Über die Näherungsnenner regulärer Kettenbrüche.

Von **Leopold Gegenbauer** in Wien.

Im zweiten Hefte des 18. Bandes der Acta mathematica hat Herr David Hilbert[1]) bewiesen, dass die Determinante der quadratischen Form

$$\int_0^1 (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1})^2 \, dx = \int_0^1 [f(x)]^2 \, dx$$

der n Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ gleich ist dem reciproken Werte der Discriminante der Gleichung

$$x^n + \binom{n}{1}^2 x^{n-1} + \binom{n}{2}^2 x^{n-2} + \ldots = 0,$$

deren linke Seite durch eine lineare Substitution in die n^{te} Kugelfunction übergeführt werden kann und mit Hilfe dieses bemerkenswerten Theorems auf Grund eines Satzes des Herrn Minkowski über definite quadratische Formen gezeigt, dass für $|\beta - \alpha| < 4$ das Integral

$$\int_\alpha^\beta [f(x)]^2 \, dx$$

bei geeigneter Wahl von ganzzahligen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ durch Vergrößerung von n beliebig klein gemacht werden kann.

Da die Kugelfunctionen, abgesehen von constanten Factoren, die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung von

$$\frac{1}{2} l \frac{x+1}{x-1} = \int_0^1 \frac{x \, dz}{x^2 - z^2}$$

sind, so liegt die Vermuthung nahe, dass analoge Theoreme für die Näherungsnenner einer ganzen Classe von regulären Kettenbrüchen, in welcher der eben erwähnte nur ein einzelnes Indi-

[1]) Ein Beitrag zur Theorie der Legendre'schen Polynome A. o. a. O. S. 155—160.

viduum ist, bestehen; dies zu zeigen, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

I. Die Näherungsnenner bezw. Näherungszähler des regulären Kettenbruches

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \cdots}}}$$

sollen der Reihe nach mit $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots$ bezw. $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ bezeichnet werden, so dass also $\varphi_{\lambda+1}(x)$ und $\psi_\lambda(x)$ den Grad λ haben und die Formeln

$$\begin{aligned}
&\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1 \\
&\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = 1 \\
(1) \qquad &\psi_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\, \psi_{n-1}(x) - \psi_{n-2}(x) \\
&\varphi_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\, \varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

bestehen, aus denen unmittelbar folgt, dass die ganze Function $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\Phi_\mu(x) = \begin{vmatrix} \varphi_n(x), & \varphi_{n-\mu}(x) \\ \psi_n(x), & \psi_{n-\mu}(x) \end{vmatrix}; \quad \Phi_0(x) = 0, \quad \Phi_1(x) = 1,$$

in welcher $x^{\mu-1}$ den Coefficienten $\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{n-\mu+2}$ hat, der μ^{te} Näherungszähler des regulären Kettenbruches

$$\frac{1}{\alpha_{n+1} x + \beta_{n+1} - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n - \cfrac{1}{\alpha_{n-1} x + \beta_{n-1} - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1}}}}$$

ist. Hieraus ergibt sich einerseits, dass $\psi_{n-1}(x)$ und $\psi_n(x)$ keine gemeinsame Wurzel besitzen, anderseits folgt, falls $\psi_n(x)$ keine mehrfache Wurzel hat, auf Grund der Euler'schen Formeln die Beziehung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})\, \psi_\varrho(x_{n,\lambda})\, \psi_\tau(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})\, \psi_\varrho(x_{n,\lambda}) - \psi_n(x_{n,\lambda})\, \varphi_\varrho(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})}\, \psi_\tau(x_{n,\lambda})$$

$$(n - 1 \geqq \rho, \ \tau \geqq 0)$$

$$= \delta_{\varrho,\tau} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})\, \psi_\varrho^2(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})}$$

$$(\delta_{\lambda,\varkappa} = 0, \ \lambda \gtrless \varkappa; \ \delta_{\lambda,\lambda} = 1),$$

wo die Summation nach $x_{n,\lambda}$ über alle Wurzeln der Gleichung $\psi_n(x) = 0$ auszudehnen ist, oder, da der Coefficient von x^μ in $\psi_\mu(x)$ $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})\,\psi_\varrho(x_{n,\lambda})\,\psi_\tau(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})} = \frac{\delta_{\varrho,\tau}}{\alpha_{\varrho+1}},$$

aus welcher Formel folgt

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_{n,\lambda}^\mu\,\psi_\varrho(x_{n,\lambda})\,\varphi_n(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})} = \frac{\delta_{\mu,\varrho}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\varrho+1}} \quad (n-1 \geqq \mu;\ \rho \geqq 0;\ \mu \leqq \rho).$$

II. Entwickelt man in der quadratischen Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} [f(x_{n,\lambda})]^2\, \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})}$$

der n Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ die ganze Function $f(x)$ in die nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ fortschreitende Reihe

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} A_\mu\,\psi_\mu(x),$$

so erhält man auf Grund der eben abgeleiteten Formeln die Beziehungen

$$A_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} a_{n-\mu-1}\,\beta_{\lambda,\mu},$$

wo

$$\beta_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 0 & (\lambda > \mu) \\ \dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\lambda} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

ist, und

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} [f(x_{n,\lambda})]^2\, \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{A_\lambda^2}{\alpha_{\lambda+1}},$$

so dass also die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende quadratische Form der Größen $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}$ durch eine lineare Substitution mit der Determinante

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}\,\alpha_{n-2}^2\,\alpha_{n-3}^3\ldots\alpha_1^{n-1}}$$

in die auf der linken Seite befindliche der Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ transformiert wird. Man erhält demnach auf Grund des bekannten Zusammenhanges zwischen der Determinante der ursprünglichen und der transformierten Form, da die Determinante der ersten den Wert

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

hat, für die Determinante Δ_{n-1} von

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} [f(x_{n,\lambda})]^2 \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})}$$

die Gleichung

$$\Delta_{n-1} = \frac{1}{\alpha_1^{2n-1} \alpha_2^{2n-3} \ldots \alpha_{n-1}^3 \alpha_n}, \tag{2}$$

welche zeigt, dass Δ_{n-1} lediglich von den Coefficienten von x in den einzelnen Theilnennern der Kettenbruchentwicklung von $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ abhängt.

Mit Hilfe des im Anfange erwähnten Satzes des Herrn Minkowski über den Zusammenhang zwischen den Werten einer definiten quadratischen Form und ihrer Determinante leitet man aus (2) folgende Formel ab:

Sind $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ bezw. $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ die Näherungsnenner bezw. Näherungszähler eines regulären Kettenbruches, in welchem die Coefficienten α_λ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ von x in den einzelnen Theilnennern positiv sind, so kann man stets ganze, ganzzahlige Functionen $f(x)$ vom Grade $n-1$ so bestimmen, dass die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} [f(x_{n,\lambda})]^2 \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})},$$

in welcher die Summation nach $x_{n,\lambda}$ über alle Wurzeln der Gleichung $\psi_n(x) = 0$ ausgedehnt ist, bei hinlänglich großem n beliebig klein wird, falls

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\alpha_1^{\frac{2n-1}{n}} \alpha_2^{\frac{2n-3}{n}} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{3}{n}} \alpha_n^{\frac{1}{n}}} = 0$$

ist.

III. Ist $\chi(x)$ eine von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ reelle und endliche Function, welche in diesem Intervalle das Zeichen nicht wechselt, so ist die Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_\alpha^\beta \frac{\chi(z)\,dz}{x-z}$$

regulär, es sind ferner die Wurzeln jedes ihrer Näherungsnenner reell und ungleich und zwischen α und β gelegen und es besteht für jede ganze Function $F(x)$ von nicht höherem, als dem Grade $2n-1$ die Beziehung

$$\int_\alpha^\beta F(x)\chi(x)\,dx = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{F(x_{n,\lambda})\,\varphi_n(x_{n,\lambda})}{\psi'_n(x_{n,\lambda})}.$$

Die Entwicklungen der letzten Nummer liefern daher die Theoreme:

Ist $\chi(x)$ eine im reellen Intervalle $\alpha \ldots \beta$ reelle und endliche Function, welche innerhalb der angegebenen Grenzen stets dasselbe Zeichen behält, so hat die Determinante der quadratischen Form

$$\int_\alpha^\beta (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x + a_{n-1})^2 \chi(x)\,dx$$

der n Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ den Wert

$$\frac{1}{\alpha_1^{2n-1}\alpha_2^{2n-3}\ldots\alpha_{n-1}^3\alpha_n},$$

wo α_λ der Coefficient von x im λ^{ten} Theilnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_\alpha^\beta \frac{\chi(z)\,dz}{x-z}$$

st.

Ist $\chi(x)$ eine im reellen Intervalle $\alpha \ldots \beta$ reelle und endliche Function, welche innerhalb der angegebenen Grenzen das Zeichen nicht wechselt, so lassen sich stets ganze, ganzzahlige Functionen $f(x)$ vom Grade $n-1$, so bestimmen, dass das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 \chi(x)\, dx$$

bei hinlänglich großem n beliebig klein wird, wenn die Coefficienten α_λ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ von x in den einzelnen Theilnennern der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi(z)\, dz}{x-z}$$

der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\alpha_1^{\frac{2n-1}{n}} \alpha_2^{\frac{2n-2}{n}} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{3}{n}} \alpha_n^{\frac{1}{n}}} = 0$$

genügen.

Die abgeleitete Formel mag nun auf einige specielle Fälle angewendet werden.

α) Bringt man den Gaussischen Kettenbruch

$$x^{-1} F(1, \tfrac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}) = \cfrac{1}{x - \cfrac{\frac{1}{2(\nu+1)}}{x - \cfrac{\frac{2\nu+1}{2(\nu+1)(\nu+2)}}{x - \ddots \cfrac{\frac{(n-2)(n+2\nu-3)}{4(n+\nu-3)(n+\nu-2)}}{x - \cfrac{\frac{(n-1)(n+2\nu-2)}{4(n+\nu-2)(n+\nu-1)}}{x - \ldots}}}}}$$

in bekannter Weise auf die (nach Seidl's Terminologie) reducierte Form, so erhält man sofort als Wert der Determinante der quadratischen Form

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1})^2\, dx$$

den Ausdruck

$$\frac{1}{2^{n^2}\nu^{2n-1}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right\}^n\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{(n+2\nu-\lambda-1)^\lambda(\lambda+1)^{n-\lambda-1}}{(\nu+\lambda)^{2n-2\lambda-1}}$$

aus welchem sich für $\nu=\frac{1}{2}$ unter Berücksichtigung der Relation

$$\int_\alpha^\beta\frac{dz}{x-z}=\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\frac{2x}{\beta-\alpha}-\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}-z}$$

die von Herrn D. Hilbert ermittelten Werte der Determinanten von

$$\int_0^1(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x+a_{n-1})^2\,dx \text{ und}$$

$$\int_\alpha^\beta(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x+a_{n-1})^2\,dx,$$

nämlich

$$\Delta=\frac{\{2^{n-2}3^{n-3}\ldots(n-2)^2(n-1)\}^2}{2^{n(n-1)}3^{2n-3}5^{2n-5}\ldots(2n-3)^3(2n-1)} \text{ und } (\beta-\alpha)^{n^2}\Delta$$

ergeben.

β) Für die ganzen Functionen

$$T_n^m(x)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}(-1)^\lambda\frac{x^{n-\lambda}}{\Pi(\lambda)\Pi(n-\lambda)\Pi(m+n-\lambda)},$$

auf welche zuerst Herr N. Sonine[1]) durch seine Untersuchungen über Cylinderfunctionen geführt wurde, deren speciellen Fall $m=1$ Herr R. Radau[2]) zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Ingrale der Form

$$\int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)\,dx,$$

[1]) „Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries". Mathematische Annalen. 16. Band, S. 1—80.

[2]) „Remarque sur le calcul d'une intégrale définie." Comptes Rendus t. 97, p. 157—158.

Herr P. Gram[1]) aber bei der Ausgleichung nach der Formel

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) e^{-x}$$

mit den Gewichten e^x benützte, und deren wesentlichste Eigenschaften ich in meiner im 95. Bande der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften in Wien enthaltenen Mittheilung „Über die Function $T_n^m(x)$“ ableitete, bestehen die Relationen

$$\int_0^\infty T_n^m(x)\, T_r^m\, e^{-x} x^m\, dx = \frac{\delta_{r,n}}{\Pi(n)\Pi(m+n)}$$

$$n(m+n)\, T_n^m(x) = \{x-(m+2n-1)\}\, T_{n-1}^m(x) - T_{n-2}^m(x)$$

$$\left[T_n^m(x)\right]' = T_{n-1}^{m+1}(x),$$

aus deren ersten zwei man erkennt, dass diese Functionen, abgesehen von constanten Multiplicatoren, die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^m\, dz}{x-z}$$

sind. Auf Grund der obigen Entwicklungen ergibt sich daher, dass die Determinante der quadratischen Form

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1})^2\, dx$$

den Wert

$$2^{n-3} 3^{n-2} \ldots (n-2)^2 (n-1) (m+1)^{n-1} (m+2)^{n-2} \ldots (m+n-2)^2 (m+n-1) [\Pi(m)]^n$$

hat.

IV. Die am Schlusse des Absatzes II. hervorgehobene Eigenschaft der Determinante Δ_{n-1} besitzt auch, wie sofort gezeigt werden soll, die Resultante $R(\psi_n, \psi_{n-1})$ der zwei aufeinanderfolgenden Näherungsnenner $\psi_n(x)$, $\psi_{n-1}(x)$.

Definiert man dieselbe nämlich durch die Gleichung

$$(3) \qquad R(\psi_n, \psi_{n-1}) = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1})^n \prod_{\mu=1}^{\mu=n-1} \psi_n(x_{n-1,\mu})$$

$$= (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{n-1} \prod_{\mu=1}^{\mu=n} \psi_{n-1}(x_{n,\mu}),$$

---

[1]) „Über die Entwicklung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate.“ Journal für die reine und angewandte Mathematik von Kronecker und Weierstrass. 94. Band, S. 41—73.

so erhält man aus (1) sofort die Beziehung

$$R(\psi_n, \psi_{n-1}) = (-1)^{n-1}(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1})^2 R(\psi_{n-1}, \psi_{n-2}),$$

welche zu der Formel

$$R(\psi_n, \psi_{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_1^{2n-2} \alpha_2^{2n-4} \alpha_3^{2n-6} \ldots \alpha_{n-1}^2$$

führt, deren Verbindung mit (2) die bemerkenswerten Relationen

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta_{n-1} R(\psi_n, \psi_{n-1}) &= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \\ \Delta_{n-1} R(\psi_{n+1}, \psi_n) &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \Delta_{n-1}^2 R(\psi_{n+1}, \psi_n) R(\psi_n, \psi_{n-1}) &= (-1)^n \end{aligned}$$

liefert. Man hat daher die Theoreme.

Sind $\varphi_\lambda(x)$ und $\psi_\lambda(x)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ die Näherungszähler bezw. Näherungsnenner eines regulären Kettenbruches und besitzt speciell $\psi_n(x)$ lauter verschiedene Wurzeln $x_{n,\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$, so ist das Product aus der Determinante der quadratische Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (a_0 x_{n,\lambda}^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x_{n,\lambda} + a_{n-1})^2 \frac{\varphi_n(x_{n,\lambda})}{\psi_n'(x_{n,\lambda})}$$

der n Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ und der mit dem Zeichen $(-1)^{\frac{(n+\varepsilon)(n+\varepsilon-1)}{2}}$ versehenen Resultante des $(n+\varepsilon)^{\text{ten}}$ und $(n+\varepsilon-1)^{\text{ten}}$ Näherungsbruches $(\varepsilon = 0, 1)$ gleich der $(2\varepsilon-1)^{\text{ten}}$ Potenz des Coefficienten der höchsten Potenz von x im n^{ten} Näherungsnenner.

Ist $\chi(x)$ eine im reellen Intervalle $\alpha \ldots \beta$ relle und endliche Function, welche innerhalb der gegebenen Grenzen stets dasselbe Zeichen behält, so ist das Product aus der Determinante der quadratischen Form

$$\int_\alpha^\beta (a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1})^2 \chi(x)\, dx$$

der n Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ und der mit dem Zeichen $(-1)^{\frac{(n+\varepsilon)(n+\varepsilon-1)}{2}}$ versehenen Resultante des $(n+\varepsilon)^{\text{ten}}$ und

$(n+\varepsilon-1)^{\text{ten}}$ Näherungsnenners ($\varepsilon=0, 1$) der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi(z)\,dz}{x-z}$$

gleich der $(2\varepsilon-1)^{\text{ten}}$ Potenz des Coefficienten der höchsten Potenz von x im n^{ten} Näherungsnenner.

V. Nicht sonderlich weniger einfach, als die eben ermittelte Beziehung zwischen der Determinante der oft erwähnten quadratischen Form und der Resultante zweier unmittelbar auf einander folgender Näherungsnenner, ist in vielen Fällen diejenige, welche zwischen ihr und der Discriminante des n^{ten} Näherungsnenners besteht.

Differentiiert man die Gleichung (1), nachdem in ihr n durch $n+1$ ersetzt wurde, nach x so erhält man die Gleichung

$$\frac{d\psi_{n+1}(x)}{dx} = (\alpha_{n+1}x+\beta_{n+1})\frac{d\psi_n(x)}{dx} + \alpha_{n+1}\psi_n(x) - \frac{d\psi_{n-1}(x)}{dx}, \tag{5}$$

welche sofort zu der Relation

$$\begin{gathered} R\left(\frac{d\psi_{n+1}(x)}{dx}, \frac{d\psi_n(x)}{dx}\right) + (-1)^n (n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2 R\left(\frac{d\psi_n(x)}{dx}, \frac{d\psi_{n-1}(x)}{dx}\right) + \\ + S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_{n+1}^{n-1} D(\psi_n(x)) \end{gathered} \tag{6}$$

führt, wo die Discriminante $D\big(\psi_n(x)\big)$ von $\psi_n(x)$ durch die Gleichung

$$D(\psi_n(x)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R\left(\psi_n(x), \frac{d\psi_n(x)}{dx}\right)$$

definiert wurde und $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die Wurzeln von $\frac{d\psi_n(x)}{dx}$ sind. Dieselbe liefert ersichtlich keine bemerkenswerte Beziehung zwischen der Discriminante und der angeführten Resultante bez. Determinante.

Die Näherungsnenner einer großen Anzahl von regulären Kettenbrüchen besitzen nun aber die Eigenschaft, dass ihre ersten Ableitungen mit gewissen Constanten multipliciert abermals die Näherungsnenner einer regulären Kettenbruchentwicklung sind. Es mag in dieser Hinsicht nur auf die in Nummer III angeführte erste Ableitung der Function $T_n^m(x)$ und auf die von mir wiederholt bewiesene Relation

$$\frac{d\,C_n^\nu(x)}{dx} = 2\nu\, C_{n-1}^{\nu+1}(x)$$

hingewiesen werden. In diesem Falle tritt an die Stelle der Gleichung (6) eine bedeutend einfachere, welche zu der angekündigten Beziehung führt.

Ist γ_λ der eben erwähnte Multiplicator für $\frac{d\psi_\lambda(x)}{dx}$ und $\alpha'_{\lambda-1}x + \beta'_{\lambda-1}$ der $(\lambda-1)^{\text{te}}$ Theilnenner der zuletzt genannten Kettenbruchentwicklung, so ist, wie sich aus der Gleichung

$$(7) \qquad \gamma_\lambda \frac{d\psi_\lambda(x)}{dx} = (\alpha'_{\lambda-1}x + \beta'_{\lambda-1})\gamma_{\lambda-1}\frac{d\psi_{\lambda-1}(x)}{dx} - \gamma_{\lambda-2}\frac{d\psi_{\lambda-2}(x)}{dx}$$

ergibt

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \; \alpha'_{\lambda-1} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{\gamma_\lambda}{\gamma_{\lambda-1}}.$$

Setzt man in (7) $\lambda = n+1$ und verbindet die dadurch entstehende Gleichung mit (6), so erhält man unter Berücksichtigung der eben ermittelten Formel die Beziehung

$$\psi_n(x) = \left\{\frac{x}{n} + \frac{\beta'_n\gamma_n - \beta_{n+1}\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1}\gamma_{n+1}}\right\}\frac{d\psi_n(x)}{dx} + \frac{\gamma_{n+1}-\gamma_{n-1}}{\alpha_{n+1}\gamma_{n+1}}\frac{d\psi_{n-1}(x)}{dx}.$$

aus welcher die Gleichung

$$D\big(\psi_n(x)\big) =$$
$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\gamma_n^{n-2}}\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_{n-1}}{\alpha_{n+1}\gamma_{n+1}\gamma_{n-1}}\right)^{n-1}(n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2 R\left(\gamma_n\frac{d\psi_n(x)}{dx}, \gamma_{n-1}\frac{d\psi_{n-1}(x)}{dx}\right)$$

folgt, die auf Grund der früheren Entwicklungen die Relation

$$D\big(\psi_n(x)\big) =$$
$$= (-1)^{n-1}\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_{n-1}}{\alpha_{n+1}\gamma_{n+1}\gamma_{n-1}}\right)^{n-1}\frac{(\Pi(n)\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1})^2}{\gamma_n^{n-1}}\alpha_1^{2n}\alpha_2^{2n-2}\alpha_3^{2n-4}\ldots\alpha_{n-1}^4\alpha_n^2$$
$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_{n-1}}{\alpha_{n+1}\gamma_{n+1}\gamma_{n-1}}\right)^{n-1}\frac{(\Pi(n)\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2}{\gamma_n^{n-2}}R(\psi_n, \psi_{n-1})$$

liefert. Vereinigt man dieselbe mit (4), so ergeben sich die Gleichungen

$$\Delta_{n-1}D\big(\psi_n(x)\big) = \left(\frac{\gamma_{n-1}-\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1}\gamma_{n-1}\gamma_{n+1}}\right)^{n-1}\frac{(\Pi(n)\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1})^2}{\gamma_n^{n-2}}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$$
$$\Delta_{n-1}D\big(\psi_{n+1}(x)\big) = \left(\frac{\gamma_n-\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1}\gamma_n\gamma_{n+1}}\right)^n\frac{(\Pi(n+1)\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n)^2}{\gamma_{n+1}^{n-1}}\alpha_{n+1}^2(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^3,$$

deren erste sofort zu dem anfänglich erwähnten Hilbert'schen Theorem führt.