

# Ueber die Potenzreihen der hyperelliptischen Thetafunctionen.

Von

ED. WILTHERS in Halle a./S.

Bekanntlich besteht diejenige Eigenschaft, welche die Weierstrass'schen hyperelliptischen Thetafunctionen vor den Jacobi'schen auszeichnet, darin, dass die Coefficienten der Entwicklung der ersteren nach Potenzen der Argumente rationale Functionen der Verzweigungspunkte und gewisser in den Integralen zweiter Gattung vorkommender Grössen sind. Dass diese Coefficienten bei richtiger Bestimmung dieser Grössen in den Integralen zweiter Gattung, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Factor, auch *ganze* Functionen dieser Verzweigungspunkte sind, davon existirt, soweit mir bekannt ist, ein einfacher, unmittelbarer Beweis nicht. Einen solchen möchte ich hier liefern, und dabei möglichst wenig Voraussetzungen, nämlich nur die folgenden drei, machen:

- 1) die Definition *einer* Thetafunction durch Integrale dritter Gattung;
- 2) die Formel, welche die übrigen Thetafunctionen aus dieser Thetafunction bei Vermehrung der Argumente um ein System halber Perioden ableitet;
- 3) das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung.

## § 1.

### Vorbereitungen.

Als Ausgangspunkt nehme ich die Definition der Thetafunction durch das System von Gleichungen

$$(A) \quad u_\beta = \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha y_\alpha} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y}, \quad w_\beta = \int_{a_{2\varrho+1}}^{\xi_\eta} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, \varrho)$$

$$(B) \quad \lg \frac{\Theta(0, 0, \dots, 0) \Theta(u_1 - w_1, u_2 - w_2, \dots, u_\varrho - w_\varrho)}{\Theta(w_1, w_2, \dots, w_\varrho) \Theta(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)} \\ = \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha y_\alpha} \frac{dx}{2y} \int_{a_{2\varrho+1}}^{\xi_\eta} \frac{2y_\eta + 2f(x|\xi)}{(x - \xi)^2} \frac{d\xi}{2y},$$

das ich in nur wenig veränderter Form auch meinen früheren Arbeiten zu Grunde gelegt habe. In demselben ist

$$y^2 = f(x) = \sum_{\lambda=0}^{2\rho+2} \binom{2\rho+2}{\lambda} A_{\lambda} x^{\lambda} = A_{2\rho+2} \prod_{\mu=0}^{2\rho+1} (x - a_{\mu}),$$

und  $\eta$  bedeutet einen der Werthe von  $y$  ausgerechnet für  $x = \xi$ ; so-  
dann ist

$$f(x|\xi) = \sum_{i,j=0}^{\rho+1} \binom{\rho+1}{i} \binom{\rho+1}{j} A_{i+j} x^i \xi^j,$$

und endlich ist die Summation über  $\alpha$ , wie später die Summationen über  $\beta$  und  $\gamma$ , von 1 bis  $\rho$  auszuführen.

Dieses System werde ich nun so umwandeln, dass ich für die folgenden Entwicklungen passendere Formeln erhalte. Ich differentiire zu diesem Zwecke die Gleichung (B) nach  $\xi$  und finde, wenn ich zur Abkürzung bei der Thetafunction nur *ein* Argument —  $\Theta(u_{\alpha})$  statt  $\Theta(u_1, u_2, \dots, u_{\rho})$  — schreibe:

$$(1) \quad \sum_{\beta} \left( \frac{\partial \lg \Theta(u_{\alpha} - w_{\alpha})}{\partial u_{\beta}} + \frac{\partial \lg \Theta(w_{\alpha})}{\partial w_{\beta}} \right) \xi^{\beta-1} \\ = - \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_{\alpha} y_{\alpha}} \frac{2y\eta + 2f(x|\xi)}{(x-\xi)^2} \cdot \frac{dx}{2y}.$$

Hierauf bestimme ich mit Hilfe des Abel'schen Theorems  $\rho$  Größenpaare  $c_{\alpha}, e_{\alpha}$  der Art, dass

$$\sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{c_{\alpha} e_{\alpha}} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\rho+1}}^{\xi \eta} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} = 0;$$

die Grössen  $c_{\alpha}, e_{\alpha}$  genügen dann dabei für  $x, y$  gesetzt der Gleichung

$$\eta \prod_{x=1}^{\rho+1} (x - a_{2x-1}) + y \prod_{x=1}^{\rho+1} (\xi - a_{2x-1}) = 0.$$

Wenn ich jetzt

$$u_{\beta} - w_{\beta} = \bar{u}_{\beta}$$

setze, so ist (vergl. (A))

$$(2) \quad \bar{u}_{\beta} = \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_{\alpha} y_{\alpha}} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\rho+1}}^{\xi \eta} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y} = \sum_{\alpha} \int_{c_{\alpha} e_{\alpha}}^{x_{\alpha} y_{\alpha}} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y},$$

während die Gleichung (1) die Form annimmt:

$$\sum_{\beta} \left( \frac{\partial \lg \Theta(\bar{u}_{\alpha})}{\partial \bar{u}_{\beta}} + \frac{\partial \lg \Theta(w_{\alpha})}{\partial w_{\beta}} \right) \xi^{\beta-1} \\ = - \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_{\alpha} y_{\alpha}} \frac{2y\eta + 2f(x|\xi)}{(x-\xi)^2} \cdot \frac{dx}{2y}.$$

Hierin lasse ich die Argumente Null werden und subtrahire die so entstehende Gleichung von der ursprünglichen; da  $\Theta(u_{\alpha})$  eine gerade Thetafunction ist, so erhält man

$$(3) \quad \sum_{\beta} \frac{\partial \lg \Theta(\bar{u}_{\alpha})}{\partial \bar{u}_{\beta}} \xi^{\beta-1} = - \sum_{\alpha} \int_{c_{\alpha} e_{\alpha}}^{x_{\alpha} y_{\alpha}} \frac{2y\eta + 2f(x|\xi)}{(x-\xi)^2} \cdot \frac{dx}{2y}.$$

An Stelle von  $\bar{u}_{\alpha}$  will ich wieder  $u_{\alpha}$  schreiben; dann aber müssen auch die oberen Grenzen in den Gleichungen (2) und (3) anders, z. B. mit  $x_{\alpha}$ ,  $y_{\alpha}$ , bezeichnet werden. Dadurch ist man jetzt zu dem Gleichungssystem gelangt:

$$(C) \quad u_{\beta} = \sum_{\alpha} \int_{c_{\alpha} e_{\alpha}}^{x_{\alpha} y_{\alpha}} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y},$$

$$(D) \quad \sum_{\beta} \frac{\partial \lg \Theta(u_{\alpha})}{\partial u_{\beta}} \xi^{\beta-1} = - \sum_{\alpha} \int_{c_{\alpha} e_{\alpha}}^{x_{\alpha} y_{\alpha}} \frac{2y\eta + 2f(x|\xi)}{(x-\xi)^2} \cdot \frac{dx}{2y},$$

in dem die Grössen  $c_{\alpha}$ ,  $e_{\alpha}$  dadurch bestimmt sind, dass der Ausdruck

$$(E) \quad \eta \prod_{x=1}^{q+1} (x - a_{2x-1}) + y \prod_{x=1}^{q+1} (\xi - a_{2x-1})$$

verschwindet, wenn man in demselben  $c_{\alpha}$ ,  $e_{\alpha}$  für  $x$ ,  $y$  setzt. Die Argumente  $u_{\alpha}$  können als dieselben Grössen betrachtet werden, welche die Argumente in den Gleichungen (A) und (B) sind. — Von diesen Gleichungen ausgehend werde ich den hier zu entwickelnden Beweis für die in denselben vorkommende Thetafunction liefern, und damit auch zugleich für alle die andern Thetafunctionen, welche aus dieser durch Vertauschung der  $a_2$  entstehen.

Bezüglich der übrigen Thetafunctionen wird der Beweis wohl am leichtesten dadurch zu führen sein, dass ich dieselben durch diese Thetafunction und ihre Ableitungen ausdrücke. Eine derartige Formel will ich jetzt hier entwickeln. Dieselbe kann als eine Ausdehnung der bekannten Gleichung der elliptischen Functionen

$$- \frac{d^2 \lg \sigma u}{du^2} - e_x = pu - e_x = \frac{\sigma_x^2 u}{\sigma^2 u}$$

auf hyperelliptische Functionen betrachtet werden. Ich werde dieselbe, da die Entwicklung dadurch am einfachsten wird, zuerst für den Fall beweisen, dass einer der Verzweigungspunkte,  $a_{2\rho+1}$ , im Unendlichen liegt. Die Gleichungen (C) und (D) gehen aber, wenn ich in denselben

$$y^2 = \left( \frac{-x}{a_{2\rho+1}} + 1 \right) \sum_{\lambda=0}^{2\rho+1} \binom{2\rho+2}{\lambda} A_{\lambda}' x^{\lambda}$$

$$= \left( \frac{-x}{a_{2\rho+1}} + 1 \right) (2\rho+2) A_{2\rho+1}' \prod_{\mu=0}^{2\rho} (x - a_{\mu}') = \left( \frac{-x}{a_{2\rho+1}} + 1 \right) y'^2,$$

also

$$\binom{2\rho+2}{\lambda} A_{\lambda} = \binom{2\rho+2}{\lambda} A_{\lambda}' - \binom{2\rho+2}{\lambda-1} \frac{1}{a_{2\rho+1}} A_{\lambda-1}'$$

setze und hierauf  $a_{2\rho+1}$  unendlich werden lasse, über in

$$(4) \quad u_{\beta}' = \sum_{\alpha} \int_{c_{\alpha}' e_{\alpha}'}^{x_{\alpha}' y_{\alpha}'} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y'},$$

$$(5) \quad \sum_{\beta} \frac{\partial \lg \Theta(u_{\alpha}')}{\partial u_{\beta}'} \xi^{\beta-1} = - \sum_{\alpha} \int_{c_{\alpha}' e_{\alpha}'}^{x_{\alpha}' y_{\alpha}'} \frac{2y' \eta' + 2f_1(x|\xi)}{(x-\xi)^2} \cdot \frac{dx}{2y'},$$

wobei die  $c_{\alpha}', e_{\alpha}'$  für  $x, y'$  gesetzt den Ausdruck

$$(6) \quad \eta' \prod_{x=1}^{\rho} (x - a_{2x-1}') + y' \prod_{x=1}^{\rho} (\xi - a_{2x-1}')$$

zum Verschwinden bringen, und  $f_1(x|\xi)$  sich nur dadurch von  $f(x|\xi)$  unterscheidet, dass in demselben  $A_{\lambda}'$  an Stelle von  $A_{\lambda}$  für

$$\lambda = 0, 1, \dots, 2\rho+1$$

und Null an Stelle von  $A_{2\rho+2}$  steht. Jetzt lasse ich auch noch den Werth  $\xi$  in's Unendliche rücken, nachdem ich die Gleichung (5) durch  $\xi^{\rho-1}$  dividirt habe. Wenn ich dabei zugleich auch die Bezeichnung der oberen Grenzen ein wenig ändere, gehen dadurch die Gleichungen (4) und (5), da noch aus dem Ausdrucke (6) folgt, dass für  $\xi = \infty$  die  $c_{\alpha}$  die Werthe  $a_{2\alpha-1}'$  annehmen, über in

$$(7) \quad u_{\beta}' = \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}'}^{x_{\alpha}' y_{\alpha}'} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y'},$$

$$\frac{\partial \lg \Theta(u_{\alpha}')}{\partial u_{\beta}'} = \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}'}^{x_{\alpha}' y_{\alpha}'} G(x)_{\beta} \frac{dx}{2y'},$$

wobei

$$G(x)_q = -2 \sum_{x=0}^q \left( q + \frac{1}{x} \right) A'_{q+1+x} x^x.$$

Diese Gleichungen differentiire ich und eliminire die  $dx'_\alpha$ ; das Ergebniss ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_q} du'_\gamma, & G(x'_1)_q, & G(x'_2)_q, & \dots, & G(x'_q)_q \\ du'_\beta, & x'^{\beta-1}_1, & x'^{\beta-1}_2, & \dots, & x'^{\beta-1}_q \end{vmatrix} = 0,$$

in der die zweite, dritte, u. s. w. Zeile aus der zweiten hervorgeht, indem ich dem  $\beta$  die Werthe 1, 2, u. s. w. gebe. Hierin sind die  $du'_\beta$  ganz beliebig, und ich kann daher für  $du'_\beta$  den Werth  $t^{\beta-1}$  setzen, wo  $t$  eine neue vollkommen unabhängige Variable ist. Hierauf addire ich zur ersten Zeile die mit  $2A'_{q+1}$ , bez.  $2\left(q + \frac{1}{1}\right)A'_{q+2}$  u. s. w. multiplicirten zweiten, bez. dritten u. s. w. Zeilen. Die erste Zeile nimmt dadurch die Form an:

$$\left( \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_q} t^{\gamma-1} - G(t)_q \right) - (2q+2)A'_{2q+2}t^q, \dots, -(2q+2)A'_{2q+2}x'_1^q, \dots, -(2q+2)A'_{2q+2}x'_q^q$$

und die übrigen werden

$$t^{\beta-1}, \quad x'^{\beta-1}_1, \quad \dots, \quad x'^{\beta-1}_q.$$

Die Determinante kann man jetzt in folgender Weise spalten:

$$\begin{vmatrix} \left( \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_q} t^{\gamma-1} - G(t)_q \right) & | & x'^{\beta-1}_1, & x'^{\beta-1}_2, & \dots, & x'^{\beta-1}_q \\ \hline (2q+2)A'_{2q+1} & | & t^q, & x'^q_1, & x'^q_2, & \dots, & x'^q_q \\ & & t^{\beta-1}, & x'^{\beta-1}_1, & x'^{\beta-1}_2, & \dots, & x'^{\beta-1}_q \end{vmatrix}.$$

Da die beiden Determinanten je gleich dem Producte der Differenzen der in ihnen vorkommenden Grössen sind, so ergibt sich hieraus:

$$(8) \quad \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_q} t^{\gamma-1} - G(t)_q = (2q+2)A'_{2q+1} \prod_{\alpha} (t - x'_\alpha).$$

Nun besteht andererseits die Formel

$$(9) \quad \prod_{\alpha} (a'_\mu - x'_\alpha) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{f'_1(a'_\mu)}{(2q+2)A'_{2q+1}}} \cdot \frac{\Theta^2(u'_\alpha)_\mu}{\Theta^2(u'_\alpha)},$$

wo  $\varepsilon_1$  eine vierte Wurzel der Einheit bedeutet, und

$$f'_1(x) = \frac{d}{dx} y^2$$

ist, während die Thetafunction  $\Theta(u_\alpha)_\mu$  durch die Gleichung

$$(10) \quad \Theta(u_\alpha + \omega_\alpha) = j \Theta(u_\alpha)_\mu e^{\sum \eta_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2} \omega_\alpha)}$$

definiert ist, in der mit  $j$  eine achte Wurzel der Einheit bezeichnet wird, und

$$(11) \quad \omega_\alpha = \int_{\infty}^{a'_\mu} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y'}.$$

Diese Formel (9) kann bekanntlich aus der Gleichung (B) abgeleitet werden, indem man nur das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung und die Gleichungen (10) und (11) zu Hilfe nimmt, wobei man sogar nicht einmal in (10) die Bedeutung von  $\eta_\alpha$  zu kennen braucht. —

Gebe ich jetzt in der Gleichung (8) der noch beliebigen Variablen  $t$  den Werth  $a'_\mu$  und drücke die rechte Seite mittels (9) durch den Quotienten der Thetafunctionen aus, so erhalte ich die *gesuchte Beziehung für den Fall, dass einer der Verzweigungspunkte im Unendlichen liegt*:

$$(12) \quad \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u'_\alpha)}{\partial u'_\gamma \partial u'_\varrho} a'^{\gamma-1}_\mu - G(a'_\mu)_\varrho = \varepsilon_1 \sqrt{(2\varrho+2) A'_{2\varrho+1} f'_1(a'_\mu)} \frac{\Theta^2(u'_\alpha)_\mu}{\Theta^2(u'_\alpha)}.$$

Dieselbe muss nun noch dadurch umgeformt werden, dass ich den im Unendlichen befindlichen Verzweigungspunkt in's Endliche verlege. Diess geschieht durch zwei aufeinanderfolgende Substitutionen.

Die erste besteht darin, dass ich

$$x' = \frac{1}{x''}, \quad \text{also} \quad a'_\lambda = \frac{1}{a''_\lambda}$$

setze. Bezeichne ich sodann

$$\sum_{\lambda=1}^{2\varrho+2} \binom{2\varrho+2}{\lambda} A'_{2\varrho+2-\lambda} x''^\lambda = A'_0 x'' \prod_{\mu=0}^{2\varrho} (x' - a''_\mu) = y''^2 = f_2(x''),$$

so ist

$$y' = \frac{1}{x''^{\varrho+1}} y''$$

und mithin

$$(2\varrho+2) A'_{2\varrho+1} = \left[ \frac{df_2(x'')}{dx''} \right]_{x=0} = f'_2(0), \quad f'_1(a'_\mu) = \frac{-1}{a''_\mu{}^{2\varrho}} f'_2(a''_\mu),$$

und ferner wird

$$G(a'_\mu)_\varrho = \frac{-2}{a''_\mu{}^\varrho} \sum_{x=0}^{\varrho} \binom{\varrho+1}{x} A'_{2\varrho+1-x} a''_\mu{}^x = \frac{1}{a''_\mu{}^\varrho} G_1(a''_\mu)_\varrho.$$

Aendere ich ausserdem noch die Bezeichnung der Argumente, indem ich —  $u''_{\varrho+1-x}$  für  $u'_\alpha$  schreibe, so nehmen die Gleichungen (7) und (12) die folgende Form an:

$$(13) \quad u''_{\beta} = \sum_{\alpha} \int_{a''_{2\alpha-1}}^{x''_{\alpha} y''_{\alpha}} x^{\beta-1} \frac{dx}{2y''},$$

$$(14) \quad \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u''_{\alpha})}{\partial u''_1 \partial u''_{\gamma}} a''_{\mu}{}^{\gamma} - G_1(a''_{\mu})_{\varrho} = \varepsilon \sqrt{f'_2(0) f'_2(a''_{\mu})} \frac{\Theta^2(u''_{\alpha})_{\mu}}{\Theta^2(u''_{\mu})},$$

wo  $\varepsilon$  wieder eine vierte Wurzel der Einheit bedeutet.

Hierauf mache ich die Substitution

$$x'' = x - a_{2\varrho+1}.$$

Der Ausdruck, in den sich dadurch  $y''^2 = f_2(x'')$  verwandelt, ist vom  $(2\varrho+2)^{\text{ten}}$  Grade mit  $2\varrho+3$  willkürlichen Coefficienten, und ich kann daher denselben mit dem in (A) und (B) vorkommenden  $y^2$  identificiren:

$$(15) \quad y''^2 = f_2(x - a_{2\varrho+1}) = y^2 = f(x),$$

so dass

$$a''_{\lambda} = a_{\lambda} - a_{2\varrho+1}$$

wird. Wenn ich jetzt

$$u_{\beta} = \sum_{\nu=1}^{\beta} \binom{\beta-1}{\nu-1} a_{2\varrho+1}^{\beta-\nu} u''_{\nu}$$

setze, so geht die Gleichung (13) in die Gleichung (A) über; sodann ist

$$\sum_{\gamma} \frac{\partial \lg \Theta(u''_{\alpha})}{\partial u''_{\gamma}} a''_{\mu}{}^{\gamma-1} = \sum_{\beta} \frac{\partial \lg \Theta(u_{\alpha})}{\partial u_{\beta}} a_{\mu}^{\beta-1},$$

und mithin

$$(16) \quad \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u''_{\alpha})}{\partial u''_1 \partial u''_{\gamma}} a''_{\mu}{}^{\gamma} = (a_{\mu} - a_{2\varrho+1}) \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_{\alpha})}{\partial u_{\beta} \partial u_{\gamma}} a_{\mu}^{\beta-1} a_{2\varrho+1}^{\gamma-1}.$$

Da ferner  $f(s|t)$  eine Covariante von  $f(x)$  ist, so geht dieser Ausdruck, wenn sich  $f(x)$  durch die Substitution  $x = x'' + a_{2\varrho+1}$  in  $f_2(x'')$  verwandelt, durch die Substitution

$$s = s'' + a_{2\varrho+1}, \quad t = t'' + a_{2\varrho+1}$$

in  $f_2(s''|t'')$  über:

$$f(s|t) = f_2(s''|t''),$$

wo  $f_2(s''|t'')$  aus  $f_2(x'')$  ebenso gebildet ist, wie  $f(s|t)$  aus  $f(x)$ . Gebe ich nun hierin  $s$  und  $t$  die Werthe  $a_{\mu}$  und  $a_{2\varrho+1}$ , so muss man  $a'_{\mu}$ , bez. 0 für  $s''$  und  $t''$  setzen:

$$f(a_{\mu}|a_{2\varrho+1}) = f_2(a'_{\mu}|0),$$

und hieraus folgt, da  $a''_{\mu} G_1(a'_{\mu})_{\varrho} = -2f_2(a'_{\mu}|0)$  ist:

$$(17) \quad G_1(a'_{\mu})_{\varrho} = \frac{-2f(a_{\mu}|a_{2\varrho+1})}{a_{\mu} - a_{2\varrho+1}}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen (16) und (17), wenn ich noch mit hinzunehme, dass

$$f_2'(0) = f'(a_{2q+1}), \quad f_2'(a_\mu') = f'(a_\mu)$$

ist, wie dies aus (15) folgt, bekomme ich die endgültige Form der Gleichung:

$$(F) \quad (a_\mu - a_{2q+1}) \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} a_\mu^{\beta-1} a_{2q+1}^{\gamma-1} + \frac{2f(a_\mu | a_{2q+1})}{a_\mu - a_{2q+1}} \\ = \varepsilon \sqrt{f'(a_\mu) f'(a_{2q+1})} \frac{\Theta^2(u_\alpha)_\mu}{\Theta^2(u_\alpha)},$$

durch welche die Thetafunction  $\Theta(u_\alpha)_\mu$ , die mittels

$$(G) \quad \Theta(u_\alpha + \omega_\alpha) = j \Theta(u_\alpha)_\mu e^{\sum \eta_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2} \omega_\alpha)}, \quad \omega = \int_{a_{2q+1}}^{a_\mu} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y}$$

definiert ist, ausgedrückt wird durch diejenige Thetafunction  $\Theta(u_\alpha)$ , welche von den Gleichungen (A) und (B) bestimmt ist. In derselben ist  $\varepsilon$  eine vierte Wurzel der Einheit, und die Argumente sind dieselben, wie in den Gleichungen (A), (B), (C) und (D).

Selbstverständlich kann man aus dieser Formel noch eine grosse Anzahl analoger ableiten, indem man dieselbe entweder linear transformirt, also die  $a_2$  vertauscht, oder indem man die Argumente um halbe Perioden vermehrt.

## § 2.

### Beweis.

Ich wende mich jetzt zu dem zu liefernden Beweise selbst. Der Einfachheit halber will ich dabei den Coefficienten von  $x^{2q+2}$  in  $y^2 = f(x)$ , d. i.

$$A_{2q+2} = 1$$

annehmen.

Indem ich die Gleichungen (C) als Differentialgleichungen schreibe:

$$du_\beta = \sum_\alpha x_\alpha^{\beta-1} \frac{dx_\alpha}{2y_\alpha}$$

und sie nach  $dx_\alpha$  auflöse, finde ich bei Einführung der Bezeichnung

$$\frac{1}{t - x_\alpha} \prod_\beta (t - x_\beta) = \varphi_\alpha(t) = \sum_\beta X_{\alpha, \beta} t^{\beta-1}$$

bekanntlich

$$\varphi_\alpha(x_\alpha) \frac{dx_\alpha}{2y_\alpha} = \sum_\beta X_{\alpha, \beta} du_\beta,$$

so dass

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_\beta} = 2\eta_\alpha \frac{X_{\alpha, q-\beta}}{\varphi_\alpha(x_\alpha)}.$$

Differentiirt man jetzt die Gleichung (D) partiell nach  $u_\gamma$ , so erhält man

$$\sum_\beta \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \xi^{\beta-1} = - \sum_\alpha \frac{2\eta_\alpha \gamma + 2f(x_\alpha | \xi)}{(x_\alpha - \xi)^2} \cdot \frac{X_{\alpha, q-\beta}}{\varphi_\alpha(x_\alpha)}.$$

Die rechte Seite verwandelt sich, wenn man die einzelnen Glieder der Summe zusammenzieht, in einen Bruch, dessen Zähler eine ganze Function,  $F_0(x_\alpha, \eta_\alpha)$ , der  $x_\alpha, \eta_\alpha$  wird, welche bei Vertauschung der  $x_\alpha$  höchstens ihr Vorzeichen ändert, während der Nenner das Product des Quadrates von

$$\varphi(\xi) = \prod_\alpha (\xi - x_\alpha)$$

mal dem Producte der Differenzen der  $x_\alpha$ :

$$\Delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

ist:

$$\sum_\beta \frac{\partial^2 \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \xi^{\beta-1} = \frac{F_0(x_\alpha, \eta_\alpha)}{\varphi^2(\xi) \Delta}.$$

Wiederholt man diese partielle Differentiation, so ändert sich die rechte Seite nur insofern, als an Stelle von  $F_0(x_\alpha, \eta_\alpha)$  eine andere ganze Function von  $x_\alpha, \eta_\alpha$ ,  $F(x_\alpha, \eta_\alpha)$ , tritt, welche auch höchstens ihr Vorzeichen ändert, wenn man die  $x_\alpha$  vertauscht, indess im Nenner höhere Potenzen von  $\varphi(\xi)$  und  $\Delta$  auftreten. Den Exponenten von  $\Delta$  will ich dabei als gerade,  $= 2q$ , annehmen, indem ich, wenn dies nicht schon unmittelbar der Fall ist, Nenner und Zähler mit  $\Delta$  multiplicire:

$$\sum_\beta \frac{\partial^{h_1+h_2+\dots+h_q+1} \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \dots \partial u_q^{h_q} \partial u_\beta} \xi^{\beta-1} = \frac{F(x_\alpha, \eta_\alpha)}{\varphi^p(\xi) \Delta^{2q}}.$$

In dieser Gleichung lasse ich die  $u_\alpha$  gleich Null werden; dadurch gehen die  $x_\alpha, \eta_\alpha$  in  $c_\alpha, e_\alpha$  über, so dass man, wenn

$$\varphi_0(\xi) = \prod_\alpha (\xi - c_\alpha), \quad \Delta_0 = \prod_{i < j} (e_i - e_j)$$

gesetzt wird,

$$\sum_\beta \left[ \frac{\partial^{h_1+h_2+\dots+h_q+1} \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \dots \partial u_q^{h_q} \partial u_\beta} \right]_{u_\alpha=0} \xi^{\beta-1} = \frac{F(c_\alpha, e_\alpha)}{\varphi_0^p(\xi) \Delta_0^{2q}}$$

findet. Die  $c_\alpha, e_\alpha$  bringen für  $x, y$  gesetzt den Ausdruck (E) zum Verschwinden; mithin ist, wenn man

$$\prod_{\kappa=1}^{e+1} (x - a_{2\kappa-1}) = \psi(x)$$

setzt:

$$e_\alpha = -\eta \frac{\psi(c_\alpha)}{\psi(\xi)}.$$

Diesen Ausdruck von  $e_\alpha$  substituirt ich in die Function  $F(c_\alpha, e)$ , welche dadurch in eine ganze Function der  $c_\alpha$ ,  $F(c_\alpha)$ , dividirt durch eine Potenz von  $\psi(\xi)$  verwandelt wird:

$$F(c_\alpha, e_\alpha) = F(c_\alpha) : \psi^r(\xi).$$

Folglich ist

$$(18) \quad \sum_{\beta} \left[ \frac{\partial^{h_1+h_2+\dots+h_e+1} \lg \Theta(u_\alpha)}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \dots \partial u_e^{h_e} \partial u_\beta} \right]_{u_\alpha=0} \xi^{\beta-1} = \frac{F(c_\alpha)}{\varphi_0^p(\xi) \psi^r(\xi) \Delta_0^{2g}}.$$

Da die linke Seite und der Nenner auf der rechten Seite bei der Vertauschung der  $c_\alpha$  ungeändert bleibt, so muss dies auch bei dem Zähler  $F(c_\alpha)$  der Fall sein, d. h. es ist  $F(c_\alpha)$  eine symmetrische Function der  $c_\alpha$ .

Nun finde ich aus der Gleichung (E), welche wie eben erwähnt, für  $x = c_\alpha$ ,  $y = e_\alpha$  befriedigt wird, indem ich durch Quadriren die Wurzelgrösse  $y$  entferne, dass die  $c_\alpha$  die Wurzeln der Gleichung

$$(19) \quad \bar{\varphi}(x) = \left[ \prod_{\kappa=0}^e (x - a_{2\kappa}) (\xi - a_{2\kappa+1}) - \prod_{\kappa=0}^e (\xi - a_{2\kappa}) (x - a_{2\kappa+1}) \right] : (x - \xi) \\ = C_0 x^e - C_1 x^{e-1} + C_2 x^{e-2} - \dots + (-1)^e C_e$$

sind, (wo die  $C_\nu$  ganze Functionen der  $a_\lambda$  sind, und insbesondere

$$C_0 = \prod_{\kappa=0}^e (\xi - a_{2\kappa+1}) - \prod_{\kappa=0}^e (\xi - a_{2\kappa})$$

ist,) so dass

$$\varphi_0(\xi) = C_0^{-1} \bar{\varphi}(\xi).$$

Bekanntlich lassen sich aber alle symmetrischen Functionen der  $c_\alpha$  ganz und rational durch die elementaren symmetrischen Functionen, d. i. hier durch  $C_\nu : C_0$  ausdrücken, und in Folge davon kann man  $F(c_\alpha)$  als ganze Function der  $C_\nu$ , d. i. mithin auch als ganze Function der  $a_\lambda$ , dividirt durch eine Potenz von  $C_0$  darstellen:

$$F(c_\alpha) = C_0^{-g} F_1(a_\lambda).$$

Dasselbe muss auch mit  $\Delta_0^2$  der Fall sein:

$$\Delta_0^2 = C_0^{-k} D(a_\lambda).$$

Bezüglich dieser Function  $D(a_\lambda)$  behaupte ich nun, sie enthält keinen von  $\xi$  unabhängigen Factor. Denn existirte ein solcher, so würde derselbe gleich Null gesetzt, eine Beziehung zwischen den  $a_\lambda$  darstellen,

der Art, dass  $\bar{\varphi} = 0$  zwei gleiche Wurzeln hätte, sobald dieser Beziehung genügt wäre, unabhängig davon, welchen Werth  $\xi$  hat. Aber eine solche Beziehung existirt nicht, denn die Bedingung, unter welcher bei  $\xi = a_0$  zwei Wurzeln von  $\bar{\varphi} = 0$  einander gleich sind, ist eine ganz andere als diejenige, bei der dies für  $\xi = a_1$  der Fall ist; die erstere besteht, wie aus (19) folgt, darin, dass zwei der Grössen  $a_0, a_2, \dots a_{2\varrho}$  einander gleich sind, die andere darin, dass zwei der  $a_1, a_3, \dots a_{2\varrho+1}$  denselben Werth haben. Folglich kann  $D(a_\lambda)$  keinen von  $\xi$  unabhängigen Factor enthalten. —

Die Gleichung (18) hat jetzt nach diesen Umformungen, wenn man die eventuell im Zähler vorkommende Potenz von  $C_0$  mit  $F_1(a_\lambda)$  unter Bezeichnung  $F_2(a_\lambda)$  zusammenfasst, die Gestalt angenommen:

$$\sum_{\beta} \left[ \frac{\partial^{h_1+h_2+\dots+h_{\varrho}+1} \lg \Theta(u_{\alpha})}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \dots \partial u_{\varrho}^{h_{\varrho}} \partial u_{\beta}} \right]_{u_{\alpha}=0} \xi^{\beta-1} = \frac{F_2(a_{\lambda})}{C_0^s \bar{\varphi}^p(\xi) \psi^r(\xi) D^q(a_{\lambda})},$$

in der die rechte Seite als Quotient zweier, in  $\xi$  und den  $a_{\lambda}$  ganzer Functionen erscheint. Nun ist aber die linke Seite eine ganze Function von  $\xi$ , folglich müssen auf der rechten Seite alle  $\xi$  enthaltenden Factoren des Nenners, d. i., da daselbst keine von  $\xi$  unabhängigen Factoren vorkommen, die *sämmtlichen* Factoren des Nenners in den Zähler theilbar sein. Da Nenner und Zähler ganze Functionen der  $a_{\lambda}$  sind, so ist dies nach bekannten Sätzen auch mit dem Quotienten der Fall. Demgemäss ist

$$\sum_{\beta} \left[ \frac{\partial^{h_1+h_2+\dots+h_{\varrho}+1} \lg \Theta(u_{\alpha})}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \dots \partial u_{\varrho}^{h_{\varrho}} \partial u_{\beta}} \right]_{u_{\alpha}=0} \xi^{\beta-1}$$

eine ganze Function der  $a_{\lambda}$ , und da  $\xi$  beliebig ist, müssen es auch die einzelnen Ableitungen von  $\lg \Theta(u_{\alpha})$  selbst sein. Daraus schliesst man, dass in der Reihenentwicklung von

$$\lg \frac{\Theta(u_{\alpha})}{\Theta(0)}$$

nach Potenzen der  $u_{\alpha}$  die Coefficienten ebenfalls ganze Functionen der  $a_{\lambda}$  sind. Aus dieser Thatsache folgt dann weiter, da

$$\frac{\Theta(u_{\alpha})}{\Theta(0)} = e^{\lg \frac{\Theta(u_{\alpha})}{\Theta(0)}} = 1 + \left( \lg \frac{\Theta(u_{\alpha})}{\Theta(0)} \right) + \frac{1}{2} \left( \lg \frac{\Theta(u_{\alpha})}{\Theta(0)} \right)^2 + \dots,$$

dass auch in der Reihenentwicklung der durch die Gleichungen (A) und (B) oder durch die Gleichungen (C), (D) und (E) definirten Thetafunction,  $\Theta(u_{\alpha})$ , nach Potenzen der  $u_{\alpha}$  sämtliche Coefficienten, abgesehen von dem allen gemeinsamen Factor  $\Theta(0)$ , ganze Functionen der Verzweigungspunkte  $a_{\lambda}$  sind. Damit wäre der Beweis für diese Theta-

function erbracht. — Man erkennt aber weiter noch, dass diese Coefficienten je symmetrisch sind einerseits in den  $a_0, a_2, \dots a_{2\rho}$ , anderseits in den  $a_1, a_3, \dots a_{2\rho+1}$ . Denn dies ist mit den  $c_\alpha$ , mit  $C_0$  und mit  $\psi(\xi)$  der Fall, und durch diese Grössen allein sind die Ableitungen von  $\lg \Theta(u_\alpha)$  ausgedrückt worden.

Was nun für diese Thetafunction,  $\Theta(u_\alpha)$ , bewiesen wurde, gilt auch für alle die  $\frac{1}{2}(2\rho+2) - 1$  anderen Thetafunctionen, welche durch Vertauschung der  $a_\lambda$ , d. i. also durch lineare Transformation der Thetafunctionen aus dieser hervorgehen, denn die ganze seitherige Entwicklung dieses Paragraphen bleibt dann mit der einzigen Veränderung bestehen, dass in der Gleichung (E) die betreffende Vertauschung der  $a_\lambda$  gemacht werden muss.

Insbesondere ist dies auch bei derjenigen Thetafunction,  $\Theta(u_\alpha)_I$ , der Fall, welche aus  $\Theta(u_\alpha)$  durch die Vermehrung der Argumente  $u_\alpha$  um

$$\bar{w}_\alpha = \int_{a_{2\rho+1}}^{a_0} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\rho-1}}^{a_2} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y}$$

hervorgeht; dieselbe ist symmetrisch in  $a_0, a_2, a_1, a_3, a_5, \dots a_{2\rho-3}$ , bez.  $a_4, a_6, a_8, \dots a_{2\rho}, a_{2\rho-1}, a_{2\rho+1}$ . Substituiert man nämlich

$$u_\alpha + \bar{w}_\alpha = \bar{u}_\alpha$$

in die Gleichungen (A) und (B) und macht hierauf die nothwendigen Umänderungen, so erhält man wiederum das System (C), (D) und (E), nur dass in dem letzteren Ausdruck  $a_0$  und  $a_2$  an Stelle von  $a_{2\rho-1}$  und  $a_{2\rho+1}$ , und umgekehrt, stehen. —

Die Reihenentwicklung der übrigen Thetafunctionen, die nicht symmetrisch in je  $\rho+1$  der Verzweigungspunkte sind, führt man mittelst der Formel (F) auf diese Thetafunctionen zurück. Denn schreibe ich in derselben an Stelle der Ableitungen des Logarithmus die Ableitungen der Thetafunction selbst, indem ich zugleich, um eine bestimmte Thetafunction im Auge zu haben,  $\mu = 2\rho+1$  setze:

$$(20) \quad (a_{2\rho-1} - a_{2\rho+1}) \sum_{\beta\gamma} \left( \Theta(u_\alpha) \frac{\partial^2 \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} - \frac{\partial \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\beta} \cdot \frac{\partial \Theta(u_\alpha)}{\partial u_\gamma} \right) a_{2\rho-1}^{\beta-1} a_{2\rho+1}^{\gamma-1} \\ + 2 \frac{f(a_{2\rho-1} | a_{2\rho+1})}{a_{2\rho-1} - a_{2\rho+1}} \Theta^2(u_\alpha) = \varepsilon \sqrt{f'(a_{2\rho-1}) f'(a_{2\rho+1})} \Theta^2(u_\alpha)_{2\rho-1},$$

so erkennt man aus der entstehenden Gleichung, da  $\frac{f(a_{2\rho-1} | a_{2\rho+1})}{a_{2\rho-1} - a_{2\rho+1}}$  eine ganze Function der  $a_\lambda$  (denn  $f(x | a_{2\rho+1})$  verschwindet für  $x = a_{2\rho+1}$  und ist demnach durch  $x - a_{2\rho+1}$  theilbar,) ist, dass die Coefficienten der Reihenentwicklung von  $\Theta^2(u_\alpha)_{2\rho-1}$ , und dem zu Folge auch diejenige von  $\Theta(u_\alpha)_{2\rho-1}$  selbst, abgesehen von einem allen gemeinschaftlichen Factor, eine ganze Function der Verzweigungspunkte  $a_\lambda$  ist.

Diese Thetafunction  $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$ , die nebenbei bemerkt eine ungerade Thetafunction ist, wird dadurch charakterisirt, dass sie symmetrisch ist einerseits in

$$a_1, a_3, a_5, \dots a_{2\varrho-3}$$

und anderseits in

$$(21) \quad a_0, a_2, a_4, \dots a_{2\varrho}, a_{2\varrho-1}, a_{2\varrho+1}.$$

Das erstere erkennt man unmittelbar aus der Gleichung (20), während man im übrigen aus derselben nur sieht, dass diese Thetafunction symmetrisch in

$$a_0, a_2, a_4, \dots a_{2\varrho}$$

ist. Nun geht aber auf Grund der Gleichung (G) die Thetafunction  $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$  aus  $\Theta(u_\alpha)$  hervor, indem man in letzterer die Argumente  $u_\alpha$  um

$$\int_{a_{2\varrho+1}}^{a_{2\varrho-1}} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y}$$

vermehrt; wenn ich nun diese Grösse

$$\begin{aligned} \int_{a_{2\varrho+1}}^{a_{2\varrho-1}} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y} &= \int_{a_{2\varrho+1}}^{a_0} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y} - \int_{a_{2\varrho-1}}^{a_2} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y} + \int_{a_0}^{a_2} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y} \\ &= \varpi_\alpha + \int_{a_0}^{a_2} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y} \end{aligned}$$

schreibe und beachte, dass sich  $\Theta(u_\alpha)$  durch Vermehrung der Argumente  $u_\alpha$  um  $\varpi_\alpha$  in  $\Theta(u_\alpha)_I$  verwandelt, so muss ich schliessen, dass  $\Theta(u_\alpha)_I$  in  $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$  übergeht, wenn ich die  $u_\alpha$  um

$$\int_{a_0}^{a_2} x^{\alpha-1} \frac{dx}{2y}$$

vermehre. Aus diesem Umstand geht hervor, dass zwischen  $\Theta(u_\alpha)_I$  und  $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$  eine der Gleichung (20) analoge Gleichung besteht, in der nur  $a_{2\varrho-1}$ ,  $a_{2\varrho+1}$  und  $\Theta(u_\alpha)$  durch  $a_0$ ,  $a_2$  und  $\Theta(u_\alpha)_I$  ersetzt sind. Da nun, wie schon oben hervorgehoben,  $\Theta(u_\alpha)_I$  symmetrisch in

$$a_4, a_6, a_8, \dots a_{2\varrho}, a_{2\varrho-1}, a_{2\varrho+1}$$

ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass  $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$  ebenfalls in diesen Grössen symmetrisch sein muss. Und bringt man diese Thatsache damit in Zusammenhang, dass, wie eben angeführt  $\Theta(u)_{2\varrho-1}$  auch symmetrisch in  $a_0, a_2, a_4, \dots a_{2\varrho}$  ist, so erkennt man, dass diese Thetafunction thatsächlich in den Grössen (21) symmetrisch sein muss, wie behauptet worden ist.

Vertauscht man nun die  $a_2$ , so entstehen aus  $\Theta(u_\alpha)_{2\varrho-1}$  noch  $\binom{2\varrho+2}{\varrho-1} - 1$  weitere Thetafunctionen, und von dieser ganzen Gruppe von Thetafunctionen ist somit *auch* bewiesen, dass die Coefficienten ihrer Reihenentwicklung, abgesehen von einem constanten Factor, *ganze Functionen der Verzweigungspunkte  $a_\lambda$  sind.* —

So fährt man weiter fort: Indem man, wenn  $\varrho > 2$ , in der Gleichung (20) die Argumente  $u_\alpha$  um

$$\int_{a_{2\varrho-3}}^{a_{2\varrho-5}} x^{a-1} \frac{dx}{2y}$$

vermehrt und die Formel (G) benutzt, tritt auf der linken Seite eine Thetafunction dieser letzteren Gruppe auf, und in der eben ausgeführten Weise schliesst man, dass die rechtsstehende Thetafunction bei ihrer Reihenentwicklung, abgesehen von einem constanten Factor, eine ganze Function der  $a_\lambda$  ist, und dass sie ungeändert bleibt bei den Vertauschungen von

$$a_1, a_3, a_5, \dots a_{2\varrho-7},$$

bez. von

$$a_0, a_2, a_4, \dots a_{2\varrho}, a_{2\varrho-5}, a_{2\varrho-3}, a_{2\varrho-1}, a_{2\varrho+1}. —$$

Und indem man so fortfährt, kommt man dazu den Beweis für alle Thetafunctionen zu liefern.

Halle a /S., November 1887.