

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 925.

Über den Einfluss der Bewegung der Erde um die Sonne auf die Bewegung des freihängenden Pendels,
von Dr. W. Lehmann.

Wir setzen hierbei Leser voraus, welche die durch den *Foucault'schen* Pendel-Versuch veranlasste, von der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig gekrönte, klassische Preisschrift *Hansen's* nicht nur zur Hand, sondern auch gründlich studirt und dadurch gleichsam reproducirt haben, indem wir der Kürze wegen hinsichtlich der Bedeutung der in den Formeln vorkommenden Buchstaben auf die genannte Schrift verweisen.

§ 1.

Der 3te Artikel dieser Schrift bespricht den Einfluss der Bewegung der Erde um die Sonne auf die Pendelbewegung, oder, was dasselbe sagt, die Störung des Pendels durch die Sonne, und die dem Erd-Äquator parallele und in der Meridian-Ebene des Orts, wo das Pendel schwingt, liegende Componente der störenden Kraft wird gegen Ende der 4. Seite durch

$$M \left(\frac{x''}{R^3} - \frac{x}{R'^3} \right)$$

ausgedrückt, und es heisst daselbst: „Dies ist eine Grösse von der Ordnung des Erdhalbmessers dividirt durch die Entfernung der Erde von der Sonne, und daher so klein, dass sie der Null gleichgesetzt werden kann.“ Für diejenigen Leser, welche hieraus nicht sogleich die Unmerklichkeit der Wirkung jener störenden Kraft auf die Pendelbewegung im Voraus übersehen, möchte folgende Entwicklung nicht am unrechten Orte sein.

Die Störung der Pendelbewegung durch die Sonne kann mit dem von der Sonne abhängigen Theil der Ebbe und Fluth des Oceans verglichen werden, und es ist hiernach im Voraus zu übersehen, dass, wie beim Ocean, so auch beim Pendel der Mond eine grössere Störung ausübt als die Sonne, und dass, gegen die vereinigte Wirkung beider, die durch alle Planeten zusammen verursachten Störungen unbedeutend sind. Ehe wir aber die Unmerklichkeit der lunaren und solaren Störung der Pendelbewegung zeigen können, wird es nöthig sein, die Form dieser Störung zu entwickeln.

Wir wollen uns anfangs ein ruhendes Pendel denken. Dieses würde, wenn Höhe, Azimuth und Parallaxe des störenden Weltkörpers constant wären, auf ähnliche Art von der

Vertikale abgelenkt werden, wie durch eine grosse, nahe liegende Bergmasse, z. B. den Shehallien in Schottland bei den bekannten *Maskelyne'schen* Versuchen zur Bestimmung der Erdmasse, und es würde in dieser gestörten Lage (die wir, im Gegensatz gegen die ungestörte Vertikale, die gestörte Vertikale nennen können) ruhen. Nun kommt zwar (wenn wir die Kleinheit der Excentricität der Mond- und Sonnenbahn und die Geringfügigkeit der Störung des Pendels durch diese beiden Weltkörper betrachten) die Annahme einer constanten Parallaxe des störenden Weltkörpers der Wahrheit sehr nahe; die Veränderung der Höhe und des Azimuths des störenden Weltkörpers aber macht, dass der Winkel Θ , welchen die gestörte Vertikale gegen die ungestörte bildet, und das mit dem Azimuth Ψ des störenden Weltkörpers übereinstimmende Azimuth der gestörten Vertikale sich stetig ändern. Wie man nun die ungestörte Vertikale als diejenige mittlere Lage betrachten kann, um welche herum das sich bewegende, ungestörte Pendel oscillirt, so wird man die gestörte Vertikale als diejenige mittlere Lage ansehen können, um welche das gestörte Pendel oscillirt, und es wird darauf ankommen, die relative Bewegung des Pendels um die gestörte Vertikale analytisch zu entwickeln. Dazu verhilft uns der 24. Artikel der *Hansen'schen* Abhandlung; er giebt uns die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \theta'^2 &= \varepsilon'^2 \cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \sin^2(\omega t + \eta) \\ \psi &= \alpha + (\mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{1}{24}\omega\varepsilon\varepsilon')t + \text{arc. tg.} \frac{\varepsilon' \tan(\omega t + \eta)}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} (1)$$

worin

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{g, \lambda m}{A} + \mu^2 + \frac{1}{4}\mu'^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) + \dots \right)}$$

gesetzt ist, und g, θ, ψ in Beziehung auf die relative Bewegung des Pendels um die gestörte Vertikale dasselbe bedeuten, was g, θ, ψ in Beziehung auf die ungestörte Pendelbewegung, ε und ε' aber die (wegen der Veränderung der Höhe und des Azimuths des störenden Weltkörpers veränderliche) grösste und kleinste Elongation des Pendels von der gestörten Vertikale, η aber die excentrische Anomalie, welche, indem das Pendel seine Schwingungs-Ellipse um die gestörte Vertikale durchläuft, im Augenblick $t = 0$ stattfindet, $\alpha + (\mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{1}{24}\omega\varepsilon\varepsilon')t$ aber soviel als $\Psi +$ dem Flächen-

winkel, welchen die Ebene des Elongationswinkels ε gegen die über die gestörte Vertikale hinausliegende Erweiterung der Ebene des Winkels Θ bildet. Wir vereinfachen die weitere Entwicklung, wenn wir innerhalb des Sinus-, Cosinus- und Tangenzzeichens

$$\omega = \sqrt{g' + \mu^2 + \frac{1}{4}\mu'^2} (1 - \frac{1}{16}((\varepsilon)^2 + (\varepsilon')^2) + \dots)^* \dots (2)$$

setzen, und die von der Verschiedenheit zwischen g , und g , zwischen ε und (ε) , zwischen ε' und (ε') herrührenden Änderungen der excentrischen Anomalie $\omega t + \eta$ zur Variation von η schlagen; ja wir können auch das in dem Ausdruck von ψ , vorkommende Glied $\frac{1}{24}\omega\varepsilon\varepsilon't =$

$$\frac{1}{24}\sqrt{g' + \mu^2 + \frac{1}{4}\mu'^2} (1 - \frac{1}{16}((\varepsilon)^2 + (\varepsilon')^2) + \dots)(\varepsilon)(\varepsilon')t$$

setzen, und die von der Verschiedenheit zwischen g , und g , zwischen ε und (ε) , zwischen ε' und (ε') herrührenden Änderungen des Azimuths der grossen Axe der Schwingungs-Ellipse zur Variation von α schlagen; auf diese Art haben wir es nur mit 4 veränderlichen Constanten ε , ε' , η , α zu thun (während ω constant bleibt), und die obigen Gleichungen (1) werden mit

$$\theta, \cos(\psi, -M) = \varepsilon \cos(\omega t + \eta)$$

$$\theta, \sin(\psi, -M) = \varepsilon' \sin(\omega t + \eta)$$

gleichgeltend (worin, wenn man

$$N = \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{1}{24}\omega(\varepsilon)(\varepsilon')$$

setzt, M soviel als $\alpha + Nt$ bedeutet), d. i. (wenn man

$$x, = \theta, \cos \psi, \quad y, = \theta, \sin \psi,$$

setzt) mit

$$\left. \begin{aligned} x, \cos M + y, \sin M &= \varepsilon \cos(\omega t + \eta) \\ y, \cos M - x, \sin M &= \varepsilon' \sin(\omega t + \eta) \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

Diese beiden letzteren Gleichungen würden ohne die Wirkung des störenden Weltkörpers in

$$x \cos M + y \sin M = \varepsilon \cos(\omega t + \eta)$$

$$y \cos M - x \sin M = \varepsilon' \sin(\omega t + \eta)$$

übergehen (wo

$$x = \theta \cos \psi, \quad y = \theta \sin \psi$$

gesetzt ist), wo ε , ε' , η , α constante Grössen wären, und würden daher (wenn wir den Buchstaben β und β' dieselbe Bedeutung wie im 23. Artikel der Preisschrift geben) die Differential-Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = -\beta(\omega + N) \sin(\omega t + \eta + M) - \beta'(\omega - N) \sin(\omega t + \eta - M),$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta(\omega + N) \cos(\omega t + \eta + M) - \beta'(\omega - N) \cos(\omega t + \eta - M),$$

*) Wir verstehen unter (ε) und (ε') die für $t = 0$ stattfindenden Werthe von ε und ε' . Dieselbe Bedeutung geben wir weiterhin allen Klammern, worin einzelne Buchstaben eingeklammert sind.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\omega^2 - N^2)x - 2N \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(\omega^2 - N^2)y + 2N \frac{dx}{dt}$$

geben.

Die beiden letzteren Gleichungen zeigen, dass ohne die durch den Weltkörper hervorgebrachte Störung die Schwingung so erfolgt, als wenn der schwingende Punkt von dem in der elliptischen Grundfläche des Kegels lothrecht unter dem Aufhängepunkt befindlichen Punkt wie von einem festen Centralpunkt nach dem directen Verhältniss der Entfernung mit einer Kraft $= (\omega^2 - N^2)\theta$ angezogen würde, ausser dieser Centralkraft aber noch eine der Geschwindigkeit proportionale Normalkraft (eine senkrecht auf die Tangente des jedesmaligen Punkts der Bahn gerichtete Kraft) $= 2Nv$ (wenn v die linearische Geschwindigkeit*) in dem jedesmaligen Punkt der Bahn bezeichnet) wirkte. Dieses Gesetz der anziehenden Centralkraft und der Normalkraft können wir auch auf die durch den Weltkörper gestörte Pendelbewegung übertragen, wobei aber der Centralpunkt nun nicht mehr fest, sondern beweglich ist; es ist nämlich derjenige Punkt, in welchem die genannte Grundfläche des Kegels von der gestörten Vertikale geschnitten wird. Dadurch erhalten wir, wenn wir

$$g, = \frac{g, \lambda m}{A}, \dots \dots \dots (3)$$

$$\omega, = \sqrt{g, + \mu^2 + \frac{1}{4}\mu'^2} (1 - \frac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) + \dots), \dots (4)$$

$$N, = \mu + \frac{1}{2}\mu' + \frac{1}{24}\omega, \varepsilon \varepsilon'$$

setzen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\omega,^2 - N,^2)x - 2N, \frac{dy,}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(\omega,^2 - N,^2)y + 2N, \frac{dx,}{dt}.$$

§ 2.

Der störende Weltkörper habe die mit der Parallaxe behaftete Höhe H über dem Horizont, und seine Masse sei M , seine Horizontal-Parallaxe P , seine Entfernung von der Pendelmasse aber R' , vom Mittelpunkt der Erde R ; der Erd-Halbmeser sei a , und die Erdmasse 1. Dann ist die accelerirende Kraft, womit das Pendel von dem Weltkörper angezogen wird, $= \frac{gMa^2}{R'^2}$, die accelerirende Kraft aber, womit

*) Wir nennen diese Geschwindigkeit linearisch nur in dem Sinne, in welchem wir die Coordinaten x und y (welche eigentlich Winkel sind) als gerade, horizontale Linien ansehen können.

der Mittelpunkt der Erde und die ganze (mit ihm fest verbundene) Erde (mit Ausnahme des Pendels) angezogen wird, $= \frac{g M a^2}{R^2}$; zerfällt man nun jede dieser beiden Kräfte in eine lothrechte und in eine wagerechte, in der Ebene des Vertikalkreises des Weltkörpers liegende, so erhält man für die Pendelmasse die Kräfte

$$-\frac{g M a^2}{R^2} \sin H, \quad \frac{g M a^2}{R^2} \cos H$$

und für den Mittelpunkt der Erde die Kräfte

$$-\frac{g M a^2}{R^2} \sin \left(H + \arcsin \frac{a \cos H}{R} \right), \\ \frac{g M a^2}{R^2} \cos \left(H + \arcsin \frac{a \cos H}{R} \right).$$

Subtrahirt man die beiden letzteren Kräfte resp. von den beiden ersteren, und setzt man dabei für R seinen Werth $\sqrt{R'^2 + 2 R' a \sin H + a^2}$, und macht man

$$Q = M P^3 \frac{1 - 3 \cos 2 H}{8},$$

$$\omega'^2 = \left(\frac{\omega^2}{(1 - \frac{1}{16}((\varepsilon)^2 + (\varepsilon')^2) + \dots)} (1 - 4 Q) + (4 \mu + \mu'^2) Q \right) (1 - \frac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) + \dots),$$

also (wenn wir

$$\delta \varepsilon = \varepsilon - (\varepsilon), \quad \delta \varepsilon' = \varepsilon' - (\varepsilon')$$

setzen) sehr nahe

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega - \omega \cdot \frac{\varepsilon \delta \varepsilon + \varepsilon' \delta \varepsilon'}{8} - 2 \omega Q; \\ N_1 &= N - \frac{\varepsilon \varepsilon'}{24} \left(\omega \cdot \frac{\varepsilon \delta \varepsilon + \varepsilon' \delta \varepsilon'}{8} + 2 \omega Q \right) + \omega \cdot \frac{\varepsilon' \delta \varepsilon + \varepsilon \delta \varepsilon'}{24} \end{aligned} \right\} \cdot (6)$$

Wir wollen vorläufig die mit $\delta \varepsilon$ und $\delta \varepsilon'$ multiplicirten Glieder vernachlässigen, und also

$$\omega_1 = \omega - 2 \omega Q, \quad N_1 = N - \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{12} Q$$

setzen, woraus

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -(\omega^2 - N^2) x - 2 N \frac{dy}{dt} + 4 \omega^2 Q x + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{6} Q \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -(\omega^2 - N^2) y + 2 N \frac{dx}{dt} + 4 \omega^2 Q y - \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{6} Q \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\} (7)$$

folgt. Wir können aber leicht zeigen, dass in diesen Ausdrücken für $\frac{d^2 x}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y}{dt^2}$ die Resultante der Kräfte $\frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{6} Q \frac{dy}{dt}$ und $-\frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{6} Q \frac{dx}{dt}$ neben der Kraft $4 \omega^2 Q \theta$, (der Resultante der Kräfte $4 \omega^2 Q x$ und $4 \omega^2 Q y$) verschwindet. Jene Resultante ist nämlich $= \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{6} Q v$, wenn v , die lineare Geschwindigkeit in dem jedesmaligen Punkt der relativen Bahn des schwingenden Punkts um die gestörte Vertikale

so erhält man (mit Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $M g P^4$) die störenden Kräfte

$$-4 g Q, \quad g M P^3 \frac{3 \sin 2 H}{2}$$

Die gestörte Schwerkraft ist also die Resultante aus der lothrecht nach unten gerichteten Kraft $g(1 - 4 Q)$ und aus der horizontal gerichteten Kraft $g M P^3 \frac{3 \sin 2 H}{2}$, deren Richtung, wenn sie positiv ist (d. h. wenn der Weltkörper sich über dem Horizont befindet) in dem vom Zenith durch den störenden Weltkörper nach dem Nadir gehenden grössten Halbkreis der Himmelskugel liegt. Dadurch finden wir (mit Vernachlässigung der Quadrate der störenden Kräfte):

$$\Theta = M P^3 \frac{3 \sin 2 H}{2}; \quad g_1 = g(1 - 4 Q) \dots \dots (5)$$

§ 3.

Aus den Gleichungen (2), (3), (4), (5) folgt:

bezeichnet, und hat also ihr Maximum $= \frac{\omega^2 \varepsilon^2 \varepsilon'}{6} Q$ im Augenblick der kleinsten Elongation, während die Kraft $4 \omega^2 Q \theta$, in demselben Augenblick ihr Minimum $= 4 \omega^2 Q \varepsilon'$ hat. Dies Minimum verhält sich zu jenem Maximum wie $24 : \varepsilon^2$. Wir können also aus den Gleichungen (7) die mit $Q \frac{dy}{dt}$ und $Q \frac{dx}{dt}$ multiplicirten Glieder weglassen: und da ausserdem

$$x = x_1 + X, \quad y = y_1 + Y,$$

wenn man Θ , Θ' , Ψ , Ψ' auf Mond und Sonne bezieht und dann

$$X = \Theta \cos \Psi + \Theta' \cos \Psi', \quad Y = \Theta \sin \Psi + \Theta' \sin \Psi'$$

setzt, so verwandeln sich die Gleichungen (7) in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -(\omega^2 - N^2) x_1 - 2 N \frac{dy_1}{dt} + 4 \omega^2 Q x_1 - \frac{d^2 X}{dt^2}; \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -(\omega^2 - N^2) y_1 + 2 N \frac{dx_1}{dt} + 4 \omega^2 Q y_1 - \frac{d^2 Y}{dt^2}. \end{aligned} \right\}$$

Diese beiden Gleichungen müssen wir nun mit denjenigen beiden vergleichen, welche wir durch zweimalige Differentiation der den Gleichungen (a) § 1 gleichgeltenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \beta \cos(\omega t + \eta + M) + \beta' \cos(\omega t + \eta - M), \\ y_1 &= \beta \sin(\omega t + \eta + M) - \beta' \sin(\omega t + \eta - M) \end{aligned} \right\}$$

erhalten. (Wir werden von hier an unter M ausserhalb des Sinus- und Cosinus-Zeichens allemal die Masse des störenden

Weltkörpers, innerhalb solches Zeichens aber soviel als $\alpha + Nt$ verstehen). Bei der ersten Differentiation haben wir den Theil des Differentials, welcher von der Veränderung

der willkürlichen Constanten herrührt, für sich = 0 zu setzen. Wir erhalten auf diesem Wege:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= -2\omega Q\varepsilon \sin(2\omega t + 2\eta) + \frac{d^2X \cos M + d^2Y \sin M}{dt^2} \cdot \frac{\sin(\omega t + \eta)}{\omega}; \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= 2\omega Q\varepsilon' \sin(2\omega t + 2\eta) + \frac{d^2X \sin M - d^2Y \cos M}{dt^2} \cdot \frac{\cos(\omega t + \eta)}{\omega}; \\ \frac{d\eta}{dt} &= -2\omega Q - 2\omega Q \cdot \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos(2\omega t + 2\eta) \\ &\quad + \frac{d^2X}{dt^2} \cdot \frac{\beta \cos(\omega t + \eta - M) + \beta' \cos(\omega t + \eta + M)}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} - \frac{d^2Y}{dt^2} \cdot \frac{\beta \sin(\omega t + \eta - M) - \beta' \sin(\omega t + \eta + M)}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{4\omega Q\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos(2\omega t + 2\eta) \\ &\quad - \frac{d^2X}{dt^2} \cdot \frac{\beta \cos(\omega t + \eta - M) - \beta' \cos(\omega t + \eta + M)}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} + \frac{d^2Y}{dt^2} \cdot \frac{\beta \sin(\omega t + \eta - M) + \beta' \sin(\omega t + \eta + M)}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}.\end{aligned}$$

§ 4.

Bezeichnet G die Geschwindigkeit, womit sich der Stundenwinkel des störenden Weltkörpers ändert, J seinen Stundenwinkel für $t = 0$, und δ seine Declination, so giebt die sphärische Trigonometrie

$$Q = MP^3 \left(\frac{3 \cos 2\varphi - 1}{4} \cdot \frac{3 \cos 2\delta - 1}{8} + \frac{3}{8} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(Gt + J) + \frac{3}{8} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos(2Gt + 2J) \right),$$

und, wenn man X und Y nur auf Einen störenden Weltkörper bezieht,

$$X = 3MP^3 \left(\sin 2\varphi \frac{3 \cos 2\delta - 1}{4} - \cos 2\varphi \frac{\sin 2\delta}{2} \cos(Gt + J) + \sin 2\varphi \frac{\cos^2 \delta}{4} \cos(2Gt + 2J) \right);$$

$$Y = 3MP^3 \left(\sin \varphi \frac{\sin 2\delta}{2} \sin(Gt + J) + \cos \varphi \frac{\cos^2 \delta}{2} \sin(2Gt + 2J) \right),$$

also (wenn man die sehr kleinen Grössen $\frac{d\delta}{dt}$ und $\frac{dG}{dt}$ gegen G vernachlässigt)

$$\left. \begin{aligned}\frac{d^2X}{dt^2} &= 3MP^3G^2 \left(\cos 2\varphi \frac{\sin 2\delta}{2} \cos(Gt + J) - \sin 2\varphi \cos^2 \delta \cos(2Gt + 2J) \right); \\ \frac{d^2Y}{dt^2} &= -3MP^3G^2 \left(\sin \varphi \frac{\sin 2\delta}{2} \sin(Gt + J) + 2 \cos \varphi \cos^2 \delta \sin(2Gt + 2J) \right).\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (8)$$

Substituiren wir diese gefundenen Werthe für Q , $\frac{d^2X}{dt^2}$, $\frac{d^2Y}{dt^2}$ in die herausgebrachten Werthe von $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\varepsilon'}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$, und integriren wir diese alsdann so, als wenn ε , ε' , η , α constant wären, oder, was dasselbe sagt, so, dass wir die Quadrate und Producte der störenden Kräfte vernachlässigen, und vernachlässigen wir ausserdem in den durch die Integration eintretenden Divisoren $2\omega \pm G$ und $2\omega \pm 2G$ die Grössen G und $2G$ gegen 2ω , in den Divisoren $\omega - N \pm G$, $\omega - N \pm 2G$, $\omega + N \pm G$ und $\omega + N \pm 2G$ aber die Grössen $N \mp G$ und $N \mp 2G$ gegen ω , und bezeichnen wir $f d\varepsilon$, $f d\varepsilon'$, $f d\eta$, $f d\alpha$ (für $t = 0$ verschwindend) mit $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$, $\delta\alpha$, die für $t = 0$ stattfindenden Werthe von $\frac{d^2X}{dt^2}$, $\frac{d^2Y}{dt^2}$ aber mit $\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right)$, und (wie im 23. Artikel der Preisschrift geschehen) $\alpha + \eta$ mit α' , so finden wir:

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= Q\varepsilon \cos(2\omega t + 2\eta) - (Q)\varepsilon \cos 2\eta - \frac{d^2X \cos M + d^2Y \sin M}{dt^2} \cdot \frac{\cos(\omega t + \eta)}{\omega^2} + \left(\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right) \cos \alpha + \left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right) \sin \alpha\right) \frac{\cos \eta}{\omega^2}; \\ \delta\varepsilon' &= -Q\varepsilon' \cos(2\omega t + 2\eta) + (Q)\varepsilon' \cos 2\eta + \frac{d^2X \sin M - d^2Y \cos M}{dt^2} \cdot \frac{\sin(\omega t + \eta)}{\omega^2} - \left(\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right) \sin \alpha - \left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right) \cos \alpha\right) \frac{\sin \eta}{\omega^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\eta = MP^3\omega & \left(\frac{1-3\cos 2\Phi}{4} \cdot \frac{3\cos 2\delta-1}{4} \epsilon-3 \frac{2\sin 2\Phi \sin 2\delta (\sin(Gt+J)-\sin J)+\cos^2\Phi \cos^2\delta (\sin(2Gt+2J)-\sin 2J)}{8G} \right) \\ & - Q \frac{\epsilon^2+\epsilon'^2}{\epsilon^2-\epsilon'^2} \sin(2\omega t+2\eta) + (Q) \frac{\epsilon^2+\epsilon'^2}{\epsilon^2-\epsilon'^2} \sin 2\eta + \frac{d^2X}{dt^2} \frac{\beta \sin(\omega t+\eta-M)+\beta' \sin(\omega t+\eta+M)}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)} \\ & + \frac{d^2Y}{dt^2} \frac{\beta \cos(\omega t+\eta-M)-\beta' \cos(\omega t+\eta+M)}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)} + \left(\frac{d^2X}{dt^2} \right) \frac{\beta \sin(\alpha-\eta)-\beta' \sin \alpha'}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)} - \left(\frac{d^2Y}{dt^2} \right) \frac{\beta \cos(\alpha-\eta)-\beta' \cos \alpha'}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)}; \\ d\alpha = & \frac{2Q\epsilon\epsilon'}{\epsilon^2-\epsilon'^2} \sin(2\omega t+2\eta) - \frac{2(Q)\epsilon\epsilon'}{\epsilon^2-\epsilon'^2} \sin 2\eta - \frac{d^2X}{dt^2} \frac{\beta \sin(\omega t+\eta-M)-\beta' \sin(\omega t+\eta+M)}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)} \\ & - \frac{d^2Y}{dt^2} \frac{\beta \cos(\omega t+\eta-M)+\beta' \cos(\omega t+\eta+M)}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)} - \left(\frac{d^2X}{dt^2} \right) \frac{\beta \sin(\alpha-\eta)+\beta' \sin \alpha'}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)} + \left(\frac{d^2Y}{dt^2} \right) \frac{\beta \cos(\alpha-\eta)+\beta' \cos \alpha'}{\omega^2(\epsilon^2-\epsilon'^2)}. \end{aligned}$$

Die auf diese Art gefundenen Werthe für $d\epsilon$ und $d\epsilon'$ haben wir nun in die Gleichungen (6) § 3 zu substituiren. Lassen wir bei der Substitution von $d\epsilon$ und $d\epsilon'$ in die 2te der Gleichungen (6) die Glieder von der Ordnung $\frac{\sqrt{(d^2X^2+d^2Y^2)}}{dt^2} \cdot \frac{\theta, \epsilon \epsilon'}{\omega}$ weg, und setzen wir $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\sqrt{(d^2X^2+d^2Y^2)}}{dt^2} \cos \Phi$ und $\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\sqrt{(d^2X^2+d^2Y^2)}}{dt^2} \sin \Phi$, so finden wir:

$$\begin{aligned} -\omega \cdot \frac{\epsilon d\epsilon + \epsilon' d\epsilon'}{8} &= \omega ((Q) \cos 2\eta - Q \cos(2\omega t+2\eta)) \frac{\epsilon^2-\epsilon'^2}{8} + \frac{\sqrt{(d^2X^2+d^2Y^2)}}{dt^2} \frac{\beta \cos(\omega t+\eta+M-\Phi)+\beta' \cos(\omega t+\eta-M+\Phi)}{8\omega} \\ &\quad - \sqrt{\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right)^2} \frac{\beta \cos(\alpha'-(\Phi))+\beta' \cos(\alpha-\eta-(\Phi))}{8\omega}; \\ -\frac{\epsilon\epsilon'}{24} \omega \cdot \frac{\epsilon d\epsilon + \epsilon' d\epsilon}{8} + \omega \cdot \frac{\epsilon' d\epsilon + \epsilon d\epsilon'}{24} &= \omega ((Q) \cos 2\eta - Q \cos(2\omega t+2\eta)) \frac{\epsilon^2-\epsilon'^2}{192} \epsilon\epsilon' \\ &\quad - \frac{\sqrt{(d^2X^2+d^2Y^2)}}{dt^2} \frac{\beta \cos(\omega t+\eta+M-\Phi)-\beta' \cos(\omega t+\eta-M+\Phi)}{24\omega} \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right)^2} \frac{\beta \cos(\alpha'-(\Phi))-\beta' \cos(\alpha-\eta-(\Phi))}{24\omega}. \end{aligned}$$

Folglich ist, absolut genommen, $-\omega \cdot \frac{\epsilon d\epsilon + \epsilon' d\epsilon'}{8}$ (d. i. der im § 3 vernachlässigte Theil von ω) nie grösser als

$$\omega \left(MP^3 \cdot \frac{\epsilon^2}{8} + \left(\frac{\sqrt{(d^2X^2+d^2Y^2)}}{dt^2} + \sqrt{\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right)^2} \right) \cdot \frac{\epsilon}{8\omega^2} \right);$$

und wenn wir bedenken, dass

$$(\epsilon^2 - \epsilon'^2) \epsilon \epsilon' = \epsilon^4 \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} - \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right)^3 \right), \text{ und } \frac{d \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} - \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right)^3 \right)}{d \frac{\epsilon}{\epsilon}} = 1 - 3 \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right)^2, \text{ also } \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right)^3 \text{ nie } > \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}},$$

so erkennen wir, dass der in § 3 vernachlässigte Theil von N , nie grösser ist als

$$\frac{\omega MP^3 \epsilon^4}{\sqrt{248832}} + \left(\frac{\sqrt{(d^2X^2+d^2Y^2)}}{dt^2} + \sqrt{\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right)^2} \right) \cdot \frac{\epsilon}{24\omega}.$$

Nun geben aber die Gleichungen (8):

$$\begin{aligned} \frac{d^2X^2+d^2Y^2}{9M^2P^6G^4dt^4} &= \frac{\sin^2 2\delta}{4} (\cos^2 2\Phi \cos^2(Gt+J) + \sin^2 2\Phi \sin^2(Gt+J)) + \sin 2\Phi \sin 2\delta \cos^2\delta (\sin^2\Phi \cos(Gt+J) \\ &\quad - \cos^2\Phi \cos(3Gt+3J)) + 4\cos^2\Phi \cos^4\delta (\sin^2\Phi \cos^2(2Gt+2J) + \sin^2(2Gt+2J)), \end{aligned}$$

also absolut genommen kleiner als

$$\frac{\sin^2 2\delta}{4} (\cos^2(Gt+J) + \sin^2(Gt+J)) + \sin^2\delta \cos^2\delta (\sin^2\Phi + \cos^2\Phi) + 4\cos^4\delta (\cos^2(2Gt+2J) + \sin^2(2Gt+2J)),$$

(wenn $\sin 2\delta$ absolut genommen wird), d. i. kleiner als $\frac{\sin^2 2\delta}{4}$ + $\sin 2\delta \cos^2\delta + 4\cos^4\delta$. Wir bedenken nun, dass δ bei der Sonne innerhalb der Grenzen $\pm 23^\circ 28'$, beim Monde innerhalb

$\pm 28^\circ 45'$, also überhaupt 2δ innerhalb $\pm 57^\circ 30'$ eingeschlossen ist. Nehmen wir nun $\sin 2\delta$ absolut, so ist $\frac{\sin^2 2\delta}{4}$ (desgleichen $\sin 2\delta \cos^2\delta$) desto grösser, je grösser δ (erst

bei $\delta = 30^\circ$ würde das Maximum von $\sin 2\delta \cos^2 \delta$ statt finden), dagegen $4 \cos^4 \delta$ desto kleiner, je grösser δ . Um aber das Maximum der Summe aller 3 Glieder zu bestimmen, haben wir diese Summe in Beziehung auf δ zu differentiiren: der Differential-Coefficient ist

$$= -104 \cos \delta \frac{(\sin^2 \delta)^3 - \frac{27}{15} (\sin^2 \delta)^2 + \frac{29}{26} \sin^2 \delta - \frac{1}{52}}{\sin \delta (7 - 6 \sin^2 \delta) + \cos \delta (1 - 4 \sin^2 \delta)};$$

der Nenner dieses Bruches ist positiv, weil $\delta < 30^\circ$ und folglich $1 - 4 \sin^2 \delta$ positiv ist, was aber den Zähler betrifft, so findet man durch Anwendung der cardanischen Formel, dass die Gleichung

$$(\sin^2 \delta)^3 - \frac{27}{15} (\sin^2 \delta)^2 + \frac{29}{26} \sin^2 \delta - \frac{1}{52} = 0$$

nur eine mögliche Wurzel hat. Berechnet man diese numerisch, so findet man, dass das Maximum von

$$\frac{\sin^2 2\delta}{4} + \sin 2\delta \cos^2 \delta + 4 \cos^4 \delta = \left(\frac{6,1012}{3}\right)^2, \text{ also}$$

$\frac{\sqrt{(d^2 X^2 + d^2 Y^2)}}{d t^2} < 6,1012 MP^3 G^2$, und, wenn wir auf die

$$\left(g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{\lambda m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{MP^3 + M'P'^3}{\sqrt{(248832)}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + 12,2024 (MP^3 G^2 + M'P'^3 G'^2) \frac{\varepsilon}{24} g^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{\lambda m}\right)^{\frac{1}{2}}\right) t \sin \varepsilon,$$

d. i. (wenn wir die obigen numerischen Werthe substituiren) stets $< \frac{t}{24015600000000}$ Meter (wo t in Zeit-Secunden auszudrücken ist); dies ist ebenfalls eine völlig unmerkliche Grösse, denn sie würde weniger als $\frac{1}{200000}$ Meter betragen, auch wenn der Pendel-Versuch 19 Jahre ohne Unterbrechung fortgesetzt werden könnte. Wir erkennen aus dem bisher Auseinandergesetzten, dass beim Versuch mit einem freihängenden Pendel nie ein Zeitpunkt eintritt, wo $\delta \varepsilon$ und $\delta \varepsilon'$ so grosse Werthe erreichen, dass die in § 3 vernachlässigten Theile von ω , und von N , in Anschlag kommen könnten, und so sehen wir, dass die herausgebrachten Ausdrücke von $\delta \varepsilon$, $\delta \varepsilon'$, $\delta \eta$, $\delta \alpha$ während der ganzen Dauer des Pendel-Versuchs ihre Gültigkeit behalten.

§ 5.

In diesen Ausdrücken haben wir, wenn wir die Zeit von dem Augenblicke der grössten Elongation an rechnen.

$$\text{nie} > \omega \left(MP^3 \left(\frac{\sin 57^\circ 30'}{\arcsin 9'' 6} + \frac{1}{\arcsin 19'' 2} \right) + M'P'^3 \left(\frac{\sin 46^\circ 56'}{\arcsin 10''} + \frac{1}{\arcsin 20''} \right) \right),$$

d. i. nie grösser als $\omega \cdot 0,0023971$ Zeitsecunden, wo wiederum der Zeitraum $0''0023971$ unmerklich ist.

Wir haben also nur noch den Einfluss der Glieder

$$\delta \varepsilon = Q \varepsilon \cos 2 \omega t - (Q) \varepsilon - \frac{d^2 X \cos M + d^2 Y \sin M}{d t^2} \cdot \frac{\cos \omega t}{\omega^2} + \left(\frac{d^2 X}{d t^2} \right) \frac{\cos \alpha}{\omega^2} + \left(\frac{d^2 Y}{d t^2} \right) \frac{\sin \alpha}{\omega^2},$$

$$\delta \varepsilon' = -Q \varepsilon' \cos 2 \omega t + (Q) \varepsilon' + \frac{d^2 X \sin M - d^2 Y \cos M}{d t^2} \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega^2},$$

vereinigte Wirkung des Mondes und der Sonne Rücksicht nehmen, der in § 3 vernachlässigte Theil von ω , kleiner als $\omega \left((MP^3 + M'P'^3) \cdot \frac{\varepsilon'}{8} + 12,2024 (MP^3 G^2 + M'P'^3 G'^2) \frac{\varepsilon}{8 \omega^2} \right)$,

d. i. (wenn wir $M = \frac{1}{87,73}$, $P = 1''$, $M' = 354936$, $P' = 8''5776$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$, $G = 14''4$, $G' = 15''$, $g = 9,81$ Meter, und die Pendellänge $\frac{A}{\lambda m} = 20$ Meter setzen, woraus $\frac{1}{\omega^2} = \frac{2,000}{9,81}$

folgt) $< \frac{\omega}{7524000000}$, also völlig unmerklich ist. Was aber

den vernachlässigten Theil von N betrifft, so offenbart sich derselbe am meisten durch seinen linearischen Einfluss auf den Ort des Schwingungspunkts im Augenblick t , wenn dies zugleich ein Augenblick der grössten Elongation ist, und wir finden diesen Einfluss durch Multiplication mit $t \frac{A}{\lambda m} \sin \varepsilon$. Dieser Einfluss ist also stets kleiner als

überall $\eta = 0$ zu setzen. Dann erhalten wir lauter periodische Glieder, deren Periode gleich ist der doppelten Dauer Einer Pendelschwingung, mit Ausnahme eines der Zeit proportionalen und eines eine 24stündige Periode beobachtenden Gliedes in $\delta \eta$. Da δ innerhalb der Grenzen $\pm 28^\circ 45'$ eingeschlossen ist, so ist $3 \cos 2\delta - 1$ stets positiv, und sein Maximum (welches stattfindet, wenn der Mond oder die Sonne sich im Äquator befindet) $= 2$; folglich ist der Correctionsfactor von ω , welcher durch das der Zeit proportionale Glied entsteht, von der Einheit nie um mehr als $\frac{MP^3 + M'P'^3}{2}$,

d. i. nie um mehr als $\frac{1}{2322220000}$ verschieden; dieser Unterschied ist unmerklich. Das eine 24stündige Periode beobachtende Glied wäre, auch wenn der mit $\sin(Gt + J) - \sin J$ und der mit $\sin(2Gt + 2J) - \sin 2J$ multiplicirte Theil ihr Maximum zu gleicher Zeit und mit gleichem Zeichen hätten,

$$\begin{aligned} \delta\eta &= -Q \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin 2\omega t + \frac{d^2 X}{dt^2} \cdot \frac{\beta \sin(\omega t - M) + \beta' \sin(\omega t + M)}{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} + \frac{d^2 Y}{dt^2} \cdot \frac{\beta \cos(\omega t - M) - \beta' \cos(\omega t + M)}{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \\ &\quad + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \left(\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) \frac{\sin \alpha}{\omega^2} - \frac{d^2 Y}{dt^2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\omega^2} \right), \\ \delta\alpha &= \frac{2Q\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin 2\omega t - \frac{d^2 X}{dt^2} \cdot \frac{\beta \sin(\omega t - M) - \beta' \sin(\omega t + M)}{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} - \frac{d^2 Y}{dt^2} \cdot \frac{\beta \cos(\omega t - M) + \beta' \cos(\omega t + M)}{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \left(\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) \frac{\sin \alpha}{\omega^2} - \frac{d^2 Y}{dt^2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

auf x , und y , in Betracht zu ziehen, nebst den Coordinaten der gestörten Vertikale, welche letzteren ebenfalls Theile der Coordinaten x und y ausmachen. Der Einfluss auf x , und y , wird, wenn wir die mit den Quadraten und Producten von $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$, $\delta\alpha$ multiplicirten (von den Quadraten der störenden Kräfte herrührenden) Glieder weglassen, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta x &= Qx, - (Q)(\beta \cos(\omega t - M) + \beta' \cos(\omega t + M)) - \frac{d^2 X}{\omega^2 dt^2} + \left(\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) \cos Nt - \left(\frac{d^2 Y}{dt^2} \right) \sin Nt \right) \frac{\cos \omega t}{\omega^2}, \\ \delta y &= Qy, + (Q)(\beta \sin(\omega t - M) - \beta' \sin(\omega t + M)) - \frac{d^2 Y}{\omega^2 dt^2} + \left(\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) \sin Nt + \left(\frac{d^2 Y}{dt^2} \right) \cos Nt \right) \frac{\cos \omega t}{\omega^2} \end{aligned}$$

ausgedrückt. Hier geben die Glieder

$$\delta x_i = Qx_i, \quad \delta y_i = Qy_i,$$

die Hypothenuse $\sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2} = Q\theta_i$, die Glieder

$$\delta x_i = -(Q)(\beta \cos(\omega t - M) + \beta' \cos(\omega t + M)),$$

$$\delta y_i = (Q)(\beta \sin(\omega t - M) - \beta' \sin(\omega t + M))$$

aber die Hypothenuse $(Q)\theta_i$, die Glieder

$$\delta x_i = -\frac{d^2 X}{\omega^2 dt^2}, \quad \delta y_i = -\frac{d^2 Y}{\omega^2 dt^2}$$

die Hypothenuse $\sqrt{(d^2 X)^2 + (d^2 Y)^2}$, und die Glieder

$$\delta x_i = \left(\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) \cos Nt - \left(\frac{d^2 Y}{dt^2} \right) \sin Nt \right) \frac{\cos \omega t}{\omega^2},$$

$$\delta y_i = \left(\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right) \sin Nt + \left(\frac{d^2 Y}{dt^2} \right) \cos Nt \right) \frac{\cos \omega t}{\omega^2}$$

die Hypothenuse $\sqrt{\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 Y}{dt^2} \right)^2} \frac{\cos \omega t}{\omega^2}$. Setzt

$$\sqrt{(X+Qx)^2 + (Y+Qy)^2} = \sqrt{(\Theta)^2 + 2\Theta Q\theta \cos(\Psi - \Psi) + Q^2 \theta^2}$$

nehmen; diese ist $< \Theta + Q\varepsilon$, wenn für Θ und Q die absoluten Werthe genommen werden,

$$\text{d. i. } < \frac{1}{2} M P^3 (3 \sin 2H + \frac{1 - 3 \cos 2H}{4} \varepsilon),$$

wenn für $\sin 2H$ und $1 - 3 \cos 2H$ die absoluten Werthe genommen werden. Das Maximum von $3 \sin 2H + \frac{1 - 3 \cos 2H}{4} \varepsilon$

ist $= \frac{3\sqrt{(16 + \varepsilon^2)} + \varepsilon}{4}$; wir finden also (mit Hinzunahme der vorhin angeführten Hypothenuse $\frac{1}{2} M P^3 \varepsilon$), dass $\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$ kleiner ist als $(M P^3 + M' P'^3) \frac{3\sqrt{(16 + \varepsilon^2)} + 5\varepsilon}{8}$, d. i. (wenn

wir $\varepsilon = \frac{1}{10}$ setzen) $< 0,027891$ Bogensekunden (in welchem Resultat auch die Hinzufügung der vorher herausgebrachten

Grösse $\frac{1''}{452800000}$ keine merkliche Änderung hervorbringt) und daher unmerklich.

man die beiden letzteren Hypothenusen nach dem Grundsatz des Parallelogramms der Kräfte zusammen, und bedenkt man dabei, dass in jedem Parallelogramm die Diagonale kleiner als die Summe zweier zusammenstossender Seiten, $\cos \omega t$ aber absolut genommen < 1 ist, so kann man sagen, dass die mit $\frac{d^2 X}{dt^2}$, $\frac{d^2 Y}{dt^2}$, $\left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right)$, $\left(\frac{d^2 Y}{dt^2} \right)$ multiplicirten Glieder von δx , und von δy , zusammen eine Hypothenuse geben, welche $< 12,2024 \frac{M P^3 G^2 + M' P'^3 G'^2}{\omega^2}$, d. i. (wenn

man $\frac{1}{\omega^2} = \frac{2000}{981}$ setzt) $< \frac{1}{452800000}$ Bogensekunde und also völlig unmerklich ist. Das absolute Maximum der Hypothenuse $(Q)\theta$ ist $= \frac{1}{2} M P^3 \varepsilon$; statt der Hypothenuse $Q\theta$, aber wollen wir, indem wir X und Y (die Coordinaten der gestörten Vertikale) hinzunehmen, die Hypothenuse

Da nun der Einfluss der Quadrate und Producte der störenden Kräfte noch viel kleiner ist, so können wir sagen: *Die Bewegung der Erde um die Sonne hat keinen merklichen Einfluss auf die Bewegung des freihängenden Pendels*; und da das obige Resultat

$$\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} < (M P^3 + M' P'^3) \cdot \frac{3\sqrt{(16 + \varepsilon^2)} + 5\varepsilon}{8}$$

nach dem Gesetz der Stetigkeit seine Geltung behält, auch wenn $\varepsilon = 0$, ja da alsdann $\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$ höchstens $= 3 \cdot \frac{M P^3 + M' P'^3}{2}$, so sehen wir, dass auch die durch

die Bewegung der Erde um die Sonne hervorgebrachte *Ablenkung der ruhenden Pendelaxe von der lothrechten Lage* unmerklich (höchstens $= 0''026648$) ist.

Potsdam, den 21. Sept. 1854.

W. Lehmann.