Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen.*)

Von

Richard Fuchs in Halensee bei Berlin.

In der vorliegenden Notiz erlaube ich mir einige Untersuchungen vorzulegen, die aus folgender Überlegung hervorgegangen sind:

Bekanntlich lassen sich die Größen α, β, γ der Gaußschen Differentialgleichung

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x-\gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

so bestimmen, daß für ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von Integralen derselben die Koeffizienten der Substitutionen, die y_1, y_2 bei Umläufen der unabhängigen Variablen um die singulären Stellen $x = 0$ und $x = 1$ erleiden, beliebig vorgeschriebene Werte besitzen. Ich habe mir nun die Frage vorgelegt, welche Gestalt eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen und dem unendlich fernen Punkt als wesentlich singulären Stellen haben muß, damit die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem von Integralen bei Umläufen der unabhängigen Variablen um die im Endlichen gelegenen singulären Stellen erleidet, beliebig vorgeschriebene, also insbesondere von der Wahl der singulären Stellen unabhängige Werte besitzen.

Hierbei konnte ich die Resultate, die mein Vater (L. Fuchs, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1888, S. 1115 u. 1273; 1889, S. 713; 1890, S. 21; 1892, S. 157; 1893, S. 975; 1894, S. 1117; 1895, S. 905; 1897, S. 608; 1898, S. 477) „über lineare Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist", veröffentlicht hat, benutzen und ebenso die Abhandlungen des Herrn Schlesinger (Crelles Journal, Bd. 123, S. 138; Bd. 124, S. 292; Bd. 130, S. 26) „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem".

*) Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Séance du 2 Octobre 1905), t. 141, p. 555, von Herrn Poincaré vorgelegt, erschienen.

Es zeigt sich zunächst (Nr. I), daß neben den vier wesentlich singulären Stellen, als welche $0, 1, t, \infty$ genommen werden, mindestens eine scheinbar singuläre Stelle vorhanden sein muß. Dann werden (Nr. II und III) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die in den Koeffizienten vorhandenen Konstanten aufgestellt, damit die Differentialgleichung die oben angegebenen Eigenschaften besitzt, und gezeigt (Nr. IV), daß diese Bedingungsgleichungen miteinander verträglich sind. Es zeigt sich, daß der Wert λ der scheinbaren singulären Stelle als Funktion von t einer Differentialgleichung genügt, die in eine eigentümliche Form übergeführt werden kann (Nr. V, VI). Hierauf wird (VII) der Zusammenhang der hier gegebenen Untersuchungen mit dem Riemannschen Problem klargestellt und dann (Nr. VIII) ein Spezialfall hervorgehoben, der zu unserer Differentialgleichung in einer ähnlichen Beziehung steht, wie die sogenannte Legendresche Differentialgleichung, die die Grundlage der Theorie der Modulfunktion bildet, zur allgemeinen Gaußschen Differentialgleichung. Schließlich wird dann noch gezeigt (IX), daß in besonderen Fällen die Differentialgleichung reduktibel sein und bei gewissen Spezialisierungen der Konstanten (Nr. X) in Gaußsche Differentialgleichungen übergeführt werden kann.

I.

Wenn die Substitutionsgruppe der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = py \tag{A}$$

der Fuchsschen Klasse — wir nehmen hier immer den Koeffizienten der ersten Ableitung von y nach x als gleich Null an, weil dies ja bekanntlich durch eine einfache Transformation der abhängigen Variablen stets zu erreichen ist — von einem in p auftretenden Parameter unabhängig sein soll, als welchen wir im folgenden stets einen der singulären Punkte ansehen werden, so muß für ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von Integralen das Gleichungssystem erfüllt sein*)

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = By_i + A\,\frac{\partial y_i}{\partial x}, \tag{1}$$

wo B und A rationale Funktionen von x sind.

Über die rationale Funktion A hat mein Vater (Sitz.-Ber. d. Berl. Ak. 1893, S. 986, 987, Nr. 4 und 1894, S. 1117—1121, Nr. 5) einige Eigenschaften hergeleitet, welche wir, soweit wir sie im folgenden brauchen,

*) L. Fuchs, Sitz.-Ber. der Berl. Ak. 1888, S. 1278—1282, Nr. 11 u. 12. Vgl. auch meine Programmarbeit (Bismarckgymnasium, Wilmersdorf-Berlin 1902).

für Differentialgleichungen zweiter Ordnung hier kurz zusammenstellen wollen:

1. Ist $x = a_i$ eine wesentlich singuläre Stelle von (A), so verschwindet A an dieser Stelle mindestens von erster Ordnung.

2. Für die wesentlich singuläre Stelle $x = t$ wird A nicht unendlich.

3. Für eine scheinbar singuläre Stelle, d. h. für eine solche, für die die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung sich um eine ganze Zahl unterscheiden, ohne daß in den Integralen Logarithmen auftreten, kann A unendlich werden.

Nehmen wir also an, daß unsere Differentialgleichung außer $x = t$ noch die wesentlich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1} = \infty$ besitzt, so muß A die Gestalt haben

$$A = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) A_1.$$

Setzt man nun $x = \frac{1}{z}$, so geht (1) über in

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = B y_i - A z^2 \frac{\partial y_i}{\partial z}.$$

Soll also $x = \infty$ oder $z = 0$ auch eine wesentlich singuläre Stelle sein, so muß Az^2 für $z = 0$ mindestens von erster Ordnung verschwinden. Es muß also A_1 für $x = \infty$ von der Ordnung $n - 1$ verschwinden, d. h. es muß der Grad seines Zählers um $n - 1$ kleiner sein als der seines Nenners. Da aber A nur für scheinbar singuläre Stellen unendlich werden kann, *so müssen also neben den $n + 2$ wesentlich singulären Stellen mindestens $n - 1$ scheinbar singuläre Stellen vorhanden sein*, was mit den auf andere Weise gefundenen Resultaten von Herrn Poincaré*) und Herrn Schlesinger**) übereinstimmt.

Es soll nun im folgenden zunächst angenommen werden, daß, außer $x = t$, noch die singulären Stellen $x = 0$, $x = 1$ und $x = \infty$ für die Differentialgleichung (A) vorhanden sind. Sollten die im Endlichen gelegenen von t verschiedenen singulären Stellen andere Werte a_1 und a_2 haben, so kann man es bekanntlich durch eine einfache Transformation der unabhängigen Veränderlichen dahin bringen, daß diese Werte bezw. in 0 und 1 übergehen. Dann muß also neben den vier wesentlich singulären Stellen mindestens noch eine scheinbar singuläre Stelle $x = \lambda$ für die Differentialgleichung angenommen werden, und wir fragen uns nun: Läßt sich λ so bestimmen, daß die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem y_1, y_2 der Differentialgleichung bei Umläufen um die singulären Stellen erleidet, beliebige von t unabhängige Werte besitzen?

---

*) Acta Math., Bd. IV, S. 217—219.

**) Crelles Journal, Bd. 123, S. 168 und Handbuch der Theorie der lin. Differentialgl., Bd. II_1, S. 383 und 388.

II.

Wir gehen also nunmehr aus von folgender Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = py, \tag{A}$$

wo

$$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{e}{(x-\lambda)^2} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}. \tag{1}$$

Damit die Differentialgleichung zur Fuchsschen Klasse gehöre, die Integrale also auch im Unendlichen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich werden, muß noch angenommen werden, daß

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0 \tag{2}$$

sei. Wegen der über die Substitutionsgruppe gemachten Voraussetzung müssen die Konstanten a, b, c, e, welche die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen bestimmen, von t unabhängig sein.*) Die rationale Funktion A der Gleichung (1) I wird dann bei der Annahme nur einer einfachen scheinbar singulären Stelle die Gestalt haben:

$$A = \frac{x(x-1)}{x-\lambda} M, \tag{3}$$

wo M eine von x unabhängige Größe bedeutet. Damit A für $x = \lambda$ nur von erster Ordnung verschwinde, muß, wie schon gesagt, λ eine einfache scheinbar singuläre Stelle sein, d. h. es müssen sich die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \lambda$ um 2 unterscheiden.

Es ist nämlich zufolge (1) Nr. I

$$A = C \begin{vmatrix} y_1 & \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ y_2 & \frac{\partial y_2}{\partial t} \end{vmatrix}; \tag{4}$$

weil der Koeffizient von $\frac{dy}{dx}$ in (A) gleich Null angenommen worden ist, muß

$$\frac{1}{C} = \begin{vmatrix} y_1 & \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ y_2 & \frac{\partial y_2}{\partial x} \end{vmatrix} \tag{5}$$

eine Konstante in bezug auf x sein. Es sei nun die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \lambda$

$$r(r-1) = e \tag{6}$$

eine ganze Zahl g, so sind diese Werte, da ihre Summe gleich 1 ist,

$$\frac{1-g}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1+g}{2}.$$

*) Vgl. L. Fuchs, S.-B. d. Berl. Ak. 1892, Nr. 3, S. 162, Satz I.

Ist nun η_1 das zu $\frac{1-g}{2}$ und η_2 das zu $\frac{1+g}{2}$ gehörige Integral und ist

$$y_1 = c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2,$$
$$y_2 = c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}(7)\qquad A = C\Big\{&y_1^2\left(c_{11}\frac{\partial c_{21}}{\partial t} - c_{21}\frac{\partial c_{11}}{\partial t}\right) + y_1 y_2\left(c_{11}\frac{\partial c_{22}}{\partial t} - c_{21}\frac{\partial c_{12}}{\partial t} + c_{12}\frac{\partial c_{21}}{\partial t} - c_{22}\frac{\partial c_{11}}{\partial t}\right)\\ &+ y_2^2\left(c_{12}\frac{\partial c_{22}}{\partial t} - c_{22}\frac{\partial c_{12}}{\partial t}\right) + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\left(y_1\frac{\partial y_2}{\partial t} - y_2\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)\Big\}.\end{aligned}$$

Das einzige Glied, welches hier zu einem negativen Exponenten gehören kann, ist das mit y_1^2; dieses gehört zum Exponenten $1-g$. Soll also

$$1 - g = -1$$

sein, so folgt $g = 2$.

Wenn aber die Wurzeln von (6)

$$\frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

sein sollen, so muß

$$(8)\qquad e = \frac{3}{4}$$

sein.

III.

Für die rationale Funktion A ergibt sich noch die partielle Differentialgleichung*)

$$(\mathrm{B})\qquad \frac{\partial p}{\partial t} = A\frac{\partial p}{\partial x} + 2p\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3},$$

und man sieht also, daß sich unser Problem auf das folgende zurückführt:

Lassen sich λ und M in (3) II *so bestimmen, daß die Gleichung* (B) *durch eine rationale Funktion p der Form* (1) II *befriedigt wird?*

Vergleicht man zunächst die Koeffizienten von $(x-t)^{-3}$ auf beiden Seiten von (B), so ergibt sich

$$2c = -M\frac{t(t-1)}{t-\lambda}2c$$

oder

$$(1)\qquad M = -\frac{t-\lambda}{t(t-1)},$$

so daß also nun A die Gestalt hat

$$(2)\qquad A = -\frac{x(x-1)}{x-\lambda}\,\frac{t-\lambda}{t(t-1)}.$$

*) L. Fuchs, S.-B. d. Berl. Ak. 1894, Nr. 7, S. 1124, Gl. (5).

Beide Seiten der Gleichung (B) werden nach Einsetzen dieses Wertes von A und der rationalen Funktion p (siehe (1) I) echt gebrochene rationale Funktionen; zerlegt man diese in Partialbrüche, so gibt die Vergleichung entsprechender Koeffizienten das folgende System von Gleichungen:

(3)
$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0,$$

(4)
$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\{2\lambda - 1 + 2\varepsilon\lambda(\lambda - 1)\},$$

(5)
$$\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2} + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda-1} + \frac{\gamma}{\lambda-t} = \varepsilon^2,$$

(6)
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\left\{-\frac{\alpha}{\lambda} + 2a\frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right\},$$

(7)
$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\left\{\frac{\beta}{\lambda-1} + 2b\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right\},$$

(8)
$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\left\{\gamma\frac{\lambda(\lambda-1) - (\lambda-t)^2}{(\lambda-t)^2} + 2c\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^3}\right\}.$$

Die Gleichung (5) besagt, daß in der Umgebung von $x = \lambda$, wie es für eine scheinbar singuläre Stelle notwendig ist, die Integrale der Differentialgleichung (A) keinen Logarithmus enthalten. Sind nämlich, wie oben gezeigt, die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \lambda$, $\gamma_1 = \frac{3}{2}$ und $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$, so gehört zum Exponenten $\frac{3}{2}$ ein logarithmenfreies Integral

$$y_1 = (x-\lambda)^{\frac{3}{2}}\{c_0 + c_1(x-\lambda) + c_2(x-\lambda)^2 + \cdots\},$$

und es ist dann bekanntlich

$$y_2 = y_1\int\frac{c\,dx}{y_1{}^2},$$

wo c eine willkürliche von Null verschiedene Konstante bezeichnet, ein mit y_1 ein Fundamentalsystem bildendes Integral. Soll y_2 bei $x = \lambda$ keinen Logarithmus enthalten, so ergibt sich

(9)
$$3c_1{}^2 = 2c_0c_2.$$

Außerdem bestehen zufolge (A) zwischen c_0, c_1, c_2, wenn

$$q = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2} + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda-1} + \frac{\gamma}{\lambda-t}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

(10)
$$\begin{cases} 3c_1 = \varepsilon c_0, \\ 8c_2 = \varepsilon c_1 + qc_0. \end{cases}$$

Aus (9) und (10) folgt aber

$$q = \varepsilon^2,$$

was mit der Gleichung (5) übereinstimmt.

IV.

Es ist nunmehr zu untersuchen, ob die Gleichungen (3) bis (8) voriger Nummer miteinander verträglich sind.

Zunächst ergibt sich, daß

$$\alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) = \varkappa \tag{1}$$

sein muß, wo $\varkappa$ eine von t unabhängige Konstante bedeutet. Diese Gleichung besagt, daß auch die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung von (A) für $x = \infty$ von t unabhängig sein müssen. Diese determinierende Gleichung für $x = \infty$ oder $z = 0$ lautet nämlich

$$r(r-1) + 2r = a + b + c + \frac{3}{4} - \alpha\lambda - \beta(\lambda - 1) - \gamma(\lambda - t), \tag{2}$$

und ihre Wurzeln sind dann und nur dann von t unabhängig, wenn $\alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) = \varkappa$ von t unabhängig ist.

Die Behandlung der Bedingungsgleichungen kann nun weiter folgendermaßen erfolgen:

Setzt man

$$\varrho = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda - t)^2}, \tag{3}$$

so folgt aus (1) dieser und (3), (5) voriger Nummer

$$\begin{aligned} \alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) &= \varkappa, \\ \alpha + \beta + \gamma &= -\varepsilon, \\ \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda - 1} + \frac{\gamma}{\lambda - t} &= \varepsilon^2 - \varrho, \end{aligned}$$

und hieraus berechnet man:

$$\alpha = \frac{\varkappa\lambda}{t} + \frac{\lambda}{t}[1+\varepsilon(\lambda-1)][1+\varepsilon(\lambda-t)] - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t}, \tag{4}$$

$$\beta = -\frac{\varkappa(\lambda-1)}{t-1} - \frac{\lambda-1}{t-1}[1+\varepsilon\lambda][1+\varepsilon(\lambda-t)] + \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t-1}, \tag{5}$$

$$\gamma = \frac{\varkappa(\lambda-t)}{t(t-1)} + \frac{\lambda-t}{t(t-1)}[1+\varepsilon\lambda][1+\varepsilon(\lambda-1)] - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}. \tag{6}$$

Setzt man in diese Ausdrücke für ε seinen Wert aus (4) III ein, so ergibt sich:

$$\alpha = \frac{\varkappa\lambda}{t} - \frac{\lambda(2\lambda-t-1)^2}{4t(\lambda-1)(\lambda-t)} - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t} + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)^2}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left\{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1}\right\}^2, \tag{P}$$

$$\beta = -\frac{\varkappa(\lambda-1)}{t-1} + \frac{(\lambda-1)(2\lambda-t)^2}{4(t-1)\lambda(\lambda-t)} + \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t-1} - \frac{1}{4}\frac{t^2(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left\{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t}\right\}^2; \tag{Q}$$

$$\gamma = \frac{\varkappa(\lambda-t)}{t(t-1)} - \frac{(\lambda-t)(2\lambda-1)^2}{4t(t-1)\lambda(\lambda-1)} - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left\{\frac{d\lambda}{dt}\right\}^2. \tag{R}$$

Die Entscheidung der Frage, ob die Bedingungsgleichungen (3) bis (8) Nr. III miteinander verträglich sind, kann nun in der Weise erfolgen, daß diese Werte für α, β, γ in (6) bis (8) Nr. III eingesetzt werden. Das Ergebnis dieser Substitutionen ist:

aus (6) III

(7) $$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda - 1}{t - 1}\right) D(\lambda) = 0,$$

aus (7) III

(8) $$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t}\right) D(\lambda) = 0,$$

aus (8) III

(9) $$\frac{d\lambda}{dt} D(\lambda) = 0.$$

Hierbei bedeutet:

(S) $$D(\lambda) = \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda - t}\right]\frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda - t}\right]\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$$
$$-2\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{-(\varkappa-1) + a + b + c - \left(a + \frac{1}{4}\right)\frac{t}{\lambda^2}\right.$$
$$\left. + \left(b + \frac{1}{4}\right)\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - c\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right\}.$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) werden gleichzeitig erfüllt, wenn

(L) $$D(\lambda) = 0$$

ist.

Die Gleichungen (3)—(8) *Nr.* III *lassen also eine Auflösung zu: λ als Funktion von t muß Integral der Gleichung* (L) *sein und α, β, γ müssen durch ihre Ausdrücke* (P), (Q), (R) *berechnet werden. Dabei ergeben sich die folgenden sechs willkürlichen Konstanten: a, b, c, $\varkappa$ und die beiden zu der Differentialgleichung 2ter Ordnung* (L) *gehörigen Integrationskonstanten.*

V.

Setzt man nun:

(1) $$\begin{cases} -4(\varkappa-1) + 4a + 4b + 4c = k_\infty, \\ 4\left(a + \frac{1}{4}\right) = k_0, \\ 4\left(b + \frac{1}{4}\right) = k_1, \\ 4\left(c + \frac{1}{4}\right) = k_t, \end{cases}$$

so lautet die Gleichung (L)

(L′) $$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda - t}\right]\frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda - t}\right]\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left[k_\infty - k_0\frac{t}{\lambda^2} + k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - (k_t - 1)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right] {}^{*}).$$

*) Die Differentialgleichung (L′) besitzt, worauf ich bei anderer Gelegenheit eingehen möchte, die festen Verzweigungspunkte $0, 1, t, \infty$. In der Tat findet sie sich in dem speziellen Fall $k_0 = k_1 = k_t = k_\infty = 0$ in den von Herrn Painlevé für Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen Verzweigungspunkten aufgestellten Tableaux (Acta Math. Bd. 25 z. B. Tabl. III). Darauf, daß diese Tableaux noch nach

Die Bedeutung der Größen k_∞, k_0, k_1, k_t ist dabei folgende:

Lautet die determinierende Fundamentalgleichung für $x=0$

$$r(r-1)=a,$$

und ist r_1 eine Wurzel dieser Gleichung, so ist auch $1-r_1$ eine solche, und $2r_1-1$ ist die Differenz der Wurzeln. Nun ist aber

$$(2r_1-1)^2=4a+1=k_0.$$

Demnach ist k_0 das Quadrat der Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x=0$, und ebenso sind k_1, k_t bezw. die Quadrate der Wurzeldifferenzen für $x=1$ und $x=t$.

Weiter lautet nach (2) IV die determinierende Fundamentalgleichung für $x=\infty$

$$r(r-1)+2r=a+b+c+\frac{3}{4}-\varkappa,$$

also

$$(2r+1)^2=4a+4b+4c-4(\varkappa-1)=k_\infty.$$

Da aber $2r+1$ die Wurzeldifferenz ist, so ist also k_∞ das Quadrat dieser Wurzeldifferenz für $x=\infty$. Die Differentialgleichung (L′) für λ läßt sich nun in merkwürdiger Weise umgestalten:

Setzt man:

$$u=\int_\infty^\lambda\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \tag{2}$$

so ist

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}\frac{d\lambda}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t},$$

wo $\frac{\partial u}{\partial t}$ bedeutet, daß bei dieser Differentiation λ als Konstante in bezug auf t anzusehen ist. Weiter folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}=&-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right]\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\\&+\frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}\frac{1}{\lambda-t}\frac{d\lambda}{dt}+\frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}\frac{d^2\lambda}{dt^2}+\frac{\partial^2u}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{1}{4t(t-1)}u\\=&\frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}\left[\frac{d^2\lambda}{dt^2}+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right]\\&+\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4t(t-1)}u,\end{aligned}$$

also wegen (L′):

---

einigen Richtungen hin zu ergänzen sind, hat schon Herr **Gambier** (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris 1906, t. 142, p. 268) hingewiesen; siehe auch seine weiteren Veröffentlichungen C. R. 1906, t. 142, p. 1403 u. 1497, t. 143, p. 741.

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{1}{4t(t-1)}u=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4t(t-1)}u$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t^2(t-1)^2}\left[k_\infty-k_0\frac{t}{\lambda^2}+k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}-(k_t-1)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right].$$

Nun besteht aber, wie leicht durch die Rechnung zu bestätigen, für das elliptische Integral

$$v=\int_\infty^x\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} \tag{3}$$

die Beziehung

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{4t(t-1)}v=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}{t(t-1)}\frac{1}{(x-t)^2}; \tag{4}$$

also ergibt sich, wenn, wie oben, bei den Differentiationen λ als Konstante angesehen wird:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4t(t-1)}u=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t(t-1)}\frac{1}{(\lambda-t)^2}. \tag{5}$$

Daher folgt

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{u}{4t(t-1)} \tag{L''}$$
$$=\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{2t^2(t-1)^2}\left[k_\infty-k_0\frac{t}{\lambda^2}+k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}-k_t\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right].$$

Bezeichnet man die durch Umkehrung des elliptischen Integrals

$$u=\int_\infty^\lambda\frac{d\lambda}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}$$

entstehende elliptische Funktion durch

$$\lambda=f(u,t), \tag{6}$$

so daß also

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \tag{7}$$

und setzt

$$\psi(u,t)=k_\infty f(u)+k_0\frac{t}{f(u)}+k_1\frac{1-t}{f(u)-1}+k_t\frac{t(t-1)}{f(u)-t}, \tag{8}$$

wo hier der Einfachheit wegen das zweite Argument bei f weggelassen ist, so daß also $\psi(u,t)$ in bezug auf u eine eindeutige doppeltperiodische Funktion ist, die für solche Werte von u unendlich wird, für die

$$f(u)=\infty,\quad f(u)=0,\quad f(u)=1\quad\text{oder}\quad f(u)=t$$

wird; so lautet (L'')

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{u}{4t(t-1)}=\frac{1}{2t^2(t-1)^2}\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial u}. \tag{L'''}$$

VI.

Man kann sich die Frage vorlegen, für welche rationale Transformationen der abhängigen und der unabhängigen Variablen die Differentialgleichung (A) in eine Gleichung derselben Form mit denselben wesentlich singulären Stellen 0, 1, t, ∞ übergeht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, daß folgende Transformationen von x möglich sind:

$$\xi_1 = \frac{t}{x}, \quad \xi_2 = \frac{x-t}{x-1}, \quad \xi_3 = \frac{(x-1)t}{x-t}. \tag{9}$$

Und zwar geht über, bei ξ_1:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{in} & \xi_1 = \infty, \\ x = 1 & \text{in} & \xi_1 = t, \\ x = t & \text{in} & \xi_1 = 1, \\ x = \infty & \text{in} & \xi_1 = 0; \end{array}$$

bei ξ_2:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{in} & \xi_2 = t, \\ x = 1 & \text{in} & \xi_2 = \infty, \\ x = t & \text{in} & \xi_2 = 0, \\ x = \infty & \text{in} & \xi_2 = 1; \end{array}$$

bei ξ_3:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{in} & \xi_3 = 1, \\ x = 1 & \text{in} & \xi_3 = 0, \\ x = t & \text{in} & \xi_3 = \infty, \\ x = \infty & \text{in} & \xi_3 = t. \end{array}$$

Die abhängige Variable y muß dann jedesmal noch so transformiert werden, daß wieder der Koeffizient der ersten Ableitung nach der neuen unabhängigen Veränderlichen gleich Null wird. Die scheinbar singuläre Stelle λ geht dabei über bezw. in

$$\lambda_1 = \frac{t}{\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda - t}{\lambda - 1}, \quad \lambda_3 = \frac{(\lambda-1)t}{\lambda - t}. \tag{10}$$

Die Größen λ_1, λ_2, λ_3 müssen demnach genau ebenso gebildeten Differentialgleichungen genügen wie λ selbst, was auch die Rechnung unmittelbar liefert, wenn man in (L′) statt λ die Werte λ_1, λ_2, λ_3 substituiert. In diesen Gleichungen ist nur entsprechend der Vertauschung der singulären Stellen untereinander zu setzen für

$$k_0, \quad k_1, \quad k_t, \quad k_\infty:$$

in der Gleichung für λ_1 bezw.:

$$k_\infty, \quad k_t, \quad k_1, \quad k_0;$$

in der Gleichung für λ_2 bezw.:

$$k_t,\quad k_\infty,\quad k_0,\quad k_1;$$

in der Gleichung für λ_3 bezw.:

$$k_1,\quad k_0,\quad k_\infty,\quad k_t.$$

In den Gleichungen (L″) und (L‴) ist dann an Stelle von u zu setzen

$$(11)\qquad u_i = \int\limits_0^{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i(\lambda_i-1)(\lambda_i-t)}},\quad i=1,2,3,$$

welche Ausdrücke wegen

$$\frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i(\lambda_i-1)(\lambda_i-t)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},\quad i=1,2,3$$

übergeführt werden können in

$$(12)\quad u_1 = \int\limits_0^{\frac{t}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},\quad u_2 = \int\limits_1^{\frac{\lambda-t}{\lambda-1}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},\quad u_3 = \int\limits_t^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda-t}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}.$$

VII.

Das in der neueren Literatur vielfach behandelte sogenannte *Riemannsche Problem* gründet sich auf die Fragmente einer aus dem Nachlasse Riemanns veröffentlichten Arbeit: Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten (Riemanns Werke II. Auflage, S. 379). Auf die Bedeutung der in diesen Fragmenten enthaltenen Problemstellungen hat zuerst Herr Klein (vgl. Math. Ann. Bd. 46, S. 83) hingewiesen. Später hat dann Herr Schlesinger in einer Reihe von Abhandlungen*) dieses Problem in Angriff genommen und seine Lösbarkeit gezeigt, wenn die sogenannten Konvergenzbedingungen**) erfüllt sind. Neuerdings hat Herr Hilbert (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen III, Göttinger Nachrichten 1905, p. 330—337) das Problem für Differentialgleichungen zweiter Ordnung erledigt. Dieses Problem ist das folgende:

Es soll ein System von n Funktionen $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ gesucht werden, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ eindeutig, endlich und stetig sind. An den singulären Stellen sollen die

*) L. Schlesinger: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem, I, Crelles Journal Bd. 123, S. 138ff.; II, Bd. 124, S. 292ff.; Bd. 130, S. 26ff.

**) a. a. O. Bd. 123, S. 147.

Funktionen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich werden und sollen bei Umläufen der unabhängigen Veränderlichen um $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma$ bezw. die vorgeschriebenen Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_\sigma$, also bei $a_{\sigma+1} = \infty$ dann die Substitution

$$A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

erleiden.

Da die singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma$ willkürlich vorgeschrieben werden sollen und ebenso die Koeffizienten der Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_\sigma$, die also auch von $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma$ unabhängig sind, so genügen, wie Herr Schlesinger in den angegebenen Abhandlungen zeigt, die $y_1, y_2, \cdots, y_n$ einer linearen homogenen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse, deren Substitutionsgruppe von der Wahl der singulären Stellen unabhängig ist.

Die vorstehenden Untersuchungen geben nun diese Differentialgleichung für zwei Funktionen und drei im Endlichen gelegene singuläre Stellen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = t$. Wir wollen zeigen, daß die Anzahl der willkürlich gebliebenen Konstanten mit der für das Riemannsche Problem erforderlichen übereinstimmt.

Die Anzahl der in A_1, A_2, A_3 vorkommenden Konstanten ist 12. Da man es aber stets durch eine Transformation des Funktionssystems so einrichten kann, daß die Determinanten der Substitutionen gleich 1 sind, was darauf hinauskommt, daß, wie wir angenommen haben, der Koeffizient der ersten Ableitung in der Differentialgleichung, der das Funktionssystem genügt, den Wert Null hat, so reduziert sich die Zahl dieser Konstanten auf 9, wenn wir von vorneherein annehmen, daß die Determinanten von A_1, A_2, A_3 den Wert 1 haben. Nun hatte sich die Zahl der direkt verfügbaren Konstanten unserer Differentialgleichung gleich 6 ergeben. Hierzu kommen aber noch drei Konstante dadurch, daß man von einem Fundamentalsystem y_1, y_2 zu einem anderen

$$\eta_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2,$$
$$\eta_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2$$

übergehen kann. Die Zahl der hier hinzutretenden Konstanten ist deshalb nur 3, weil ein den Elementen eines Fundamentalsystems hinzugefügter gemeinsamer konstanter Faktor die Substitutionsgruppe unverändert läßt. Wir haben also, wie es sein muß, im ganzen neun Konstanten zur Verfügung.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich eine Bemerkung zu einer von meinem Vater (L. Fuchs, Sitzungsber. der Berl. Ak. 1894, S. 1125, Nr. 8) aufgestellten Differentialgleichung machen. Die dort aufgestellte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen singulären Stellen, deren Substitutionsgruppe von der Wahl einer singulären Stelle t unabhängig ist, hat keine scheinbar singuläre Stelle; es kann also der unendlich ferne Punkt keine wesentlich singuläre Stelle sein. In der Tat läßt sich diese Differentialgleichung in folgender Form schreiben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha_2 x^2(t-1)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha')\,x(x-1)\,t(t-1) + \alpha_1 (x-1)^2 t^2}{x^2(x-1)^2(x-t)^2}\, y, \tag{1}$$

wo die konstanten Größen α dieselbe Bedeutung haben wie in der Arbeit meines Vaters.

Die Gleichung (1) kann nun durch eine einfache Transformation in eine andere mit zwei im Endlichen gelegenen Punkten und dem unendlich fernen Punkt als wesentlich singulären Stellen übergeführt werden.

Setzt man nämlich

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t + z(1-t)}, \\ y = xu, \end{cases} \tag{2}$$

so geht (1) über in

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha')\,z + \alpha_1 z^2}{z^2(z-1)^2}\, u, \tag{3}$$

welche Gleichung leicht in eine Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden kann.

VIII.

Wir wollen nun einen besonders interessanten Spezialfall hervorheben, der von der allgemeinen von uns behandelten Differentialgleichung eine ähnliche Spezialisierung bildet, wie die sogenannte Legendresche Differentialgleichung von der allgemeinen Gaußschen.

Die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen der Gaußschen Differentialgleichung

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0, \tag{1}$$

die ja bekanntlich die Lösung des oben angegebenen Riemannschen Problems für zwei im Endlichen gelegene singuläre Stellen 0, 1 und zwei Funktionen y_1, y_2 enthält, sind

$$\begin{aligned} &\text{bei } x = 0 &&: 0,\ 1-\gamma, \\ &\text{bei } x = 1 &&: 0,\ \gamma-\alpha-\beta, \\ &\text{bei } x = \infty &&: \alpha,\ \beta. \end{aligned}$$

Fragt man sich, wie α, β, γ gewählt werden müssen, damit die Wurzeln für jede singuläre Stelle einander gleich werden, so ergibt sich

$$\gamma = 1, \quad \alpha + \beta = \gamma, \quad \alpha = \beta,$$

d. h. also

$$\gamma = 1, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}\cdot$$

Die Differentialgleichung (1) lautet dann

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0. \tag{2}$$

Es ist dies die sogenannte Legendresche Differentialgleichung, die von Legendre*) zuerst aufgestellt worden ist. Diese Gleichung wird befriedigt durch die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals

$$u = \int\limits_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-x)}};$$

sie spielt bekanntlich in der Theorie der Modulfunktion eine bedeutsame Rolle.

Wir fragen uns nun ebenso, welche Form unsere Differentialgleichung (A) annimmt, wenn die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für alle wesentlich singulären Stellen $0, 1, t, \infty$ einander gleich werden.

Damit die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1) = a$$

einander gleich werden, muß $a = -\frac{1}{4}$ sein; und ebenso folgt: $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{4}\cdot$ Damit ferner die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \infty$ ((2) IV)

$$r(r+1) = a + b + c + \frac{3}{4} - \varkappa$$

einander gleich werden, muß $\varkappa = \frac{1}{4}$ sein.

Da ferner nach Nr. V k_0, k_1, k_t, k_∞ die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen bezw. für $x = 0$, $x = 1$, $x = t$, $x = \infty$ sind, so müssen diese Größen hier den Wert Null haben.

Dann geht aber zufolge (L″) die Differentialgleichung, der λ als Funktion von t genügt, wenn wieder

$$u = \int\limits_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \tag{3}$$

gesetzt wird, über in

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)}u = 0, \tag{4}$$

*) Legendre, Traité des fonctions elliptiques, Bd. I (1825), S. 62 ff.

d. h. in die Legendresche Differentialgleichung, die durch die Periodizitätsmoduln des Integrals (3) befriedigt wird.

Bezeichnet man also die durch Umkehrung von (3) entstehende elliptische Funktion mit $f(u)$ und ihre der Differentialgleichung (4) genügenden Perioden mit u_1 und u_2, so ist

$$\lambda = f(c_1 u_1 + c_2 u_2), \tag{5}$$

wo c_1, c_2 zwei willkürliche Konstanten sind, so daß $c_1 u_1 + c_2 u_2$ das allgemeine Integral von (4) darstellt.

Wir erhalten also das folgende Ergebnis:

Die Differentialgleichung lautet:

$$\text{(A')} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \Big[-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-t)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}\Big] y.$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{t} - 1\right] + \frac{t(t-1)^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left[\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1}\right]^2,$$

$$\beta = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{t-1} + 1\right] - \frac{t^2(t-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left[\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t}\right]^2,$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda-t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right] + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]^2,$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\right] - \frac{1}{2}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\frac{d\lambda}{dt},$$

$$\lambda = f(c_1 u_1 + c_2 u_2),$$

wenn $f(u)$ die durch Umkehrung des Integrals

$$u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

entstehende elliptische Funktion bedeutet und u_1 und u_2 die Perioden dieser elliptischen Funktion

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_t^0 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \qquad u_2 = \frac{1}{2}\int_t^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},$$

die der Legendreschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)}u = 0$$

als ein Fundamentalsystem genügen.

Natürlich kann die Differentialgleichung (A') leicht durch die Transformation

$$y = x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-t)^{\frac{1}{2}}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}} u \tag{6}$$

so umgewandelt werden, daß die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für $x = 0, 1, t$ beide den Wert Null haben (für $x = \lambda$ die Werte 0 und 2), wie dies bei der Legendreschen Differentialgleichung bei 0 und 1 der Fall ist. Für $x = \infty$ werden die Wurzeln dann beide wie bei der Legendreschen Gleichung $\frac{1}{2}$. Ebenso kann auch die allgemeine Gleichung (A) so umgewandelt werden, daß von den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für die im Endlichen gelegenen singulären Punkte, wie bei der Gaußschen Differentialgleichung, eine den Wert Null hat.

IX.

Die Differentialgleichung für λ kann reduktibel sein und zwar kann sie mit einer Riccatischen Differentialgleichung ein Integral gemeinsam haben.

Ist nämlich r_1 eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = 0$, r_2 eine solche für $x = 1$ und r_3 für $x = t$, so genügt jedes Integral von

$$(1) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = (1 - 2r_2)\frac{\lambda}{t} + (1 - 2r_1)\frac{\lambda - 1}{t - 1} + 2(r_1 + r_2 + r_3 - 1)\frac{\lambda(\lambda - 1)}{t(t - 1)}$$

der Differentialgleichung für λ, wenn

$$(2) \qquad \varkappa = r_1 + r_2 + r_3 - 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3),$$

d. h., wegen (2) IV, wenn

$$r = r_1 + r_2 + r_3 - \frac{3}{2}$$

eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \infty$ wird.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß in diesem Falle die Differentialgleichung für y (A) lautet:

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\left(\frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x - 1} + \frac{r_3}{x - t} - \frac{\frac{1}{2}}{x - \lambda}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{x^2} + \frac{r_2}{(x - 1)^2} + \frac{r_3}{(x - t)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x - \lambda)^2}\right)\right] y.$$

Diese Gleichung ist reduktibel, sie wird befriedigt durch jedes Integral von

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \left[\frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x - 1} + \frac{r_3}{x - t} - \frac{\frac{1}{2}}{x - \lambda}\right] y.$$

Da aus (4)

$$y = \text{const.}\, x^{r_1}(x - 1)^{r_2}(x - t)^{r_3}(x - \lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

folgt, so ist, wenn c_1, c_2 willkürliche Konstanten bedeuten,

$$(5)\qquad y = c_1 x^{r_1}(x-1)^{r_2}(x-t)^{r_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{r_1}(x-1)^{r_2}(x-t)^{r_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \int_0^x (x-\lambda)\, x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3}\, dx$$

das allgemeine Integral von (3).

Es muß nun zufolge der Grundlage unserer Untersuchungen ein Fundamentalsystem von (3) so angegeben werden können, daß die Koeffizienten der Substitutionsgruppe von t unabhängig werden. Dieses Fundamentalsystem sei η_1, η_2.

Setzt man nun

$$y_1 = x^{r_1}(x-1)^{r_2}(x-t)^{r_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}},$$
$$y_2 = y_1 \int_0^x (x-\lambda)\, x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3},$$

so gehen bei einem beliebigen Umlauf von x y_1, y_2 bezw. über in

$$\bar{y}_1 = \omega y_1,$$
$$\bar{y}_2 = \omega y_2 + \omega y_1 \int_L (x-\lambda)\, x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3}\, dx,$$

wo das Integral über den geschlossenen Weg L zu erstrecken ist, den x bei dem Umlauf beschrieben hat, und ω eine von x und t unabhängige Konstante bedeutet.

Es sei nun

$$\eta_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2,$$
$$\eta_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2,$$

wo $c_{i\varkappa}$ von x unabhängige Größen sind, dann gehen bei dem Umlaufe L, wenn

$$\int_L (x-\lambda) x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3}\, dx = P$$

gesetzt wird, η_1, η_2 über in

$$\bar{\eta}_1 = \omega \eta_1 + c_{12}\, \omega y_1 P,$$
$$\bar{\eta}_2 = \omega \eta_2 + c_{22}\, \omega y_1 P,$$

oder

$$\bar{\eta}_1 = \omega \eta_1 + c_{12}\, \omega P (c_{22} \eta_1 - c_{12} \eta_2),$$
$$\bar{\eta}_2 = \omega \eta_2 + c_{22}\, \omega P (c_{22} \eta_1 - c_{12} \eta_2),$$

da man es stets durch Multiplikation von η_1, η_2 mit einem gemeinsamen Faktor so einrichten kann, daß die Determinante der $c_{i\varkappa}$ gleich 1 wird.

Sollen also die Koeffizienten der Substitutionen, die η_1, η_2 bei dem Umlauf erfahren, von t unabhängig sein, so müssen c_{12}, c_{22} so gewählt werden, daß

$$c_{12} P c_{22} = \gamma_1, \quad c_{12} P c_{12} = \gamma_2,$$
$$c_{22} P c_{22} = \gamma_3, \quad c_{22} P c_{12} = \gamma_4$$

wird, wo γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 von t unabhängige Größen sind. Daraus folgt aber, daß sich c_{12} und c_{22} nur durch einen von t unabhängigen Faktor unterscheiden dürfen, und daraus, daß die Funktion von t:

$$P = \int_L (x-\lambda) x^{-2\nu_1} (x-1)^{-2\nu_2} (x-t)^{-2\nu_3}\, dx$$

für jeden beliebigen geschlossenen Weg, abgesehen von einem konstanten Faktor, stets denselben Wert haben muß.

Es ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Integral

$$\int_L (x-\lambda) x^{\varepsilon_1} (x-1)^{\varepsilon_2} (x-t)^{\varepsilon_3}\, dx$$

über irgend einen geschlossenen Weg der x-Ebene erstreckt, abgesehen von einem konstanten Faktor, immer denselben Wert hat, die, daß λ der Differentialgleichung

$$\frac{d\lambda}{dt} = (1+\varepsilon_1)\frac{\lambda}{t} + (1+\varepsilon_2)\frac{\lambda-1}{t-1} - (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+2)\frac{\lambda(\lambda-1)}{t(t-1)}$$

genügt.

Wenn $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2 = 0$ ist, so ist diese Differentialgleichung linear. Ist dies nicht der Fall, so setze man:

$$\lambda = \frac{t(t-1)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+2}\,\frac{u'}{u} + t,$$

dann erhält man für u die Gaußsche Differentialgleichung

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2} + [(\alpha+\beta+\gamma)t-\gamma]\frac{du}{dt} + \alpha\beta u = 0,$$

wenn

$$\alpha = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+2,$$
$$\beta = 1+\varepsilon_3,$$
$$\gamma = 2+\varepsilon_1+\varepsilon_3$$

gesetzt wird.*)

*) Hieraus folgt z. B. die bekannte Tatsache, daß die Integrale

$$\int_L x^{\varepsilon_1+1}(x-1)^{\varepsilon_2}(x-t)^{\varepsilon_3}\,dx \quad \text{und} \quad \int_L x^{\varepsilon_1}(x-1)^{\varepsilon_2}(x-t)^{\varepsilon_3}\,dx$$

linearen Differentialgleichungen derselben Klasse genügen.

Z. B. für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}$ erhält man:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\int \frac{x-\lambda}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}\, dx$$

nur durch einen von t unabhängigen Faktor unterscheiden, ist die, daß

$$\lambda = 2t(t-1)\frac{u'}{u} + t,$$

wo u ein beliebiges Integral der Legendreschen Gleichung

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2} + (2t-1)\frac{du}{dt} + \frac{1}{4}u = 0$$

ist.

X.

Es soll nun noch gezeigt werden, daß durch gewisse Spezialisierung der Konstanten die Differentialgleichung (A) in die Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden kann.

Wenn $k_t = 0$ ist, so folgt aus der Gleichung (L″) S. 310, daß $\lambda = t$ gewählt werden kann. In der Tat werden dann beide Seiten von (L″) gleich Null, da

$$u = \int_{\infty}^{t} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

der Legendreschen Differentialgleichung, deren linke Seite mit der linken Seite von (L″) übereinstimmt, genügt. Die Ausdrücke (P), (Q), (R) der Nr. IV, S. 307, geben dann, daß für $\lambda = t$

$$[\alpha]_{\lambda=t} = \varkappa - \frac{1}{2},$$

$$[\beta]_{\lambda=t} = -\varkappa + \frac{1}{2},$$

$$[\gamma(\lambda-t)]_{\lambda=t} = \frac{1}{2}$$

ist. Da nun $\varepsilon = -\alpha - \beta - \gamma$, also der Koeffizient von (A)

$$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha}{x-\lambda}$$
$$+ \frac{\beta}{x-1} - \frac{\beta}{x-\lambda} - \frac{\gamma(\lambda-t)}{(x-t)(x-\lambda)},$$

so ergibt sich, da, wie schon früher gezeigt, aus $k_t = 0$ $c = -\frac{1}{4}$ folgt, für $\lambda = t$:

$$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \varkappa}{x(x-1)} - \frac{\frac{1}{4}}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-t)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x-t)^2}.$$

Die Differentialgleichung (A) lautet also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \varkappa}{x(x-1)}\right] y$$

und kann durch eine einfache Transformation in die Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden.

Ebenso kann für $k_1 = 0$ das Integral $\lambda = 1$ gewählt werden, wobei dann eine Differentialgleichung mit den wesentlich singulären Stellen

$$0,\ t,\ \infty \quad \text{und nicht } 1,$$

für $k_0 = 0$, $\lambda = 0$ eine Differentialgleichung mit den singulären Stellen

$$1,\ t,\ \infty \quad \text{und nicht } 0$$

entsteht. Endlich ergibt sich für $k_\infty = 0$ das Integral $\lambda = \infty$ und daraus eine Differentialgleichung mit den singulären Stellen

$$0,\ 1,\ t \quad \text{und nicht } \infty.$$

Diese Gleichung stimmt mit der in VII, S. 313—314 behandelten Gleichung meines Vaters überein und kann also ebenfalls leicht, wie dort gezeigt, in eine Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden.