + \dots + 1 = 0$. Die Bestimmung der Faktoren geschieht hier so, daß die Koeffizienten von x_1 aus der Gleichung $\varphi = u^\nu - a_1 u^{\nu-1} + \dots = 0$ und die zugehörigen Koeffizienten der $x_2 \dots x_n: v, w \dots$ aus den Gleichungen:

$$v_i = \left(a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} + \dots \right) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad w_i = \left(a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \dots \right) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} \dots$$

berechnet werden. In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat er in § 7 die Differentialgleichungen der Zerfallsbedingungen einer ternären Form in invariantentheoretischer Hinsicht betrachtet und gezeigt, daß diese Differentialgleichungen die der Semiinvarianten sind.³⁾

Ein anderes Problem hat sich Herr Prof. W. Fr. Meyer⁴⁾ gestellt. Er löst allgemein die Aufgabe nach den Kriterien, denen eine Form genügen muß, wenn sie einen in einer der Unbekannten linearen in den andern rationalen Faktor hat. Es ergibt sich durch sukzessive Vereinfachung des Problems das Resultat: Das Kriterium dafür, daß eine ganze Funktion $F(\lambda^m \dots \mu_{n-1})$ einen rational be-

¹⁾ P. Gordan: Das Zerfallen der Kurven in gerade Linien, Math. Ann. 45, 1894.

²⁾ Junker: Die symmetrischen Funktionen und die Relationen zwischen deren Elementarfunktionen, 1894. Math. Ann. 45, 1894.

³⁾ Junker: Die Differentialgleichungen der Invarianten u. Semiinvarianten einer binären (ternären Form). Math. Ann. 64, 1907.

⁴⁾ Fr. Meyer: Zur Theorie der reduziblen ganzen Funktionen von n Variablen. Math. Ann. 30, 1887.

kannten Linearfaktor in λ enthält, wird gewonnen, indem F nach rational unabhängigen ganzen Funktionen von λ entwickelt wird:

$$F(\lambda^m, \mu_1 \dots \mu_d) = \sum_{i=0}^{i=d} \mu_i (\mu_1 \dots \mu_{n-1}) f_i^{(m)}(\lambda) \quad (n-1) \leq d. \quad \text{Dann}$$

müssen sich die μ_i aus je d erzeugenden Funktionen $\varphi_i^k(\mu)$ eines Fundamentalsystems linear und homogen komponieren lassen, so daß

$$\mu_i (\mu_1 \dots \mu_{n-1}) = \sum_{k=1}^{k=d} \varphi_i^{(k)}(\mu) \mu'_k, \quad \text{wo die } \mu, \mu' \dots \text{ von den } \mu_1 \dots \mu_{n-1}$$

und den Koeffizienten von $f_i(\lambda)$ rational abhängen. Hier ist ein Fundamentalsystem durch die Bedingungen charakterisiert:

$$\varphi_0^{(k)}(\lambda)^{\nu_k} f_0^m(\lambda) + \dots + \varphi_d^{(k)}(\lambda)^{\nu_k} f_d^m(\lambda) = 0, \quad \text{wenn } \sum_{i=1}^d \nu_i = m \text{ u. } d \text{ gleich}$$

der Anzahl der unabhängigen Funktionen von λ .

Gegenüber den Arbeiten über die linearen Teiler von Brill und Junker stellt Herr Hočevár¹⁾ die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß eine Form überhaupt Linearteiler enthält. Seine Voraussetzungen für die Betrachtungen sind dabei folgende:

1. Daß die Form keine vielfachen Teiler hat,
2. daß das Glied mit x_1^n vorkomme, wenn n der Grad der Form ist. Hieraus ergibt sich, daß f zu f_i teilerfremd und daß jeder Faktor von f von x_1 abhängt.

Das elegante Kriterium wird nun durch die Sätze gegeben.

I. Jeder Linearfaktor von f ist Teiler der dreireihigen Minoren der Hesseschen Determinante.

II. Jeder gemeinsame Faktor u von f und den dreireihigen Minoren von $H(f)$ läßt sich in Linearteiler zerspalten.

Satz I wird mit Hilfe einiger Determinantensätze bewiesen. Um Satz II zu begründen, betrachtet er zunächst den Fall $u=f$ und die aus $f=0$ sich ergebende Abhängigkeit der Veränderlichen x_1 von den übrigen. Für die n Werte von x_1 werden in der Umgebung von $a_1^{(1)}, a_2 \dots a_{\nu}, \dots a_1^{(n)}, a_2 \dots a_{\nu}$, die Potenzreihen angesetzt und es wird gezeigt, daß dieselben mit den ersten Gliedern abbrechen, wenn die Bedingung erfüllt ist. Werden die Variablen auf eine Seite gebracht, so erhält man die n linearen Faktoren von f .

¹⁾ Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie in Wien 1904. Hočevár: Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren.

In einer anderen Arbeit hat Hočevár¹⁾ dann diese Betrachtungen auf jeden gemeinsamen Teiler von f und den dreireihigen Minoren von $H(f)$ ausgedehnt. Ferner hat er Formeln²⁾ für die linearen und quadratischen Teiler angegeben. Die Formel für die linearen Faktoren verlangt nur die Kenntnis eines Wertsystems, für welches der Teiler verschwindet, und wird gegeben durch die erste Polare von f für dies System; die Formel für die quadratischen Teiler verlangt die Kenntnis zweier Wertsysteme, für die der Teiler $= 0$ und wird dargestellt durch eine Kombination der ersten und zweiten Polaren.

Es schien nun wünschenswert, worauf mich Herr Prof. Meyer freundlichst hinwies, den Hočevárschen Satz ohne Zuhilfenahme der Potenzreihen zu begründen. Hiebei ergab sich das Resultat, daß man die dreireihigen Minoren von $H(f)$ auch ersetzen kann durch die Ausdrücke in den Ableitungen von f , die sich bei Elimination der v_i und u_i aus den ersten und zweiten Ableitungen von $f = u \cdot v$, wo u linear, ergeben. Es lag daher nahe, entsprechende Eliminationsresultate für höhere Teiler zu bilden, was im folgenden bis zu den kubischen Faktoren durchgeführt wird. Man erhält gleichzeitig Formeln für lineare, quadratische und kubische Teiler, wobei diese durch ein Wertsystem charakterisiert sind, das sie zum Verschwinden bringt. Die Hočevárschen Voraussetzungen sind beibehalten.

I. Linearteiler.

§ 1. Algebraischer Beweis des Hočevárschen Satzes. II.

Mit diesem Satze gleichwertig ist der folgende: Jeder gemeinsame Teiler von f und $f_a f_\beta^2 - 2f_{a\beta} f_a f_\beta + f_\beta f_a^2$ zerfällt in Linearfaktoren; denn durch Verwendung des Eulerschen Satzes findet man, daß jeder gemeinsame Faktor der dreireihigen Minoren von $H(f)$ mit f auch in $f_a f_\beta^2 - 2f_{a\beta} f_a f_\beta + f_\beta f_a^2$ aufgeht; wird nämlich $(m-1)f \begin{vmatrix} f_{a\beta} f_{a\alpha} \\ f_{\beta\beta} f_{a\beta} \end{vmatrix}$ zu $f_a f_\beta^2 - 2f_{a\beta} f_a f_\beta + f_\beta f_a^2$ addiert, so erhält man dafür:

$$\sum x_i x_k \begin{vmatrix} f_{ik} f_{i\beta} f_{i\alpha} \\ f_{a\beta} f_{a\beta} f_{a\alpha} \\ f_{\beta\beta} f_{\beta\beta} f_{\beta\alpha} \end{vmatrix} \cdot 2m(m-1)^2 + \sum m \cdot (m-1)^2 x_i^2 \begin{vmatrix} f_{ii} f_{i\beta} f_{i\alpha} \\ f_{ai} f_{a\beta} f_{a\alpha} \\ f_{\beta i} f_{\beta\beta} f_{\beta\alpha} \end{vmatrix}.$$

¹⁾ Sitzungsberichte des Heidelberger Mathematikerkongresses 1905. Hočevár: Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren.

²⁾ Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie in Wien 1907. Hočevár: Über die Bestimmung der quadratischen Teiler algebraischer Formen.

Man denke sich nun f nach fallenden Potenzen von x_1 geordnet: $f(x_1 \dots x_\nu) = x_1^n + x_1^{n-1}(a_{1 \dots 2} x_2 + \dots) + \dots$. Die Bedingung dafür, daß f einen Linearfaktor von der Form $a_1 x_1 + \dots + a_\nu x_\nu$ hat, ist dann: $f\left(-\frac{(a_2 x_2 + \dots + a_\nu x_\nu)}{a_1}, x_2 \dots x_\nu\right) = 0$. Dieser Ausdruck sei $F(x_2 \dots x_\nu)$, er muß identisch verschwinden. Es werde F nach Potenzen von $x_2 \dots x_\nu$ entwickelt; dann ist jeder Koeffizient von F durch die n^{te} Derivierte von F nach dem Variablenprodukte, mit welchem er multipliziert ist, darstellbar. Diese Derivierte findet man, wenn man x_1 als von $x_2 \dots x_\nu$ abhängig faßt und dementsprechend ableitet. Es ergibt sich: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + f_i$. Allgemein:

$$I \frac{\partial^e F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_e}} = \sum_{\alpha=1 \dots e} \sum f_{1(\rho-\alpha) i_1 \dots i_\alpha} \frac{dx_1}{dx_{i_{\alpha+1}}} \dots \frac{dx_1}{dx_{i_e}}. \quad \text{Diese Summe}$$

wird ermittelt, indem man für jedes α die Produkte von je α der Variablen bildet; $f_{1(\rho-\alpha) i_1 \dots i_\alpha}$ nach jeder dieser Kombinationen differenziert, mit dem Produkte der Ableitungen von x_1 nach jeder der übrig bleibenden Veränderlichen multipliziert und dann summiert. Die Richtigkeit der Formel folgt unter Benützung des Schlusses von ρ auf $\rho + 1$ mit Berücksichtigung des Umstandes, daß

$$\frac{d^k x_1}{dx_{i_1} \dots dx_{i_k}} = 0 \text{ für } k > 1. \quad \text{Wird statt } \frac{dx_1}{dx_{i_e}}: \frac{-a_{i_e}}{a_1} \text{ geschrieben,}$$

so geht die Formel über in:

$$\sum (-1)^\alpha \sum f_{(\rho-\alpha) i_1 \dots i_\alpha} a_{i_{\rho+1}} \dots a_{i_e} a_1^\alpha = a_1^\rho \frac{\partial^e F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_e}}.$$

Die aus $f=0$ für x_1 sich ergebende Abhängigkeit von $x_2 \dots x_\nu$

$$\text{liefert nun bei Derivierung die Gleichungen: } f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + f_i = 0. \quad - \\ - f_1^3 \frac{d^2 x_1}{dx_i dx_k} = f_{11} f_i f_k - f_{i1} f_1 f_k - f_{k1} f_1 f_i + f_{ik} f_1^2 \text{ u. s. w.}$$

$$\text{Da } (f_i f_i^2 - 2 f_{il} f_i f_l + f_l^2 f_i^2) f_k^2 + (f_i f_k^2 - 2 f_{ik} f_i f_k + f_k^2 f_l^2) f_i^2 - \\ - (f_i f_k^2 - 2 f_{ik} f_i f_k + f_k^2 f_i^2) f_l^2 = 2 f_i f_k [f_l f_i f_k - f_{li} f_l f_k - \\ - f_{lk} f_l f_i + f_{ik} f_l^2], \text{ so ist } \frac{d^2 x_1}{dx_i dx_k} = 0 \text{ für jedes Wertsystem, das}$$

den gemeinsamen Teiler von f und den dreireihigen Minoren von $H(f)$ verschwinden läßt. Ebenso ist es mit den höheren Ab-

leitungen $\frac{d^2 x_1}{dx_{i_1} \dots dx_{i_e}}$; denn man hat für dieselben den Wert:
 $Uu + V\left(\frac{dx_1}{dx_{i_1}} + f_{i_1}\right)^1$, wo U eine Funktion der $x_2 \dots x_v$. Es ergibt
 sich bei fortgesetzter Derivierung so die Beziehung:

$\sum (-1)^a \sum f_{i_2 - a i_1 \dots i_a} f_1^\alpha \dots f_{i_e} = 0$. Die Vergleichung dieser
 Formel mit der früheren, für $\frac{\partial^e F}{dx_{i_1} \dots dx_{i_e}}$ gefundenen lehrt, daß
 für $a_1 = f_1 \dots a_v = f_v$, $\frac{\partial^n F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_e}} = 0$; wobei $f_1 \dots f_v$ die kon-
 stanten Werte sind, welche man erhält, wenn in $f_1 \dots f_v$ für
 $x_1 \dots x_v$ Werte eingesetzt werden, für die $u=0$, während $f_1 \neq 0$.
 Am einfachsten verfährt man so, daß man für $x_2 \dots x_v$ in $u=0$
 Werte $\xi_2 \dots \xi_v$ setzt und die m sich daraus ergebenden $\xi_1^{(1)} \dots \xi_1^{(m)}$
 berechnet. Die $\xi_1^{(1)} \dots \xi_1^{(m)}$ müssen alle voneinander verschieden sein.

Ein Spezialfall des Hočevarschen Satzes ist der Satz, daß
 f in Linearfaktoren zerfällt, wenn f selbst in den dreireihigen
 Minoren von $H(f)$ aufgeht. Es läßt sich ferner zeigen, daß jeder
 gemeinsame Teiler u von f und $f_{\alpha\beta} f_{\beta}^2 - 2f_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} + f_{\beta} f_{\alpha}^2 = F_{\alpha\beta}$
 in $U_{\alpha\beta}$ aufgeht. Denn für $f=u$. v ist $F_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} \cdot v^3 + u(\quad)$. Ebenso
 gilt, daß durch Ausübung der linearen Transformation auf f ein
 Faktor, der f und den $F_{\alpha\beta}$ gemeinsam war, nicht verloren geht,
 denn durch:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + \dots \\ x_2 &= b_1 x'_1 + b_2 x'_2 + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{geht, z. B. } F_{13}^{22} \text{ über in } (a_1 b_2 - a_2 b_1) F'_{12} + \\ &+ (a_1 b_3 - a_3 b_1) F'_{13} + 2(a_1 c_2 - c_1 a_2)(a_1 c_3 - \\ &- a_3 c_1)(f_1^2 f_{23} - f_1 f_2 f_{13} - f_1 f_3 f_{12} + \\ &+ f_{11} f_2 f_3) + \dots \end{aligned} \quad \text{Für die } F_{ik}^{22} \text{ gelten}$$

entsprechende Formeln. Die Faktoren der doppelten Produkte
 lassen sich durch die F'_{ik}^{22} darstellen und es geht also jeder Teiler
 von f' und den F'_{ik}^{22} in F_{ik}^{22} auf. Bei Anwendung der umgekehrten
 Transformation erkennt man daher die Richtigkeit der Behauptung.

¹⁾ Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie in Win. Hočevár: Über die
 Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren.

§ 2. Geometrische Begründung des Satzes.

Für Kurven hat Hočev ar schon den Beweis geführt. Es hat die Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ mit $H(f) = 0$ alle Punkte gemein, für welche die erste Krümmung $= 0$, und nur solche. Sind daher alle Punkte von $u = 0$ zugleich Punkte von $H(f) = 0$, so ist jeder Punkt Wendepunkt, d. h. die Kurve zerfällt in Gerade. Die Ausdehnung des Beweises auf Flächen gelingt folgendermaßen:

Hat bei Zugrundelegung von Tetraederkoordinaten die Fläche $f(x_1 \dots x_4) = 0$ die Eigenschaft, daß die durch das Nullsetzen der dreireihigen Minoren von $H(f)$ definierten Flächen alle Punkte von $u = 0$ enthalten, so wähle man eine beliebige Ebene $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$ und mache sie durch Koordinatentransformation zu einer der Koordinatenebenen. Da die Gesamtheit der dreireihigen Minoren von $H(f)$ ein invariantes Gebilde darstellt, so wird durch lineare Transformation die Eigenschaft von f gegenüber den dreireihigen Minoren von $H(f)$ nicht berührt. Die Schnittkurve der Ebene mit $f = 0$ hat nun die Gleichungen:

$$\xi_1 = 0, f(\xi'_2, \xi'_3, \xi'_4) = 0. \text{ Durch } \xi_2 = \frac{\xi'_2}{\sin \varphi_2}, \xi_3 = \frac{\xi'_3}{\sin \varphi_3}, \xi_4 = \frac{\xi'_4}{\sin \varphi_4}$$

gehe $f(\xi'_2, \xi'_3, \xi'_4) = 0$ in $f(\xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$ über. Die φ_i mögen die Neigungswinkel von $\xi_1 = 0$ gegen $\xi'_i = 0$ darstellen. Diese Transformation bedeutet, daß die Lote auf die Koordinatenebenen $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ durch Lote auf die Schnittlinien der Ebenen $\xi_i = 0$ und $\xi_1 = 0$ für die Punkte von $\xi_1 = 0$ zu ersetzen sind. Die Hessesche Kurve von $f(\xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$ hat dann alle Punkte $u_1 = 0$ mit $f_1 = 0$ gemein. Daher schneidet die Ebene $\xi_1 = 0$ aus der Fläche $u = 0$ nur Gerade aus, und da dies für jede beliebige Ebene gilt, so zerfällt die Fläche in Ebenen.

Die Verallgemeinerung auf n dimensionale Gebilde kann entsprechend durchgeführt werden.

Als ein günstiges Beispiel möge die kubische ternäre Form behandelt werden. Sie sei: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 6m x_1 x_2 x_3$. Die Hočev arsche Bedingung für $u = f$ verlangt hier, daß $H(f) = \text{const. } f$. Man findet daraus für m die Gleichung $m^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Es braucht nur $m = \frac{1}{2}$ berücksichtigt zu werden, da die beiden anderen Fälle durch $y_1 = \varepsilon x_1$, $y_2 = \varepsilon^2 x_1$ sich auf diesen zurückführen lassen. $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3$ zerfällt dann in die drei Faktoren: $(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)$.

§ 3. Aufstellung eines allgemeinen Ausdruckes in den Ableitungen, der jeden Linearfaktor von f enthält.

Definition: Unter $\sum f_{i_1 \dots i_\rho} f_{i_\rho+1} \dots f_{i_{2\rho}} (-1)^\varphi$ sei folgende Summe verstanden: Aus dem Anfangsgliede $(c_0) = f_{i_1 \dots i_\rho} f_{i_\rho+1} \dots f_{i_{2\rho}}$ mögen ρ weitere Glieder dadurch erhalten werden, daß je einer der Indizes $1 \dots \rho$ mit einem der $\rho+1 \dots 2\rho$ so vertauscht werde, daß für jeden der Indizes $1 \dots \rho$ und $\rho+1 \dots 2\rho$ ein Glied vorkommt, in welchem er an anderer Stelle steht, wie in (c_0) . Der Komplex dieser Glieder sei (c_1) . Es möge 1 und $\rho+1$, 2 und $\rho+2, \dots \rho$ und 2ρ transponiert werden. Aus (c_1) findet man $\binom{n}{2}$ Glieder, indem man im ersten Gliede von (c_1) 2 und $\rho+2$, 3 und $(\rho+3) \dots \rho$ und 2ρ permutiert; im zweiten 3 und $\rho+3$ u. s. w.; entsprechend bei den übrigen Gliedern. Die Summe aller dieser Glieder sei (c_2) . Bei Anwendung derselben Bildungsregel findet man aus (c_2) : (c_3) u. s. w. (c_0) wird wieder durch ein Glied dargestellt. Das Zeichen der (c) sei durch $\varphi = \text{Index der } (c)$ bestimmt. Also $c_0 = +$, $c_1 = -$ u. s. w. Es gilt nun der Satz:

$\sum f_{i_1 \dots i_\rho} f_{i_\rho+1} \dots f_{i_{2\rho}} (-1)^\varphi$ enthält jeden Linearfaktor von f . (I.)

Beweis: Sei $f = u \cdot v$, wo u linear in den x_i , so hat man für $f_{i_1 \dots i_\rho} : u v_{i_1 \dots i_\rho} + u_{i_1} v_{i_2 \dots i_\rho} + u_{i_2} v_{i_1 i_3 \dots i_\rho} + \dots$. Für f_i ergibt sich: $u_i v + u v_i$.

Es werde $f_{i_{v_1} \dots i_{v_\rho}} f_{i_{v_\rho+1}} \dots f_{i_{v_{2\rho}}}$ mit Glied und $v_{i_{v_1} \dots i_{v_{\rho-1}}} u_{i_{v_\rho}} \dots \dots u_{i_{v_{2\rho}}}$ mit Ausdruck bezeichnet.

Der Satz ist bewiesen, wennargetan ist, daß die Summe der Ausdrücke in \sum , die u nicht enthalten, verschwindet. Es zeigt sich, daß jeder Ausdruck von (c_0) in (c_1) vorkommt, jeder noch übrige von (c_1) in (c_2) u. s. w.; denn da zwei Glieder, die sich nur durch eine Transposition unterscheiden, immer einen Ausdruck gemeinsam haben, ergibt sich aus der Zahl der Ausdrücke von (c_0) und der der Glieder in (c_1) , daß alle Ausdrücke von (c_0) in (c_1) auftreten. Es enthält hiebei jedes Glied von (c_1) denjenigen Ausdruck von (c_0) , bei welchem im Index von v nicht der vertauschte Index vorkommt. Daß die Glieder von (c_2) alle noch übrigen Ausdrücke von (c_1) enthalten, folgt wieder aus denselben Gründen wie bei (c_0) und (c_1) ; z. B. erscheinen in (c_2) alle Ausdrücke von (c_1) , in denen $\rho+k$ im Index von v vorkommt; d. h. alle noch übrigen des Gliedes, in dem $\rho+k$ mit k vertauscht war. Ebenso läßt sich beweisen, daß jeder noch übrige Ausdruck von (c_2) in (c_3) aufgeht; denn von den noch übrigen Gliedern von $f_{i_1 \dots i_{\rho+k} i_{k+1} \dots i_{\rho+v} i_{v+1} \dots i_{\rho} f_{i_{\rho+1}} \dots f_{i_{\rho+k-1}} f_{i_k} \dots f_{i_{\rho+v-1}} f_{i_v} \dots f_{i_{2\rho}}$

erscheint das erste in $f_{i_{\varrho}+1} \dots f_{i_{\varrho}+k} f_{i_{\varrho}+k+1} \dots f_{i_{\varrho}+r} f_{i_{\varrho}+r+1} \dots f_{i_{\varrho}} f_{i_1} \dots$
 $\dots f_{i_{\varrho}+k-1} f_{i_k} f_{i_{\varrho}+k+1} f_{i_{\varrho}+r-1} f_{i_r} f_{i_{\varrho}+r+1} f_{i_{2\varrho}}$ u. s. w. In ent-
 sprechender Weise schließt man, daß die noch vorhandenen Aus-
 drücke von (c_3) in (c_4) erscheinen u. s. f. Bei Berücksichtigung
 der Vorzeichen sieht man daher, daß alle diese Ausdrücke sich
 fortheben, da im vorletzten n übrig bleiben und im letzten n vor-
 handen sind.

Aus (I) lassen sich durch Gleichsetzen mehrerer der i_k Fol-
 gerungen ziehen.

Wird z. B. in $\sum f_{i_1 \dots i_{\varrho}} f_{i_{\varrho}+1} \dots f_{i_{2\varrho}} (-1)^{\varphi}$, $i_1 = i_2 = \dots i_{\varrho}$
 gesetzt, so verwandelt sich die Summe in die folgende:

$\sum_{\varphi=1 \dots \varrho} (-1)^{\varphi} \sum_{(i_{\varrho}-\varphi)} f_{i_1}^{i_{\varrho}+1} \dots f_{i_{\varrho}+\varphi} f_{i_1}^{\varphi} f_{i_{\varrho}+\varphi+1} \dots f_{i_{2\varrho}}$, unter welcher
 dasselbe zu verstehen ist, wie unter der entsprechenden in § 1.
 Also: $\sum_{\alpha=1 \dots \varrho} (-1)^{\alpha} \sum_{(i_{\varrho}-\alpha)} f_{i_1}^{\alpha} f_{i_{\varrho}}^{\alpha} f_{i_2}^{\alpha} \dots$ enthält jeden Linear-
 faktor von f . (II.)

Setzt man weiter: $i_1 = i_2 = \dots i_{\varrho} = \mu$, so folgt:

$f_{\varrho} f_{\mu}^{\varrho} - \binom{\varrho}{1} f_{\mu} f_{\mu} f_{\mu}^{\varrho-1} + \dots (-1)^{\varrho} f_{\mu}^{\varrho} f_{\mu}^{\varrho}$ enthält jeden Li-
 nearfaktor von f . (III.) Ich schreibe für diesen Ausdruck F_{μ}^{ϱ} .

Eine Folgerung ist die, daß die abgeleiteten Summen f ent-
 halten, wenn f selbst in Linearfaktoren zerfällt. Daher enthalten
 die Komplexe (III) f immer, wenn eine Binärform vorliegt, mit
 den Veränderlichen x_{ν} und x_{μ} . Für $\varrho=2$ ist $F_{\mu}^2 = \text{const. } H(f) \cdot f$.

II. Höhere Teiler.

Die Methode, die ich hier zur Ermittlung von Teilern ver-
 wendet habe, besteht darin, daß man aus der Reihe der Ableitungen
 von f , die unter der Voraussetzung des Vorhandenseins von Faktoren
 gebildet werden, die gesuchten Unbekannten ermittelt, wie dies
 Hočevár für Linearteiler bereits durchgeführt hat. Voraussetzung
 für die Möglichkeit der Berechnung ist vor allem die, daß die zu
 verwendende Gleichung algebraisch auflösend wird und daß der zu
 berechnende Faktor der einzige von f ist, der für dies Wertsystem
 verschwindet. Da die Methode die charakteristische Eigenschaft
 der Formen u vom m^{ten} Grade verwendet, nämlich die, daß
 $\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i \dots} = 0$, so war von vornherein zu erwarten, daß man auf
 diesem Wege Teiler m^{ten} Grades von $f^{(n)}$ würde ermitteln können.

Da die Ausdrücke recht kompliziert werden, möchte ich mich darauf beschränken, die Formeln für die Teiler zweiten und dritten Grades herzuleiten. Für quadratische Teiler muß man bis zu den vierten Ableitungen vorgehen, für die kubischen Faktoren habe ich außerdem noch die fünften und sechsten Derivierten verwandt. Die Formeln werden zunächst für die Ternärform gegeben.

Es möge die Tabelle der typischen zu verwendenden Ableitungen folgen:

$$\text{I. } f_i - u v_i = u_i v.$$

$$\text{II. } f_i - u v_i = v u_i + 2 u_i v_i$$

$$f_{ik} - u v_{ik} = u_i v_k + u_k v_i + v u_{ik}.$$

$$\text{III. } f_i - u v_i = u_i v + 3 u_i v_i + 3 u_i v_i$$

$$f_{ik} - u v_{ik} = u_{ik} v + u_i v_k + u_k v_i + 2 u_{ik} v_i + 2 u_i v_{ik} + u_k v_i$$

$$f_{ikl} - u v_{ikl} = u_{ikl} v + u_{ik} v_l + u_{il} v_k + u_{kl} v_i + v_{ik} u_l + v_{il} u_k + v_{kl} u_i$$

$$\text{IV. } f_i - u v_i = 4 u_i v_i + 6 u_i v_i + 4 u_i v_i$$

$$f_{ik} - u v_{ik} = u_i v_k + 3 u_{ik} v_i + 3 u_{ik} v_i + 3 u_i v_{ik} + 3 u_i v_{ik} + u_k v_i$$

$$f_{ik} - u v_{ik} = 2 v_k u_{ik} + 2 v_i u_{ik} + u_i v_k + 4 u_{ik} v_{ik} + u_k v_i + 2 u_i v_{ik} + 2 u_k v_{ik}$$

$$f_{ikl} - u v_{ikl} = v_l u_{ik} + v_k u_{il} + 2 u_{ikl} v_i + v_{kl} u_i + 2 u_{ik} v_{il} + 2 u_{il} v_{ik} + u_{kl} v_i + 2 u_i v_{ikl} + u_k v_{il} + u_i v_{ik}.$$

$$\text{V. } f_i - u v_i = 10 u_i v_i + 10 u_i v_i + 5 u_i v_i$$

$$f_{ik} - u v_{ik} = 4 u_i v_{ik} + 6 u_{ik} v_i + 6 u_i v_{ik} + 4 u_{ik} v_i + 4 u_i v_{ik} + u_k v_i$$

$$f_{ik} - u v_{ik} = u_i v_k + 6 u_{ik} v_{ik} + 3 u_{ik} v_i + 3 u_i v_{ik} + 6 u_{ik} v_{ik} + u_k v_i + 3 u_i v_{ik} + 2 u_k v_{ik}$$

$$f_{ikl} - u v_{ikl} = u_i v_{kl} + 3 u_{ik} v_{il} + 3 u_{il} v_{ik} + 3 u_{ikl} v_i + 3 u_i v_{ikl} + 3 u_{ik} v_{il} + 3 u_{il} v_{ik} + u_{kl} v_i + 3 u_i v_{ikl} + u_k v_{il} + u_i v_{ik}$$

$$f_{ikl} - u v_{ikl} = 2 u_{ik} v_{kl} + u_{il} v_k + u_{ik} v_{il} + 4 u_{ikl} v_{ik} + u_{kl} v_i + u_i v_{kl} + 4 u_{ik} v_{ikl} + u_{il} v_{ik} + u_k v_{il} + 2 u_{kl} v_{ik} + 2 u_i v_{ikl} + 2 u_k v_{ikl} + u_i v_{ik}.$$

Es ist hier noch V_{ik}^{22} zu ermitteln. Zunächst werde $v_i f_k^2 - v_{ik} f_i f_k$ berechnet. Dazu multipliziere ich in III Gleichung 1 mit f_k^2 , Gleichung (2) mit $-f_i f_k$ und bilde ihre Summe. Es wird so:

$$(v_i f_k^2 - v_{ik} f_i f_k) = [f_k^3 f_i - f_k^2 f_i f_{ik} - f_k^3 u_i + f_k^2 f_i u_{ik} + \\ + f_k^2 u_i (f_i v_k - f_k v_i) + 2 v_i f_k (u_{ik} f_i f_k - u_i f_k^2)] : 2 f_i f_k \quad (\Gamma'_1)$$

und daher ist $V_{ik}^{22} = [(f_k^3 f_i + f_i^3 f_k - f_i^2 f_k f_{ik} - f_i f_k^2 f_{ik}) - (f_k^3 u_i + \\ + f_i^3 u_k - f_i^2 f_k u_{ik} - f_i f_k^2 u_{ik}) + (f_k v_i - f_i v_k) F_{ik}^{22} + \\ + 2 (u_k f_i^2 - u_i f_k^2) - 2 f_k v_i F_{ik}^{22}] : 2 f_i f_k \quad (\Gamma'').$ Es möge

$f_i f_k^3 + f_k f_i^3 - f_{ik} f_i f_k^2 - f_{ki} f_i^2 f_k = F_{ik}^{33}$ gesetzt werden. Ferner

geht bei Bildung von $(\Pi(1)) f_k^2 - (\Pi(1)') f_i^2$ die Gleichung hervor:

$$(A_2): f_k^2 f_i - f_i^2 f_k = 2 f_i f_k (v_i f_k - f_i v_k) + (u_i f_k^2 - u_k f_i^2);$$

entsprechend findet man:

$$f_i f_k f_{ik} - f_k f_i^2 = f_i f_k (f_k v_i - f_i v_k) + u_{ik} f_i f_k - u_k f_i^2.$$

Mit Hilfe der Relationen (A_1) , (A_2) , (A_3) , bei Verwendung von (B_1) kann man weiter für $(ikl) = (1, 2, 3)$ die u_{ik} durch u_{11} ausdrücken. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= [2 f_1 f_2 (F_{12}^{12} - U_{12}) + 3 F_{12}^{22} (f_1^2 f_2 - f_2^2 f_1)] : 3 f_1^2 F_{12}^{22} + u_{11} \frac{f_2^2}{f_1^2} \\ u_3 &= [2 f_1 f_3 (F_{13}^{13} - U_{13}) + 3 F_{13}^{22} (f_1^2 f_3 - f_3^2 f_1)] : 3 f_1^2 F_{13}^{22} + u_{11} \frac{f_3^2}{f_1^2} \\ u_{12} &= [f_1 f_2 (F_{12}^{12} - U_{12}) + 3 F_{12}^{22} (f_1 f_2 f_{12} - f_2^2 f_1)] : 3 f_1 f_2 F_{12}^{22} + u_{11} \frac{f_2}{f_1} \\ u_{13} &= [f_1 f_3 (F_{13}^{13} - U_{13}) + 3 F_{13}^{22} (f_1 f_3 f_{13} - f_3^2 f_1)] : 3 f_1 f_3 F_{13}^{22} + u_{11} \frac{f_3}{f_1} \end{aligned} \right\} (B'_1)$$

$$u_{23} = f_3 \left[\frac{2 \begin{smallmatrix} F_{12} \\ 33 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} U_{12} \\ 33 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} f_1 f_2 \\ 33 \end{smallmatrix} - 3 \begin{smallmatrix} F_{12} \\ 22 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (f_1 f_2^2 - f_2^2 f_1^2) \\ 2 \end{smallmatrix}}{6 \begin{smallmatrix} F_{12} \\ 22 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} f_1^3 f_2 \\ 22 \end{smallmatrix}} \right] +$$

$$+ f_2 \left[\frac{2 \begin{smallmatrix} F_{13} \\ 33 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} U_{13} \\ 33 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} (f_1 f_3^2 - f_1^2 f_3) \\ 2 \end{smallmatrix}}{6 \begin{smallmatrix} f_1^2 f_3 \\ 22 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} F_{13} \\ 22 \end{smallmatrix}} \right] - \frac{F_{23}}{2 f_2 f_3} + \frac{u_{11} f_2 f_3}{f_1^2}.$$

Diese Formeln (B'_1) genügen in Verbindung mit einer aus (Γ''_1) zu folgernden zur Darstellung eines quadratischen Teilers; denn ein solcher ist gegeben durch

$$u_{11} x_1^2 + 2 u_{12} x_1 x_2 + 2 u_{13} x_1 x_3 + 2 u_{23} x_2 x_3 + x_2^2 u_{22} + x_3^2 u_{33} + \dots (Q).$$

Bei Benützung von (A_2), (B_1) und (Γ_1) ergibt sich nämlich aus (Γ'_1):

$$(f_i - u_i) = \left[\frac{-3 f_i f_k \begin{smallmatrix} F_{ik} \\ 22 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} F_{ik} \\ 44 \end{smallmatrix} + 9 F_{ik}^2 \begin{smallmatrix} (F_{33} - U_{33}) \\ ik \end{smallmatrix}}{9 \begin{smallmatrix} F_{ik}^3 \\ 22 \end{smallmatrix} f_k} \right] f_i +$$

$$+ \left[\frac{(\begin{smallmatrix} F_{ik} \\ 33 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} U_{ik} \\ 33 \end{smallmatrix}) \begin{smallmatrix} (3 F_{ik}^2 + 4 \begin{smallmatrix} F_{ik} \\ 33 \end{smallmatrix} f_i f_k - 6 \begin{smallmatrix} F_{ik} \\ 22 \end{smallmatrix} (f_i f_k^2 - f_k^2 f_i^2)) \\ 22 \end{smallmatrix}}{9 \begin{smallmatrix} F_{ik}^3 \\ 22 \end{smallmatrix} f_k} \right] f_i \quad (\Gamma'''_1).$$

Setzt man die Werte der u_{ik} in Q ein, so findet man die Formel:

$$(I') \quad \frac{P_1^2}{f_1^2} (u_1 - f_1) + \frac{2}{3} \frac{P_1}{f_1} \left(\frac{F_{13}}{F_{22}} x_3 + \frac{F_{12} x_2}{F_{22}} \right) + P_2,$$

wo unter P_1 : $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$ und unter P_2 : $f_{11} x_1^2 + 2 f_{12} x_1 x_2 + f_{22} x_2^2 + 2 f_{13} x_1 x_3 + 2 f_{23} x_2 x_3 + f_{33} x_3^2$ verstanden ist. Bei Verwendung von (Γ'''_1) lautet die Formel, in welcher der Übersichtlichkeit halber

$$\frac{F_{13} x_3}{F_{22}} + \frac{F_{12} x_2}{F_{22}} + \left(\frac{F_{11} x_1}{F_{22}} \right) = G_1 \quad \text{den Faktor von } P_1$$

darstellen möge:

$$P_1^2 \left[3 f_1 f_2 \begin{smallmatrix} F_{12} \\ 44 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} F_{13} \\ 22 \end{smallmatrix} - 9 F_{12}^2 \begin{smallmatrix} F_{13} \\ 22 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} F_{13} \\ 12 \end{smallmatrix} - 2 F_{12} \begin{smallmatrix} (3 F_{12} (f_2 f_1^2 - f_1^2 f_2^2) + 2 f_1 f_2 F_{12}) \\ 22 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} F_{12} \\ 33 \end{smallmatrix} \right. \\ \left. - 3 F_{12} \begin{smallmatrix} F_{12} \\ 33 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} F_{12}^2 \\ 22 \end{smallmatrix} : 9 F_{12}^3 f_1 f_2 + \frac{2}{3} \frac{P_1 \cdot G_1}{f_1} + P_2 \right] \quad (I).$$

Diese Formel gilt für eine Form von n Veränderlichen, wenn unter P_1, P_2 und G_1 die entsprechenden Ausdrücke verstanden werden, wie man aus dem durchaus symmetrischen Bau hinsichtlich der x_2 und x_3 in (I') ersieht. Man kann auch leicht vollständig symmetrischer Schreibweise sich bedienen, doch liefert dieses keine wesentliche Vereinfachung.

Macht man die Annahme, daß ein Wertsystem bekannt sei, das einen quadratischen Teiler u zu 0 macht, so ist der Teiler aus der angegebenen Formel zu berechnen. Läßt das Wertsystem einen linearen Faktor verschwinden, so sind die F alle $= 0$. Der Ausdruck wird daher unbestimmt.

Über die Wahl des Wertsystems ist folgendes zu bemerken. Erstens ist darauf zu achten, daß kein anderer Teiler von f für dasselbe annulliert wird, da sonst $v = 0$. Die u_{ik} sind ja $(u_{ik} \cdot v)$. Ferner dürfen die f_i nicht verschwinden und ebensowenig die F_{ik} ,
22

wenn die Nullstelle keinem linearen Teiler entspricht. Diesen Bedingungen für die Wertsysteme kann man, falls f keine Linear-
teiler enthält, immer genügen; denn aus den über f gemachten Voraussetzungen folgt, daß stets Wertsysteme existieren, für die $u = 0, v \neq 0, f_i \neq 0$. Ferner haben für Ternärformen F_{12} oder F_{13} ,
22 22

nur dann mit f einen gemeinsamen Teiler, wenn derselbe in Linear-
faktoren zerfällt, so daß stets Wertsysteme gefunden werden können, die einen nicht zerfallbaren quadratischen Teiler annullieren, während die $F_{ik} \neq 0$. Für Formen von mehr als drei Veränderlichen
22

kann es vorkommen, daß f und mehrere der F_{ik} einen gemein-
22
samen Teiler haben, der nicht in Linearteiler zerfällt; doch kann man dann mit Hilfe von linearer Transformation auf ein solches f kommen, das mit keinem seiner F_{ik} einen gemeinsamen Faktor
22

hat, was bei geeigneter Wahl der Transformationen sich leicht ergibt.

§ 5.

Es mögen nun Ausdrücke angegeben werden, die jeden quadratischen Faktor von f enthalten.

Zwischen den drei Formeln (B_1) besteht eine Relation, da:
 $f_l(v_i f_k - f_i v_k) + f_k(v_l f_i - f_l v_i) + f_i(f_l v_k - v_l f_k) = 0$. Man erhält:

$$\begin{aligned} (B_2) \quad & F_{ik} f_l F_{il} F_{kl} + F_{kl} f_i F_{ik} F_{il} + F_{li} f_k F_{kl} F_{ki} = \\ & = U_{ik} f_l F_{li} F_{lk} + U_{kl} f_i F_{ik} F_{il} + U_{li} f_k F_{ik} F_{kl}. \quad \text{Da } f_{ikl} = f_{ikl} - \\ & - uv_{ikl}, \text{ so ist die linke Seite: } F_{ik} f_l F_{kl} F_{il} + F_{kl} f_i F_{il} F_{ik} + \\ & + F_{li} f_k F_{kl} F_{li} - u(V_{ik} f_l F_{il} F_{kl} + V_{kl} f_i F_{ik} F_{il} + V_{li} f_k F_{ik} F_{kl}). \end{aligned}$$

33 22 22 33 22 22 33 22 22 33 22 22 33 22 22

Wenn also $U_{ik}, U_{kl}, U_{li} = 0$, was immer für $u_{ikl} = 0$ eintritt, so ist die linke Seite durch u teilbar: Es gilt also der Satz:

$$F_{ik} f_l F_{il} F_{kl} + F_{kl} f_i F_{ik} F_{il} + F_{li} f_k F_{ik} F_{kl} = A_{ikl} \text{ enthält}$$

jeden quadratischen Teiler von f . Ich schreibe hiefür A_{ikl} .

Ferner eliminiere ich mit Hilfe der dritten Gleichung in III die $v_{\alpha\beta}$, wobei am besten wie folgt verfahren wird: Aus der ersten Beziehung in III durch Vertauschung von i mit k und l und aus der zweiten durch Vertauschung von (ik) mit (kl) und (li) werden je zwei andere abgeleitet. Diese Formeln mögen mit (1'), (1''), (2'), (2'') bezeichnet werden. Es werde gebildet: $(3) f_i^2 f_k^2 f_l^2 \cdot 6 + (1) f_l^3 f_k^3 + (1') f_i^3 f_l^3 + (1'') f_k^3 f_i^3 - 3((2) f_l^3 f_k^2 f_i + f_i^3 f_l^2 f_k (2') + f_k^3 f_i^2 f_l (2''))$. Dies ergibt: $(B_3) 6 f_{ikl} f_i^2 f_k^2 f_l^2 + f_i^3 f_k^3 f_l + f_k^3 f_l^3 f_i + f_i^3 f_l^3 f_k - 3(f_{ik} f_i f_k^2 f_l^3 + f_{kl} f_k f_l^2 f_i^3 + f_{li} f_l f_i^2 f_k^3) + 3[F_{ik} f_l^2 f_k (v_i f_l - f_i v_l) + F_{kl} f_i^2 f_l (v_k f_i - f_k v_i) + F_{il} f_k^2 f_i (v_l f_k - f_l v_k)] - (6 u_{ikl} f_i^2 f_k^2 f_l^2 + u_l f_i^3 f_k^3 + u_i f_k^3 f_l^3 + u_k f_i^3 f_l^3 - 3(u_{ik} f_i f_k^2 f_l^3 + f_k f_l^2 f_i^3 u_{kl} + f_l f_i^2 f_k^3 u_{li}))$. Setzt man

für das Aggregat der $f_{ikl} f_i^a f_k^b f_l^c$: F_{ikl} , so erhält man den Satz:

$$F_{ikl} F_{ik} F_{il} F_{kl} + f_l^2 f_k F_{il} F_{ik} F_{lk} + f_i^2 f_l F_{ki} F_{kl} F_{li} + f_k^2 f_i F_{il} F_{ik} F_{lk}$$

enthält jeden quadratischen Teiler von f .

Man kann diesem zweiten Ausdrucke noch eine andere Form geben; durch Elimination der $v_{\alpha\beta}$ mit Hilfe anderer Gleichungen. Man bilde:

$$(3) \cdot 4 f_i^2 f_k^2 - (2) f_i f_k^2 f_l - f_i^2 f_k f_l (2') + f_k^3 f_l (1) + f_i^3 f_l (1') - 2 f_i^3 f_k (2'') - 2 f_i f_k^3 (2''), \text{ wobei } (2''') \text{ durch } \binom{ik}{kl} \text{ aus } (2) \text{ hervorgeht; } (2') \text{ durch } (i \text{ und } k), (2'') \text{ durch } (k \text{ und } l). \text{ Bei Verwendung von } (B_2) \text{ findet man so: } -3 F_{ikl} F_{ik} F_{il} + 2 F_{ikl} F_{il} F_{ik} - F_{ik}^2 F_{li} = -3 U_{ikl} F_{ik} F_{il} + 2 F_{ikl} F_{il} U_{ik} - F_{ik}^2 U_{li}; \text{ wo } F_{ikl} = f_i f_k^2 f_l^2 + 2 f_{ikl} f_i^2 f_k - 2 f_i f_k f_l f_{ik} + f_i^2 f_l f_{ki} - f_{il} f_i f_k^2 - f_{kl} f_i^3. \text{ Man hat so: } -F_{ikl} F_{ik} F_{il} + 2 F_{ikl} F_{il} F_{ik} - F_{ik}^2 F_{li} \text{ enthält jeden quadratischen Teiler von } f. (A_{ikl}).$$

§ 6. Berechnung kubischer Teiler.

Zu den drei ersten Formeln V mögen noch die hinzugenommen werden, die aus ihnen durch Vertauschung von i und k entstehen. Aus diesen sechs Formeln werden die v_{iklj} eliminiert, indem die erste mit f_k^5 , die zweite mit $-5f_k^4f_i$, die dritte mit $+10f_k^3f_i^2$ u. s. w. multipliziert wird. Man findet dann:

$$(A_1) \quad F_{ik} = 10 F_{ik}^{55} V_{ik}^{22} V_{ik}^{33} + 10 V_{ik}^{22} U_{ik}^{33}.$$

Weiter werden zu den Formeln VI die hinzugefügt, welche durch Vertauschung von i und k aus den drei ersten sich ergeben; die erste wird mit f_k^6 , die zweite mit $-6f_i f_k^5$, die dritte mit $15f_i^2 f_k^4$ u. s. w. multipliziert. Dies gibt:

$$(E_1) \quad F_{ik} = 15 V_{ik}^{66} F_{ik}^{44} F_{ik}^{22} + 20 U_{ik}^{33} V_{ik}^{33}.$$

Es werde ferner in IV aus der ersten Gleichung (1) durch (i mit k) (1'), aus (2) durch (i und k): (2') durch (k und l): (2''), ((ik) und (kl)): (2'''); ferner aus (4) durch (i und k): (4') hergestellt. Man bilde nun: $3(f_i f_k^2(4) - f_i^2 f_k(4) + f_i^2 f_l(2') - f_k^2 f_l(2)) 4f_i f_k +$
 $+ 2((1) f_l f_k^4 - (1') f_i^4 f_l) + 4(f_i^4 f_k(2''') - f_k^4 f_i(2''))$. Man erhält so:

$$F_{kil} = U_{kil}^{43} (f_k v_l - f_l v_k) + 3 U_{kil}^{32} (f_i v_k - f_k v_i) + \\ + 3 (F_{ik}^{22} V_{kil}^{22} + V_{ik}^{22} F_{kil}^{22}) \quad (\Gamma_2).$$

$$\text{Hier ist } f_k f_i^3 f_l - 2 f_{ki} f_i^2 f_k f_l + 3 f_{il} f_i^2 f_k - f_{kl} f_i^3 f_k + \\ + 3 f_{ik} f_i f_l f_k^2 - 3 f_i f_k^3 f_{kil} - f_k^3 f_l f_{ik} + f_{il} f_k^4 = F_{kil}^{43}.$$

Es mögen ferner die v_{iklj} aus V folgendermaßen entfernt werden. (i und k) liefert: (3') und (4') und (2''). (k und l): (2') ((ik) und (kl)): (2'''). Ich setze an: $30f_i^3 f_k^3(5) - 5f_i^2 f_k^2 f_l(f_k(3) +$
 $+ f_i(3')) - 30f_i^2 f_k^2(f_k^2(4) + f_i^2(4')) + 10(f_i f_l f_k^4(2) + f_i^4 f_k f_l(2'')) +$
 $+ 5((2') f_i f_k^5 + (2''') f_i^5 f_k) - 3f_l(f_k^5(1) + f_i^5(1'))$. Dies wird, wenn

$$F_{kil} = f_k f_i^4 f_l - 4 f_{ik} f_i^3 f_k f_l - f_i^4 f_k f_{kl} + 4 f_i^3 f_k f_{kil} + \\ + 6 f_i^2 f_k^2 f_l f_{ik} - 4 f_i f_l f_k^3 f_{ik} - 6 f_{kil} f_i^2 f_k^3 + 4 f_i f_k^4 f_{kil} + \\ + f_k^4 f_l f_{ik} - 10 f_i^5 f_{il}. \quad F_{kil} = 6 (F_{ik}^{54} V_{kil}^{22} V_{kil}^{32} + V_{ik}^{22} U_{kil}^{32}) + \\ + 4 (V_{ki}^{33} F_{kil}^{22} + U_{ki}^{33} V_{kil}^{22}). \quad (\Delta_2)$$

Weiter werde $V_{\substack{ik \\ 33}}$ ermittelt. Man findet diesen Ausdruck aus den beiden letzten Formeln IV und denen, die durch $(i$ und $k)$ aus ihnen erhalten werden. Man stelle sich dazu her:

$$(1) f_k^4 - 2 f_i f_k^3 (2) + 2 f_i^3 f_k (2') - (1') f_i^4.$$

Setzt man $f_i f_k^4 - 2 f_{ik} f_i f_k^3 + 2 f_{ik} f_i^3 f_k - f_k^4 f_i^4 = F_{\substack{44 \\ ik}}$, so lautet die Formel:

$$\begin{aligned} 2 V_{\substack{ik \\ 33}} f_i f_k &= - (U_{\substack{ik \\ 33}} (f_k v_i + f_i v_k) + (f_k v_i - f_i v_k) U_{\substack{33 \\ ik}}) + F_{\substack{44 \\ ik}} - \\ &- 6 ((f_k^2 u_i - f_i f_k u_{ik}) (v_i f_k - v_{ik} f_i f_k) - \\ &- (u_k f_i^2 - u_{ik} f_i f_k) (v_k f_i^2 - v_{ik} f_i f_k)). \quad (\Delta_3) \end{aligned}$$

Weiter hat man für $V_{\substack{ik \\ 44}}$ durch Berechnung von

$$\begin{aligned} f_k^5 (1) + f_i^5 (1') - 3 (f_i f_k^4 (2) + f_k f_i^4 (2')) + 2 (f_i^2 f_k^3 (3) + f_k^2 f_i^3 (3')) \\ 2 f_i f_k V_{\substack{ik \\ 44}} = F_{\substack{55 \\ ik}} + 4 [u_k f_i^2 - u_i f_k^2] V_{\substack{ik \\ 33}} + U_{\substack{ik \\ 33}} (v_k f_i^2 - v_i f_k^2) - \\ - 6 (F_{\substack{ik \\ 22}} V_{\substack{33 \\ ik}} + V_{\substack{ik \\ 22}} U_{\substack{33 \\ ik}}) (E_2). \quad \text{Hier ist: } F_{\substack{55 \\ ik}} = f_i f_k^5 + f_k f_i^5 - \\ - 3 (f_i f_k^4 f_{ik} + f_i^4 f_k f_{ik}) + 2 (f_i^2 f_k^3 f_{ik} + f_i^3 f_k^2 f_{ik}). \quad \text{Die Formeln V} \\ \text{wurden hier benützt. Ferner ergibt sich für } V_{\substack{33 \\ ik}} \text{ aus IV durch} \\ \text{Bildung von } f_i^4 (1') + f_k^4 (1) - 4 f_i f_k^3 (2) \text{ der Wert: } 3 f_i f_k V_{\substack{33 \\ ik}} = \\ = F'_{\substack{44 \\ ik}} - (u_i f_k^3 - u_k f_i^3) (f_k v_i - f_i v_k) - 3 (f_k v_i (u_i f_k^3 - u_{ik} f_i f_k^2) + \\ + v_k f_i (u_k f_i^3 - u_{ki} f_i^2 f_k)) - 3 (F_{\substack{ik \\ 22}} (v_i f_k^2 + v_k f_i^2) + \\ + (v_k f_i^2 - v_i f_k^2) (u_k f_i^2 - u_i f_k^2)), \end{aligned}$$

$$\text{wo } F'_{\substack{44 \\ ik}} = f_i^4 f_k + f_i f_k^4 - f_{ik} f_i f_k^3 - f_{ik} f_i^3 f_k.$$

Es zeigt sich nun im weiteren Verlaufe der Rechnung, daß man die beiden Formeln (Γ_2) , die von einander unabhängig sind, in Verbindung mit (B_2) und (B'_3) dazu verwenden kann, um $v_i f_k - f_i v_k$ u. s. w. zu ermitteln. Man findet nach längerer Umformung so die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{ikl}(v_l f_i - v_i f_l)}{f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} & F_{kl} \\ 22 & 22 \end{smallmatrix}} f_k + A_{ikl} \frac{(v_i f_k - f_i v_k)}{\begin{smallmatrix} F_{ik} & F_{kl} \\ 22 & 22 \end{smallmatrix}} = \\ & = 4 F_{kil} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{ik} & F_{il} & F_{kl} \\ 43 & 22 & 22 \end{smallmatrix} - 2 F_{kil} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} & F_{kl} & F_{ik} \\ 2 & 22 & 44 \end{smallmatrix} - \\ & - f_l^2 \begin{smallmatrix} F_{ik} & F_{il} & F_{kl} \\ 44 & 22 & 22 \end{smallmatrix} - f_i^2 \begin{smallmatrix} F_{kl} & F_{ik} & F_{il} \\ 44 & 22 & 22 \end{smallmatrix} + f_k^2 \begin{smallmatrix} F_{il} & F_{ik} & F_{kl} \\ 44 & 22 & 22 \end{smallmatrix} : 4 F_{ik} \begin{smallmatrix} F_{il} & F_{kl} & f_i f_l \\ 22 & 22 & 22 \end{smallmatrix}. \end{aligned}$$

Der Zähler der rechten Seite werde $= B_{kil}$ gesetzt. Dann gilt:

$$\begin{smallmatrix} F_{ik} \\ 22 \end{smallmatrix} A_{ikl} f_k (v_l f_i - v_i f_l) + A_{ikl} \begin{smallmatrix} (v_i f_k - f_i v_k) \\ 743 \end{smallmatrix} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} \\ 22 \end{smallmatrix} = B_{kil} : 4 \mid (1)$$

Durch Vertauschung von ikl mit (kli) erhält man diese Formel:

$$\begin{smallmatrix} F_{kl} \\ 22 \end{smallmatrix} A_{ikl} f_l (v_i f_k - v_k f_i) + A_{kli} \begin{smallmatrix} (v_k f_l - f_k v_l) \\ 743 \end{smallmatrix} f_k f_i \begin{smallmatrix} F_{ki} \\ 22 \end{smallmatrix} = B_{kli} : 4 \mid (2)$$

Ferner gilt:

$$f_l (v_i f_k - f_i v_k) + f_k (v_l f_i - v_i f_l) + f_i (v_k f_l - v_l f_k) = 0. \quad (3)$$

Daher:

$$\begin{aligned} & (v_i f_k - f_i v_k) = \\ & = \left| \begin{smallmatrix} B_{kil} : 4 \\ 886 \end{smallmatrix} \quad 0 \quad \begin{smallmatrix} F_{ik} A_{ikl} f_k \\ 22 \end{smallmatrix} \right| : \left| \begin{smallmatrix} A_{ikl} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} \\ 22 \end{smallmatrix}, \quad 0 \quad \begin{smallmatrix} F_{ik} A_{ikl} f_k \\ 22 \end{smallmatrix} \\ A_{ikl} f_l \begin{smallmatrix} F_{kl} \\ 22 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} A_{kli} f_k f_i \begin{smallmatrix} F_{ki} \\ 22 \end{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right| = \\ & = Z_{ik} : N_{ikl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v_k f_l - f_k v_l = \\ & = \left| \begin{smallmatrix} A_{ikl} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} \\ 22 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} B_{kil} : 4 \\ 886 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} F_{ik} A_{ikl} f_k \\ 22 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} F_{kl} A_{ikl} f_l \\ 22 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} B_{kli} : 4 \\ 886 \end{smallmatrix} \quad 0 \end{smallmatrix} \right| : \left| \begin{smallmatrix} A_{ikl} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} \\ 22 \end{smallmatrix}, \quad 0, \quad \begin{smallmatrix} F_{ik} f_k A_{ikl} \\ 22 \end{smallmatrix} \\ A_{ikl} f_l \begin{smallmatrix} F_{kl} \\ 22 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} A_{kli} f_k f_i \begin{smallmatrix} F_{ki} \\ 22 \end{smallmatrix}, \quad 0 \end{smallmatrix} \right| = \\ & = Z_{kl} : N_{ikl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v_l f_i - f_l v_i = \\ & = \left| \begin{smallmatrix} A_{ikl} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} \\ 22 \end{smallmatrix} \quad 0 \quad \begin{smallmatrix} B_{kil} : 4 \\ 886 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} F_{kl} A_{ikl} f_l \\ 22 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} A_{kli} f_k f_i \begin{smallmatrix} F_{ki} \\ 22 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} B_{kli} : 4 \\ 886 \end{smallmatrix} \end{smallmatrix} \right| : \left| \begin{smallmatrix} A_{ikl} f_i f_l \begin{smallmatrix} F_{il} \\ 22 \end{smallmatrix} \quad 0 \quad \begin{smallmatrix} F_{ik} f_k A_{ikl} \\ 22 \end{smallmatrix} \\ A_{ikl} f_l \begin{smallmatrix} F_{kl} \\ 22 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} A_{kli} f_k f_i \begin{smallmatrix} F_{ki} \\ 22 \end{smallmatrix} \quad 0 \end{smallmatrix} \right| = \\ & = Z_{li} : N_{ikl}. \end{aligned}$$

$$F_{\substack{ik \\ 33}} - U_{\substack{ik \\ 33}} = 3 F_{\substack{ik \\ 22}} Z_{ik} : N_{ikl}, \quad F_{\substack{kl \\ 33}} - U_{\substack{kl \\ 33}} = 3 F_{\substack{kl \\ 22}} Z_{kl} : N_{ikl},$$

$$F_{\substack{li \\ 33}} - U_{\substack{li \\ 33}} = 3 F_{\substack{li \\ 22}} Z_{li} : N_{ikl}.$$

Man findet ferner aus (Γ_1) bei symmetrischer Rechnung:

$$F_{\substack{33 \\ ik}} - U_{\substack{33 \\ ik}} - F_{\substack{ik \\ 22}} (f_{ik} - u_{ik}) = \frac{Z_{ki}}{N_{ikl}} F_{\substack{ik \\ 22}} + \frac{f_i f_k}{3 F_{\substack{ik \\ 22}}} F_{\substack{ik \\ 44}} - 2 a_{ik} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}},$$

wo $a_{ik} = 3 F_{\substack{ik \\ 22}} (f_k f_i^2 - f_i f_k^2) + 2 f_i f_k F_{\substack{ik \\ 33}}$. So erhält man die Formel:

$$f_l F_{\substack{il \\ 22}} (F_{\substack{33 \\ ik}} - U_{\substack{33 \\ ik}}) - f_k F_{\substack{ik \\ 22}} (F_{\substack{33 \\ il}} - U_{\substack{33 \\ il}}) = \Gamma_{ikl} =$$

$$= -2 \frac{(F_{\substack{il \\ 22}} F_{\substack{ik \\ 22}})}{N_{ikl}} (Z_{ik} f_l - Z_{li} f_k) + \left[\left(f_i f_k F_{\substack{ik \\ 44}} - 6 a_{ik} \frac{Z_{ik} F_{\substack{ik \\ 22}}}{N_{ikl}} \right) f_l F_{\substack{il \\ 22}} - \right.$$

$$\left. - \left(f_i f_l F_{\substack{il \\ 44}} - 6 a_{il} F_{\substack{il \\ 22}} \frac{Z_{li}}{N_{ikl}} \right) f_k F_{\substack{ik \\ 22}} \right] : F_{\substack{ik \\ 22}} F_{\substack{il \\ 22}}.$$

Ferner hat man nach (Δ_1) :

$$V_{\substack{ik \\ 33}} = \left[3 F_{\substack{ik \\ 55}} - 5 (F_{\substack{ik \\ 44}} - 4 U_{\substack{ik \\ 33}} (f_k v_i - f_i v_k)) \frac{U_{\substack{ik \\ 33}}}{F_{\substack{ik \\ 22}}} \right] : 30 F_{\substack{ik \\ 22}}.$$

Bei Verwendung von (Δ_3) erhält man nach einiger Rechnung die Gleichung:

$$B_{ik} = (F_{\substack{i \\ 3}} - U_{\substack{i \\ 3}}) \varrho_{ik} + (F_{\substack{k \\ 3}} - U_{\substack{k \\ 3}}) \varrho_{ki}.$$

Hier sind folgende Abkürzungen gewählt:

$$F_{\substack{i \\ 3}} = f_i f_k^3 - f_{ik} f_i^2 f_k, \quad F_{\substack{k \\ 3}} = f_k f_i^3 - f_{ik} f_k^2 f_i.$$

$$\varrho_{ki} = f_i f_k F_{\substack{ki \\ 33}} + f_i f_k f_{ik} - f_k f_i^2, \quad \varrho_{ik} = f_i f_k F_{\substack{ki \\ 33}} + (f_i f_k^2 - f_i f_k f_{ik}).$$

$$B_{ik} = F_{\substack{ik \\ 22}} f_i f_k \cdot \left[\left(f_i f_k \left(3 F_{\substack{ik \\ 55}} F_{\substack{ik \\ 22}} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - 5 \left(F_{\substack{ik \\ 44}} - 4 \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \left(F_{\substack{ki \\ 33}} + 3 \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} F_{\substack{ik \\ 22}} \right) \right) \left(F_{\substack{ki \\ 33}} + \frac{3 Z_{ik} F_{\substack{ik \\ 22}}}{N_{ikl}} \right) \right) : 15 F_{\substack{ik \\ 22}}^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -3 F_{22}^{ik} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} f_{ik} + \frac{a_{ik} + f_i f_k F_{33}^{ik}}{f_i f_k} \left(\left(-f_i f_k F_{44}^{ik} + \frac{6 a_{ik} Z_{ik} F_{22}^{ik}}{N_{ikl}} \right) : 3 F_{22}^{ik} \right. \\
 & \left. - 3 \left(F_{22}^{ik} + \left(f_i^2 f_k - f_k^2 f_i + 2 \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} f_i f_k \right)^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Es bestehen so im ganzen folgende Gleichungen, wenn $F_i - U_i$ mit W_i bezeichnet wird:

$$(1) \quad B_{ik} = W_i \rho_{ik} + W_k \rho_{ki}$$

$$(2) \quad \Gamma_{ikl} = f_l F_{22}^{il} W_{33}^{ik} - f_k F_{22}^{ik} W_{33}^{il}$$

$$(3) \quad 3 F_{22}^{ik} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} = W_{33}^{ik}$$

$$(4) \quad W_{33}^{ikl} = F_{22}^{ik} f_l^2 f_k \frac{Z_{il}}{N_{ikl}} + F_{22}^{kl} f_i^2 f_l \frac{Z_{ki}}{N_{ikl}} + F_{22}^{il} f_k^2 f_i \frac{Z_{lk}}{N_{ikl}}.$$

Aus (1) und (3) erhält man durch geeignetes Vertauschen der Indizes je zwei weitere, aus (2) noch eine Gleichung, so daß im ganzen 9 vorhanden sind. Diese werden benützt, um W_{ikl} durch W_i auszudrücken. Die Formeln werden:

$$W_3 f_i^3 = W_3 f_k^3 + 3 \frac{\left(A_{ikl} \frac{F_{kl}^{22}}{s_{kl}} f_k^2 + A_{kli} \frac{F_{li}^{22}}{s_{li}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{2 f_i f_k f_l A_{ikl} \cdot f_l}$$

$$W_3 f_i^3 = W_3 f_l^3 + 3 \frac{\left(A_{ikl} \frac{F_{kl}^{22}}{s_{kl}} f_l^2 + A_{kli} \frac{F_{li}^{22}}{s_{li}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{2 f_i f_k f_l A_{ikl} \cdot f_i}$$

$$\begin{aligned}
 W_{ik} f_i f_k^2 = W_i f_k^3 + \rho_{ki} & \frac{\left(A_{ikl} \frac{F_{kl}^{22}}{s_{kl}} f_k^2 + A_{kli} \frac{F_{li}^{22}}{s_{li}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{f_i f_k f_l A_{ikl} s_{ki} f_l} \\
 & - B_{ik} + 3 \frac{F_{ik}^{22} Z_{ik} \rho_{ki}}{N_{ikl}} \\
 & \quad \quad \quad s_{ki}
 \end{aligned}$$

$$W_{\frac{k}{2}i} f_i^2 f_k = W_{\frac{i}{3}} f_k^3 + (3\rho_{ki} + \rho_{ik}) \frac{\left(A_{\frac{ikl}{2}} \frac{F_{lk}}{s_{kl}} f_k^2 + A_{\frac{kli}{2}} \frac{F_{li}}{s_{li}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{2f_l f_k f_i A_{ikl}(s_{ki}) f_l} \\ + 3 \frac{\frac{F_{ik}}{s_{ik}^2} Z_{ik} \rho_{ik}}{N_{ikl}} - B_{ik} \\ s_{ki}$$

$$W_{\frac{i}{2}l} f_i^2 f_l = W_{\frac{l}{3}} f_i^3 + \rho_{li} \frac{\left(A_{\frac{ikl}{2}} \frac{F_{kl}}{s_{kl}} f_l^2 + A_{\frac{lik}{2}} \frac{F_{ki}}{s_{ki}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li} -}{2f_k^2 f_i f_l A_{ikl}(s_{li})} \\ - 3 \frac{\frac{F_{il}}{s_{il}^2} Z_{li} \rho_{il}}{N_{ikl}} - B_{il} \\ s_{li}$$

$$W_{\frac{i}{2}} f_i^2 f_l = W_{\frac{l}{3}} f_i^3 + (3\rho_{li} + \rho_{il}) \frac{\left(A_{\frac{ikl}{2}} \frac{F_{lk}}{s_{lk}} f_l^2 + \frac{A_{lik}}{s_{ki}} \frac{F_{ki}}{s_{ki}^2} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{2f_i f_k f_l A_{ikl} s_{li} f_k} \\ - 3 \frac{\frac{F_{il}}{s_{il}^2} Z_{li} \rho_{il}}{N_{ikl}} - B_{il} \\ s_{li}$$

$$W_{\frac{k}{2}} f_l^2 f_k = \frac{f_l^3 f_k^3}{f_i^3} W_{\frac{i}{3}} + \rho_{lk} \frac{f_k^3}{f_i^3} \frac{\left(A_{\frac{ikl}{2}} \frac{F_{lk}}{s_{lk}} f_l^2 + A_{\frac{lik}{2}} \frac{F_{ki}}{s_{ki}^2} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{f_i f_k f_l A_{ikl} f_k s_{kl}} \\ - \left(B_{ki} + 3 \frac{\frac{F_{kl}}{s_{kl}^2} Z_{kl}}{N_{ikl}} \rho_{lk} \right) \\ s_{kl}$$

$$+ (3\rho_{ki} + \rho_{ik}) \frac{f_l^3}{f_i^3} \frac{\left(A_{\frac{ikl}{2}} \frac{F_{kl}}{s_{lk}} f_k^2 + A_{\frac{kil}{2}} \frac{F_{il}}{s_{li}^2} f_i^2 \right) s_{li} s_{lk} s_{ki}}{2f_i f_k f_l A_{ikl} f_l s_{lk}}$$

$$\begin{aligned}
 W_{kl} f_k^2 f_l = & -B_{kl} + 3 \frac{F_{lk} Z_{kl} \rho_{kl}}{N_{ikl}} + \\
 & \frac{s_{kl}}{f_i f_k f_l A_{ikl} f_l s_{kl}} + \\
 & + \frac{\rho_{kl} f_l^3}{f_i^3} \left(A_{ikl} \frac{F_{kl}}{s_{lk}} f_k^2 + A_{kli} \frac{F_{il}}{s_{li}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li} + \frac{f_l^3 f_k^3}{f_i^3} W_i + \\
 & + \frac{(3\rho_{lk} + \rho_{kl})}{2s_{lk}} \left(A_{ikl} \frac{F_{lk}}{s_{lk}} f_l^2 + A_{lki} \frac{F_{lk}}{s_{ki}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li} \frac{f_k^3}{f_i^3} \\
 & \frac{f_i f_k f_l A_{ikl} f_l s_{kl}}{f_i f_k f_l A_{ikl} f_l s_{kl}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{ikl} f_i^2 f_k^2 f_l^2 = & -3 \left[f_i^2 f_l F_{ik} \frac{F_{kl}}{s_{lk}} Z_{ik} + f_k^2 f_i F_{il} \frac{F_{kl}}{s_{lk}} Z_{kl} + \right. \\
 & \left. + F_{il} \frac{F_{ik}}{s_{lk}} f_l^2 f_k Z_{li} \right] : N_{ikl} - \frac{(W_k f_i^3 f_l^3 + W_l f_i^3 f_k^3)}{6} + \\
 & + \frac{W_{ik} f_i^2 f_k^2 f_l^3 + W_{kl} f_k^2 f_l^2 f_i^3 + W_{li} f_l^2 f_i^2 f_k^3}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Hier ist: } A_{ikl} = & \frac{F_{ik} Z_{ik} F_{il}}{N_{ikl}} + \\
 & + f_k \frac{F_{ik}}{s_{li}} \left(-B_{il} + 3 \frac{F_{il} Z_{il} F_{il}}{N_{ikl}} \right) s_{ki} = \rho_{ik} + \rho_{ki}.
 \end{aligned}$$

Ferner sei

$$\begin{aligned}
 \alpha_i = & \frac{F_{lk} A_{ikl}}{A_{ikl} s_{kl} f_i f_k f_l}, \quad \alpha_k = \frac{A_{kli} F_{li}}{A_{ikl} s_{li} f_i f_k f_l}, \quad \alpha_l = \frac{A_{lki} F_{lk}}{A_{ikl} s_{ki} f_i f_k f_l} \\
 \rho_{kl} = & f_l f_k F_{kl} + (f_l f_k f_{lk} - f_k f_l^2).
 \end{aligned}$$

Die Formel der kubischen Teiler lautet dann:

$$\frac{P_1}{f_i^3} (u_i f_i) + P_3 + 3 \frac{P_1}{f_i f_k f_l} \left(\frac{B_{ik}}{s_{ki}} x_i x_k f_i f_k + \frac{B_{kl}}{s_{kl}} x_k x_l f_k f_l + \frac{B_{li}}{s_{li}} x_l x_i f_l f_i \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2} \frac{P_1}{f_i f_k f_l} \left[\left(\frac{\alpha_k}{f_k^2} (x_k f_k + \frac{2 \rho_{ki}}{s_{ki}} x_i f_i + \frac{2 \rho_{kl}}{s_{kl}} x_l f_l) x_k f_k + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\alpha_l}{f_l^2} (x_l f_l + \frac{2 \rho_{li}}{s_{li}} x_i f_i + \frac{2 \rho_{lk}}{s_{kl}} x_k f_k) x_l f_l + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\alpha_i}{f_i^2} (x_k f_k + x_l f_l)^2 + 2 x_i f_i (x_k f_k \frac{\rho_{ki}}{s_{ki}} + x_l f_l \frac{\rho_{li}}{s_{li}}) \right) \right] + \\
& \quad + \frac{3 x_i x_k x_l (f_i^2 f_l \frac{F_{kl}}{22} Z_{ik} + f_k^2 f_i \frac{F_{il}}{22} Z_{lk} + f_l^2 f_k \frac{F_{ik}}{22} Z_{li})}{f_i^2 f_k^2 f_l^2 N_{ikl}} - \\
& \quad - \frac{9 F_{ik}^{22} Z_{ik}}{N_{ikl} s_{ki}} \left(\rho_{ki} f_l \frac{x_i x_k x_l}{f_i^2 f_k^2} + \rho_{ki} \frac{x_i^2 x_k}{f_i f_k^2} + \rho_{ik} \frac{x_i x_k^2}{f_i^2 f_k} \right) - \\
& \quad - \frac{9 F_{kl}^{22} Z_{kl}}{s_{kl} N_{ikl}} \left(\rho_{lk} \frac{x_i x_k x_l}{f_k^2 f_l^2} f_i + \frac{x_k^2 x_l}{f_k f_l^2} \rho_{lk} - \rho_{kl} \frac{x_l^2 x_k}{f_k^2 f_l^2} \right) - \\
& \quad - \frac{9 F_{il}^{22} Z_{li}}{s_{li} N_{ikl}} \left(\rho_{li} x_i x_l \left(\frac{x_l}{f_i f_l} + \frac{x_k f_k}{f_i^2 f_l^2} \right) - \rho_{li} \frac{x_i^2 x_l}{f_i f_l^2} \right).
\end{aligned}$$

Denn ein kubischer Teiler ist in der Form: $u_i x_i^3 + u_k x_k^3 + u_l x_l^3 + 3 x_i^2 x_k u_{ik} + 3 u_{ik} x_i x_k^2 + 3 u_{il} x_i^2 x_l + 3 u_{il} x_i x_l^2 + 3 u_{kl} x_k^2 x_l + 3 u_{kl} x_l^2 x_k + 6 u_{ikl} x_i x_k x_l$ darstellbar. P_1 und P_3 sind hier wieder den Polaren proportional. $P_1 = x_i f_i + x_k f_k + x_l f_l$, $P_3 = x_i^3 f_i + x_k^3 f_k + x_l^3 f_l + 3 x_i^2 x_k f_{li} + 3 x_l x_i^2 f_{li} + \dots$

Den Wert für $(u_i - f_i)$ findet man aus (E₁). Es wird, wenn folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_1''') \quad & (f_i - u_i) f_k^2 = v_{i2}, \quad (f_{ik} - u_{ik}) = v_{ik} = \\
& = \left(W_{ik}^{33} - \frac{Z_{ki} F_{ik}^{22}}{N_{ikl}} + 2 \frac{a_{ik} Z_{ik}}{N_{ikl}} \frac{f_i f_k F_{ik}^{44}}{3 F_{ik}^{22}} \right) : F_{ik}^{22}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{\substack{33 \\ ik}} = \lambda_{ik} &= F_{\substack{33 \\ ik}} - W_{\substack{k \\ 3}} f_i^3 - W_{\substack{i \\ 3}} f_k^3 + W_{\substack{ki \\ 2}} f_i^2 f_k + W_{\substack{ik \\ 2}} f_i f_k^2 \\
 U_{\substack{i \\ 3}} - U_{\substack{k \\ 3}} = \mu_{ik} &= f_{\substack{i \\ 3}} f_k^3 - f_{\substack{k \\ 3}} f_i^3 + f_{\substack{i \\ 2}}^2 f_k f_{ik} - f_{\substack{i \\ 2}} f_k^2 f_{ik} - W_{\substack{i \\ 3}} f_k^3 + \\
 &+ W_{\substack{k \\ 3}} f_i^3 - W_{\substack{ik \\ 2}} f_i^2 f_k + W_{\substack{ik \\ 2}} f_i f_k^2,
 \end{aligned}$$

wo aus den angegebenen Formeln für die W die Werte einzusetzen sind.

$$\begin{aligned}
 W_{\substack{i \\ 3}} &= \frac{f_i^2 f_k^2}{2 f_k^3 F_{\substack{ik \\ 22}}} \left[\frac{f_i f_k F_{\substack{ik \\ 66}}}{15 F_{\substack{ik \\ 22}}} - F_{\substack{55 \\ ik}} + \right. \\
 &+ a_{ik} \left(\frac{3 F_{\substack{ik \\ 55}} F_{\substack{ik \\ 22}} - 5 \left(F_{\substack{ik \\ 33}} - 3 F_{\substack{ik \\ 22}} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \right) \left(F_{\substack{ik \\ 44}} - 4 \left(F_{\substack{ik \\ 33}} - 3 F_{\substack{ik \\ 22}} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \right) \frac{Z_{ik}}{N_{iki}} \right)}{45 F_{\substack{ik \\ 22}}^3} \right. \\
 &+ \frac{F_{\substack{ik \\ 22}} F_{\substack{44 \\ ik}}}{f_i f_k} + \frac{3 Z_{ki}}{N_{ikl}} \frac{F_{ik}}{f_i^3 f_k^3} a_{ik} \left(\frac{F_{kl}}{A_{ikl}} \frac{F_{\substack{ik \\ 22}}}{s_{kl}} f_k^2 + \frac{A_{kli}}{s_{li}} \frac{F_{\substack{ik \\ 22}}}{f_i^2} \right) s_{ki} s_{li} s_{ik} - \\
 &- \frac{a_{ik} F_{\substack{ik \\ 22}}^2 Z_{ki}}{2 N_{iki} f_i^2 f_k^2} - \frac{a_{ik}^2 f_{ik}}{6 f_i^2 f_k^2 F_{\substack{ik \\ 22}}} + \frac{a_{ik} f_{ik}}{f_i f_k} \frac{\left(F_{\substack{ik \\ 33}} - 3 F_{\substack{ik \\ 22}} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \right)}{3 F_{\substack{ik \\ 22}}} \\
 &- 3 p_{ki} \left(\frac{F_{kl}}{A_{iki}} \frac{F_{\substack{ik \\ 22}}}{s_{kl}} f_k^2 + A_{kli} f_i^2 \frac{F_{li}}{s_{li}} \right) \frac{F_{\substack{ik \\ 22}}}{f_i^2 f_k^2} s_{ki} s_{li} s_{ik} + \\
 &+ \frac{\left(F_{\substack{ik \\ 44}} - 4 \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \left(F_{\substack{ik \\ 33}} - 3 F_{\substack{ik \\ 22}} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \right) \right)}{2 F_{\substack{ik \\ 22}}} \left(\lambda_{ik} - \frac{F_{\substack{ik \\ 22}}}{f_i f_k} \right) - \\
 &- \frac{3}{2} \frac{F_{\substack{ik \\ 22}}}{f_i f_k} \left(\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \mu_{ik} + \lambda_{ik} - \nu_{ik} \right) + (f_{\substack{k \\ 2}}^2 - f_{\substack{i \\ 2}}^2) \frac{a_{ik}}{2 f_i^2 f_k^2} (f_{ik} - \nu_{ik}) \\
 &- \left. \frac{Z_{ik} F_{\substack{ik \\ 22}}^2}{N_{ikl} f_i^2 f_k^2} (f_i f_k^2 - \nu_i) + 6 \nu_i \frac{F_{\substack{ik \\ 22}}^2}{f_i^2 f_k^2} (f_{ik} - \nu_{ik}) \right].
 \end{aligned}$$

Macht man die Annahme, daß ein Wertsystem bekannt sei, das einen kubischen Teiler verschwinden läßt, so ist derselbe aus der angegebenen Formel zu berechnen. Läßt das Wertsystem einen quadratischen oder linearen Faktor $= 0$ werden, so wird der vorgelegte Ausdruck unbestimmt, da A_{ikl} und A_{ikl} jeden quadratischen Faktor besitzen.

Man verfährt, um die Teiler einer Form bis zum dritten Grade zu ermitteln so, daß man ein $x_2 = \xi_2$, $x_p = \xi_p$ setzt und die daraus für X_1 sich ergebende Gleichung $f = 0$ auflöst. Man erhält n Wertsysteme. $\xi_1^{(1)} \dots \xi_p^{(1)} \dots \xi_p^{(n)} \dots \xi_p$. Zunächst werden die ersten Polaren gebildet und es wird festgestellt, ob sie Teiler sind; bleiben noch Wertsysteme übrig, so bilde man den im § 4 angegebenen Ausdruck; sind quadratische Faktoren vorhanden, so müssen mindestens zwei der gebildeten Ausdrücke einander gleich sein. Bleiben noch mehr als drei Wertsysteme, so bilde man den hier gegebenen Komplex, der jedoch nur für Ternärformen gilt. Über eine einfachere Methode, die die Teiler einer Form, die den 7. Grad nicht übersteigt, siehe die oben erwähnte Dissertation.

§ 7.

Es mögen nun noch Ausdrücke gegeben werden, die jeden kubischen Teiler von f enthalten.

Daß für Ternärformen keine Aggregate, aus den vier ersten Ableitungen gebildet, existieren, ergab die Rechnung. Schon für Formen von vier Variablen müssen aber Komplexe dieser Art vorhanden sein, wie daraus ersichtlich, daß zur Elimination von 69 Unbekannten hier 70 Gleichungen vorliegen. Es werde nun so verfahren, daß aus zweien der Formeln (A_2) die Unbekannten entfernt werden:

$$\left. \begin{aligned} F_{ikl} &= 6 (F_{ik} V_{ikl} + U_{ikl} V_{ik}) - 4 (V_{kl} F_{ikl} + U_{kl} V_{ikl}) \\ F_{kli} &= 6 (F_{kl} V_{kli} + U_{kli} V_{kl}) - 4 (V_{li} F_{kli} + U_{li} V_{kli}) \end{aligned} \right\}.$$

Da die Relation:

$$3 (V_{ikl} f_k f_l^2 - V_{kli} f_i^2 f_l) = (2 f_l^3 V_{ik} - f_i^3 V_{kl} - f_k^3 V_{li})$$

besteht, so erhält man bei Benützung von (A_1) und (B_3):

$$\frac{F_{ikl} f_k f_l^2}{F_{ik}} - \frac{F_{kli} f_i^2 f_l}{F_{kl}} = \frac{2 (2 f_l^3 (F_{ik} - 10 U_{ik} V_{ik}))}{10 F_{ik}}$$

$$\begin{aligned}
 & -f_k^3 \frac{(F_{li} - 10 \frac{U_{li}}{33} \frac{V_{il}}{22})}{10 \frac{F_{il}}{22}} - f_i^3 \frac{(F_{kl} - 10 \frac{U_{kl}}{33} \frac{V_{lk}}{22})}{10 \frac{F_{kl}}{22}} \\
 & - \frac{4 f_k f_l^2 \frac{F_{ikl}}{2}}{10 \frac{F_{ik}^2}{22}} (F_{55} - 10 \frac{U_{55}}{33} \frac{V_{55}}{22}) + \frac{4 \frac{F_{kii}}{2} f_i^2 f_l}{10 \frac{F_{kl}^2}{22}} (F_{55} - 10 \frac{U_{55}}{33} \frac{V_{55}}{22}) + \\
 & + \frac{2 \frac{V_{ik}}{22} f_k f_l^2}{\frac{F_{ik}^2}{22} \frac{F_{il}}{22}} (2 \frac{F_{ikl}}{2} \frac{F_{il}}{22} \frac{U_{ik}}{33} - \frac{F_{ik}^2}{22} \frac{U_{li}}{33} - \frac{A_{ikl}}{743}) - \\
 & - 2 f_i^2 f_l \frac{\frac{V_{kl}}{22} (2 \frac{F_{kil}}{2} \frac{F_{ik}}{22} \frac{U_{kl}}{33} - \frac{F_{kl}^2}{22} \frac{U_{ik}}{33} - \frac{A_{kli}}{743})}{\frac{F_{kl}}{22} \frac{F_{il}}{22}} - \\
 & - \frac{2 \frac{U_{ki}}{33} f_l}{\frac{F_{ik}}{22}} (V_{ik} f_l^3 + V_{il} f_k^2 - V_{kl} f_i^2) + \\
 & + \frac{2 f_i \frac{U_{lk}}{33}}{\frac{F_{kl}}{22}} (V_{ik} f_l^2 + V_{kl} f_i^2 - V_{il} f_k^3).
 \end{aligned}$$

Dies gibt, wenn alle Ausdrücke auf eine Seite gebracht werden:

$$\begin{aligned}
 & 15 (F_{54} \frac{f_k f_l^2}{22} \frac{F_{kl}}{22} - \frac{F_{kli}}{54} f_i^2 f_l \frac{F_{ik}}{22}) \frac{F_{ik}^2}{22} \frac{F_{il}^2}{22} \frac{F_{kl}^2}{22} - 6 f_l^3 \frac{F_{il}^2}{22} \frac{F_{ik}^2}{22} \frac{F_{kl}^3}{22} \frac{F_{ik}}{55} + \\
 & + 3 f_k^3 \frac{F_{li}}{55} \frac{F_{il}}{22} \frac{F_{ik}^3}{22} \frac{F_{kl}^3}{22} + 3 f_i^3 \frac{F_{kl}}{55} \frac{F_{il}^2}{22} \frac{F_{kl}^3}{22} \frac{F_{ik}^3}{22} + \\
 & + 6 f_k f_l^2 \frac{F_{ikl}}{2} \frac{F_{ik}}{22} \frac{F_{il}^2}{22} \frac{F_{kl}^3}{22} \frac{F_{li}}{55} - 6 f_i^2 f_l \frac{F_{kil}}{2} \frac{F_{kl}^2}{22} \frac{F_{il}^2}{22} \frac{F_{ik}^3}{22} \frac{F_{lk}}{55} - \\
 & - 5 A_{ikl} \frac{F_{ik}^2}{22} \frac{F_{kl}^2}{22} \left[\left(f_k^2 \frac{F_{il}}{44} - 4 \left(\frac{F_{li}}{33} - 3 \frac{\frac{Z_{li} F_{il}}{22}}{N_{ikl}} \right) \frac{Z_{li}}{N_{ikl}} \right) \frac{F_{ik}}{22} - \right. \\
 & \left. - f_l^2 \left(\frac{F_{ik}}{44} - 4 \left(\frac{F_{ik}}{33} - 3 \frac{\frac{F_{ik} Z_{ik}}{22}}{N_{ikl}} \right) \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \right) \frac{F_{il}}{22} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 5 f_k f_l F_{il}^2 F_{kl}^3 A_{ikl} \left(F_{ik} - 4 \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \left(F_{ik} - 3 F_{ik} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \right) \right) - \\
& - 5 f_i^2 f_l F_{ik}^2 F_{il}^2 A_{kli} \left(F_{kl} - 4 \frac{Z_{kl}}{N_{ikl}} \left(F_{kl} - 3 F_{kl} \frac{Z_{kl}}{N_{ikl}} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Da allgemein $f_{ikl\dots} - uv_{ikl\dots} = f_{ikl\dots}$ gesetzt war, so enthält dieser Ausdruck, wenn die $f_{ikl\dots}$ als Ableitungen gefaßt werden, jeden kubischen Teiler von f .

Durch Vertauschung der Indizes findet man entsprechende Bedingungen.

Inwieweit die in § 5 und § 7 aufgestellten Sätze die hinreichenden Bedingungen für die Existenz quadratischer oder kubischer Faktoren darstellen, soll hier nicht entschieden werden.