

## О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

**И.В. Гришин, Е.И. Манкевич, К.В. Телегина,  
А.С. Шелудько, В.И. Ширяев**

Задача построения математических моделей и прогнозирования процессов различной природы является давней, но актуальной до сих пор. До недавнего времени она решалась построением стохастических регрессионных моделей с помощью методов математической статистики. При этом источником неточных прогнозов считалось влияние случайных факторов. Однако, наблюдаемые статистические характеристики таких случайностей, отличающиеся от теоретических, («толстые хвосты» распределений, острые пики) стали причиной изучения данных факторов, как следствия функционирования детерминированной динамической системы. В этой связи, одними из самых активно развивающихся и широко обсуждаемых стали методы нелинейной динамики [7, 12, 18, 20–22, 28, 37]. Моделирование в них осуществляется нелинейными (в том числе многомерными) разностными уравнениями (отображениями)

$$x_{n+1} = F(x_n, c) \quad (1)$$

и дифференциальными уравнениями

$$dx/dt = F(x, c), \quad (2)$$

где  $x$  –  $D$ -мерный вектор состояния,  $F$  – вектор-функция,  $c$  –  $P$ -мерный вектор параметров,  $n$  – дискретное время,  $t$  – непрерывное время. Примеры успешного их использования известны в радиотехнике и криптографии [4, 29, 35], медицине [23, 27, 41], экономике [2, 9, 22, 25, 28, 39, 40] и других областях науки и техники [32, 42–45, 47, 48].

Традиционно модель создается с учетом всех наиболее существенных факторов, влияющих на поведение системы. Структура модели, в этом случае, определяется причинно-следственными связями исследуемых факторов. Источником такой информации могут быть фундаментальные законы природы, априорные знания об объекте моделирования.

Если о структуре модели заранее ничего не известно, остается надеяться на универсальные конструкции, которые, как правило, содержат очень много параметров. Трудности со скрытыми переменными в таком случае непреодолимы, поэтому временные ряды всех динамических переменных модели должны быть измерены или получены по наблюдаемым. Далее приходится строить многомерную модель вида (1) или (2), где в качестве функции многих переменных  $F$  выбрана одна из универсальных конструкций с множеством неизвестных параметров. Оценку множества параметров реально проводить обычным МНК или фильтром Калмана, при этом для упрощения желательно, чтобы функция  $F$  зависела от параметров

линейно. Очень много усилий исследователей ушло на поиск универсальных подходов к решению такой задачи. Задача моделирования существенно усложняется, если наблюдения за системой ограничиваются одномерной реализацией одной из ее координат, как правило, в присутствии шумов.

### 1. Диагностика хаотических процессов

Одним из достаточно простых и эффективных методов анализа временных рядов является так называемый  $R/S$ -анализ. Этим методом анализируются ряды метеорологических и геофизических наблюдений – колебания температуры, давления, количества выпавших осадков, вариации магнитного поля Земли и др. Метод устойчив, содержит минимальные предположения о системе, продуцирующей ряд, и его с успехом можно использовать для классификации временных рядов. Характеристикой хаотичности ряда выступает показатель Херста  $H$ , который может быть выражен через размах  $R$  изменений значений исследуемого сигнала на отрезке времени  $\Delta t$  и рассчитанное для этого отрезка стандартное отклонение  $S$ :  $H = \ln(R/S) / \ln(\Delta t)$  [28].

Значения  $H \geq 2/3$  определяют собой черный цвет шума. Чем больше значение  $H \in [2/3; 1]$ , тем большая трендоустойчивость присуща соответствующему отрезку временного ряда. Значения  $H$  в окрестности  $\sim 0,5 \pm 0,1$  определяют собой область белого шума, который соответствует «максимальной хаотичности» и, следовательно, наименьшей прогнозируемости. Значения  $H$  в окрестности  $\sim 0,3 \pm 0,1$  определяют собой область розового шума. Розовый шум говорит о присущем рассматриваемому отрезку временного ряда свойству антиперсистентности [28], которое означает, что ряд реверсирует чаще, чем ряд случайный (частый возврат к среднему). Значения  $H$  в окрестности меньше 0,1 определяют собой область коричневого шума, который соответствует максимальной фрактальной размерности и полной неопределенности в отношении прогнозируемости. Рассматриваемые в настоящей работе временные ряды отличаются черным шумом.

### 2. Методы восстановления динамических систем из временных рядов

Если аппроксимирующая функция  $F$  задается с помощью единой формулы во всем диапазоне изменений аргумента, как в случае многочлена, то аппроксимацию (и модель) называют глобальной.

Альтернативным и часто не менее эффективным является локальный (кусочный) подход, когда аппроксимирующая функция задается некоторой (чаще простой) формулой, но со своим набором параметров для каждой небольшой области значений аргумента. Наиболее популярные примеры — кусочно-постоянные и кусочно-линейные аппроксимации и кубические сплайны. Локальные модели лучше описывают менее гладкие зависимости с изломами и разрывами. Но они более чувствительны к действию шума, чем глобальные с не очень большим числом параметров. Поэтому локальные модели лучше при большом объеме данных и низком уровне шумов для сколь угодно сложной нелинейности, а глобальные модели имеют преимущества при меньшем объеме данных и более высоком уровне шума для систем с не очень сложной нелинейностью.

### 2.1. Выбор вектора состояния

Предположим, что наблюдаемая величина  $y$  порождается некоторой динамической системой и является либо одной из ее переменных состояний, либо скалярной функцией от них. Задача состоит в том [1], чтобы, во-первых, по одномерному временному ряду восстановить фазовый портрет (аттрактор) изучаемой системы, во-вторых, восстановить динамические уравнения, в каком-то приближении описывающие поведение исходной системы.

Для решения первой задачи в [46] был предложен метод задержки, согласно которому вектор состояния восстанавливался по формуле  $Y = \{y(t), y(t + \Delta'), y(t + 2\Delta'), \dots, y(t + (N - 1)\Delta')\}$ , (3) где  $N$  — размерность вложения,  $\Delta'$  — задержка вложения. Для дискретного векторного ряда задержка вложения выражается через целое число  $k$  шагов дискретизации  $\Delta' = k\Delta$ , а вектор состояния записывается следующим образом:

$$Y_j = \{y_j, y_{j+k}, y_{j+2k}, \dots, y_{j+(N-1)k}\}. \quad (4)$$

Такенс [49] углубил этот результат, показав, что в отсутствие шумов и при размерности вложения  $N \geq 2d + 1$ , где  $d$  — фрактальная размерность исследуемой хаотической системы, множество (3) топологически эквивалентно аттрактору системы. Теорема Такенса подготовила почву для построения алгоритмов предсказания хаотических процессов с использованием сведений о динамической природе наблюдаемого ряда.

Вектор состояния (3) имеет преимущество при построении конечно-разностных уравнений (1), описывающих исследуемую систему. Для большинства физических систем, которые описываются не разностными, а дифференциальными уравнениями, в качестве вектора состояния вместо (3) удобнее брать совокупность производных исследуемого процесса

$$Y' = \{y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}. \quad (5)$$

Фактически производные  $y^{(n)}$  наблюдаемого процесса  $y$  вычисляются через конечные разности, скажем при отсутствии шумов

$$y^{(n+1)}(t) = [y^n(t + \Delta) - y^{(n)}(t)] / \Delta. \quad (6)$$

Погрешность вычисления производной для данной схемы составляет  $O(\Delta)$ . Точность можно увеличить, если перейти к схеме

$$y^{(n+1)}(t) = [y^n(t + \Delta) - y^{(n)}(t - \Delta)] / 2\Delta. \quad (7)$$

Для нее погрешность составляет  $O(\Delta^2)$ . Однако в обоих упомянутых случаях предполагается, что шумы в системе отсутствуют.

При наличии шумов погрешности дифференцирования с помощью формул (6) или (7) будут очень велики. Поэтому на практике используют другие методы расчета производных, которые связаны с усреднением шума.

Например, будем использовать следующий подход. Для расчета производной в момент времени  $t_j$  используется  $m$  значений наблюдаемой величины в окрестности  $t_j$ . Предпочтительнее использовать нечетное значение  $m$ , так как тогда используется равное количество значений слева и справа от рассматриваемой точки:

$\{y(t_{j-(m-1)/2}), \dots, y(t_{j-1}), y(t_j), y(t_{j+1}), \dots, y(t_{j+(m-1)/2})\}$  (центрированная схема). Этот «короткий ряд» из  $m$  значений (наблюдаемая реализация в окрестности точки  $t_j$ ) на основании разложения в ряд Тейлора аппроксимируется полиномом определенной степени. Значение производной  $y^{(n+1)}(t_o)$  определяется как значение  $(n+1)$  производной полинома данной точке.

Чем выше уровень шума, тем большее значение  $m$  следует выбирать. Отметим, что точность вычисления производной зависит также от такого параметра, как количество измеренных значений на характерном периоде колебаний. Опыт показывает, что если на один период приходится менее 30–40 точек, то точность вычисления производной не велика; желательно, чтобы было не менее 100 точек на периоде.

### 2.2. Оценка размерности системы

Важным элементом восстановления уравнений динамики по экспериментальным данным является оценка размерности исследуемого процесса, то есть оценка числа степеней свободы вовлеченных в динамический процесс. Хаотические аттракторы характеризуются фрактальной размерностью  $d$ , вычисление через показатель Херста которой возможно с помощью следующим образом:

$$d = 2 - H. \quad (8)$$

Обе величины характеризуют независимую случайную систему. Величина  $0,5 < H < 1$  будет соответствовать фрактальной размерности, более

близкой к кривой линии. Это персистентный временной ряд, дающий более гладкую, менее зазубренную линию, нежели случайное блуждание. Антиперсистентная величина  $H$  ( $0 < H < 0,5$ ) дает соответственно более высокую фрактальную размерность и более прерывистую линию, чем случайное блуждание, и, следовательно, характеризует систему, более подверженную переменам.

Располагая фрактальной размерностью  $d$ , можно оценить размерность вложения  $N$  по формуле Такенса  $N \geq 2d + 1$ , хотя эта оценка часто оказывается завышенной и можно ограничиться пространством меньшей размерности. В этих условиях часто прибегают к упрощенным оценкам размерности вложения, используя, например, метод ложных ближайших соседей, корреляционную размерность, метод главных компонент. Во всех случаях оценка размерности выступает как экспериментальная величина. Обычно приходится перебирать разные значения размерности, начиная с малых и постепенно их увеличивая, пока не будет достигнута удовлетворительная модель или насыщение результатов.

### 2.3. Вид уравнений системы

Оценив размерность системы можно приступить к подгонке модельного уравнения к временным рядам. В рамках процедуры реконструкции вектор-функция  $F$  из уравнения (1) представляется в виде разложения по некоторому базису, ограничиваясь конечным числом членов разложения. В простейшем случае задание  $F$  может осуществляться полиномами степени  $\nu$

$$F_j(x_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_{k, i}^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^n l_k \leq \nu, \quad (9)$$

где  $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$  – неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. Для нахождения коэффициентов (9) необходимо решить систему  $N$  линейных алгебраических уравнений

$$x_{j, i+1} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_{k, i}^{l_k}, \quad i = 1, \dots, N \quad (10)$$

с неизвестными  $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$ , в которой  $N$  – число точек скалярного временного ряда, используемых для аппроксимации правых частей.

При заданных  $n$  и  $\nu$  число коэффициентов  $K$  полиномов (9) в общем случае может быть определено по формуле  $K = (n + \nu)! / (n! \nu!)$ . Как правило,  $N \gg K$ , поэтому для оценивания параметров может применяться метод наименьших квадратов, однако. Однако при воздействии шумов получающаяся математическая модель является громоздкой, но при условии удачного выбора общего вида нелинейных функций ее решение воспроизводит сигнал.

Аналогичным образом можно реконструировать не только отображения (1), но и математиче-

ские модели в виде системы ОДУ 1-го порядка (2). Так как на предыдущих этапах осуществлялась реконструкция фазовой траектории, то все  $x_i$  известны; следовательно, можно определить производные от них (с оговорками, касающимися процедуры численного дифференцирования).

Если в качестве способа задания вектора состояния в фазовом пространстве используется метод последовательного дифференцирования, то математическую модель можно восстановить в более простом виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11)$$

в силу того, что взаимосвязь между координатами однозначно задается равенством (5)

Несмотря на относительную новизну методов хаотической динамики, идентификация систем (1), (2), с правыми частями вида (9), (11) осуществляется традиционными методами [3, 11, 14-17, 31, 34, 38]

### 2.4. Другие подходы

В рамках нелинейного анализа данных и моделирования активно применяются нейронные сети [5, 8, 20, 21, 36, 37, 39]. При изучении нелинейных явлений нейронные сети могут выступать в двух различных качествах. Они могут использоваться для анализа, диагностики, прогноза, поиска закономерностей, которые в дальнейшем могут быть использованы при построении традиционных моделей. В самом деле, прогнозирующая сеть сама по себе тоже представляет своеобразную имитационную модель изучаемого процесса. Нейронные сети также могут быть использованы как инструмент для моделирования различных нелинейных систем. На сегодняшний день они представляют собой один из немногих прообразов организованной сложности, характерной для ряда физических, многих биологических, технических и социальных систем [21].

В [24] предлагается оригинальный подход для моделирования сложных систем, допускающих группы симметрии. В результате применения метода к экспериментальным данным могут быть получены регулярные параметрически идентифицируемые модели, имеющие адекватное исходному процессу поведение. При этом качественное исследование поведения системы в локальной области сводится к системе, редуцированной на центральное многообразие.

### 3. Примеры

В качестве примера рассматривается идентификация временных рядов цен на металл и трафика в абонентов сотовой связи. Оценка параметров осуществляется фильтром Калмана. Для локальной аппроксимации использовалась система вида:

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = x_{1,k} + x_{2,k} + \xi_{1,k}; \\ x_{2,k+1} = x_{2,k} + x_{3,k} + \xi_{2,k}; \\ x_{3,k+1} = \alpha_1 + \alpha_2 x_{1,k} + \alpha_3 x_{2,k} + \alpha_4 x_{3,k} + \\ + \alpha_5 x_{1,k} x_{2,k} + \alpha_6 x_{1,k} x_{3,k} + \alpha_7 x_{2,k} x_{3,k} + \\ + \alpha_8 x_{1,k}^2 + \alpha_9 x_{2,k}^2 + \alpha_{10} x_{3,k}^2 + \xi_{3,k}; \\ k = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (12)$$

где  $x_{1,k}$  – исходный ряд,  $x_{2,k}$  и  $x_{3,k}$  – первая и вторая производные  $x_{1,k}$ ,  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,10}$ ) – неизвестные параметры,  $\xi_{j,k}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) – гауссовские шумы. Все координаты вектора состояния  $x_k$  измеряемые. Такая же система использовалась в [8] в задаче передачи информации.

Для идентификации параметров системы с помощью фильтра Калмана [3, 15, 17, 31, 37, 38] вектор состояния расширяется за счет неизвестных параметров, модель приводится к линейному виду

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + C_k \xi_k; \\ y_k = H_k x_k + \eta_k; \\ k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (13)$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^{13}$  – вектор состояния системы,  $y_k \in \mathbb{R}^3$  – вектор измерений,  $\xi_k \in \mathbb{R}^{13}$  и  $\eta_k \in \mathbb{R}^3$  – независимые гауссовские случайные последовательности с известным математическим ожиданием  $M\xi_k \in \bar{\xi}$ ,  $M\eta_k \in \bar{\eta}$  и известными ковариационными матрицами  $Q_k$  и  $R_k$ , размерности  $13 \times 13$  и  $3 \times 3$ ,  $A_k$  и  $C_k$  – матрицы размерности  $13 \times 13$ ,  $H_k$  – матрица размерности  $3 \times 13$ . Начальное состояние системы  $x_0$  – случайный гауссовский вектор с известной положительно определенной матрицей ковариации  $P_0$  и математическим ожиданием  $Mx_0 \in \bar{x}_0$ .

### 3.1. Котировки цен на металл

Исследуются ряд котировок цинка на Лондонской сырьевой бирже, содержащий 200 отсчетов. Показатель Херста для данного ряда равен 0,92, что свидетельствует о наличии детерминированной составляющей. Фазовый портрет (рис. 1) демонстрирует определенную цикличность в поведении ряда в ограниченной области фазового пространства.

В результате оценивания параметров системы (3) с помощью фильтра Калмана точность аппроксимации составила 98,5%. Точность прогноза (рис. 2) на 10 дней в среднем составила 94,8%.

### 3.2. Трафик абонентов сотовой связи

Особенностью исходных данных по трафику абонентов сотовой связи является наличие в них недельных колебаний с достаточно большой амплитудой колебаний. Главные пики на графике спек-

тра частотных мощностей (рис. 3) соответствуют кратным частотам  $1/7 \approx 0,1429$ ,  $2/7 \approx 0,2857$ ,  $3/7 \approx 0,4286$ .

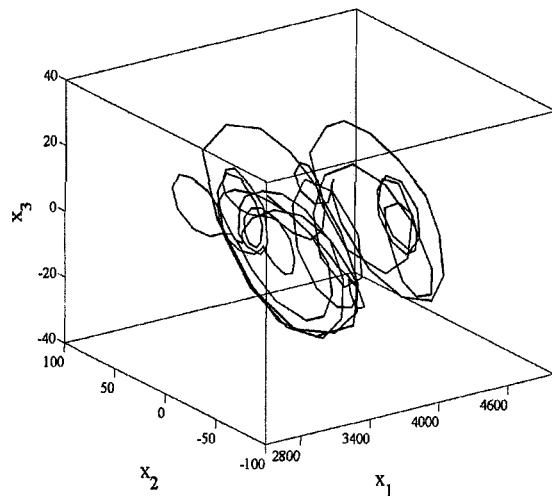


Рис. 1. Фазовый портрет для котировок цинка

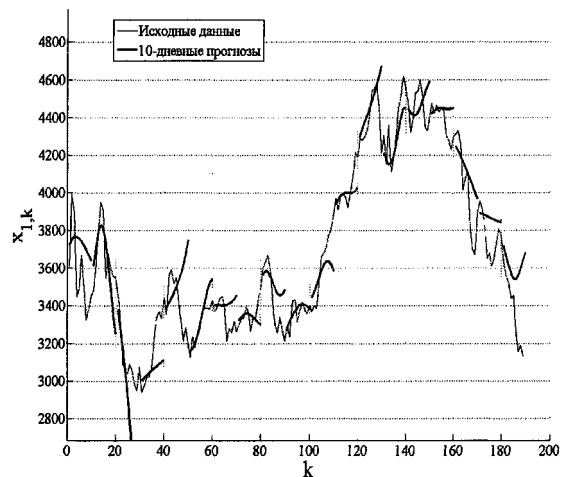


Рис. 2. Десятидневные дневные прогнозы котировок цинка

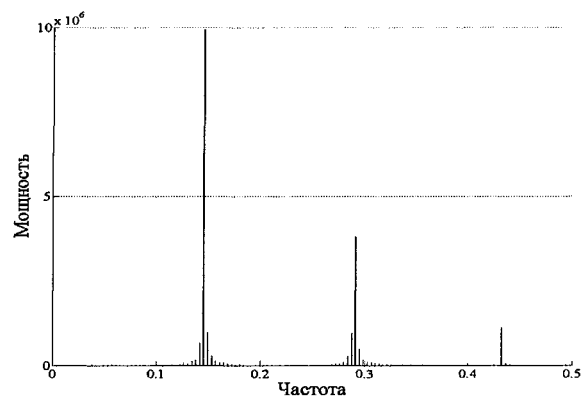


Рис. 3. Спектр для временного ряда трафика абонентов сотовой связи

После удаления недельной составляющей (рис. 4) из исходного ряда с помощью численного дифференцирования были получены его первая и

вторая производные (координаты  $x_2$  и  $x_3$  вектора состояния) и построен фазовый портрет наблюдаемой системы (рис. 5).

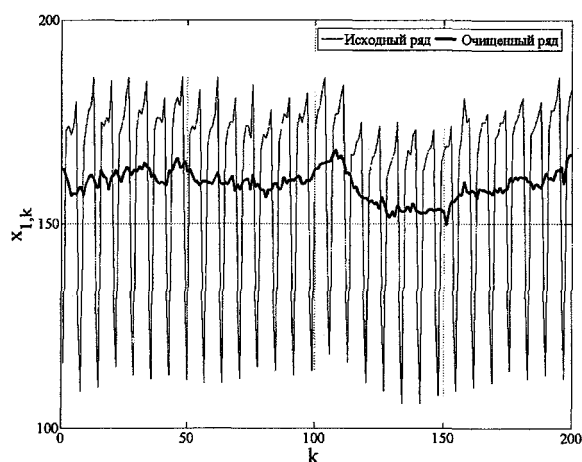


Рис. 4. Исходный и очищенный от периодических составляющих временной ряд трафика абонентов сотовой связи

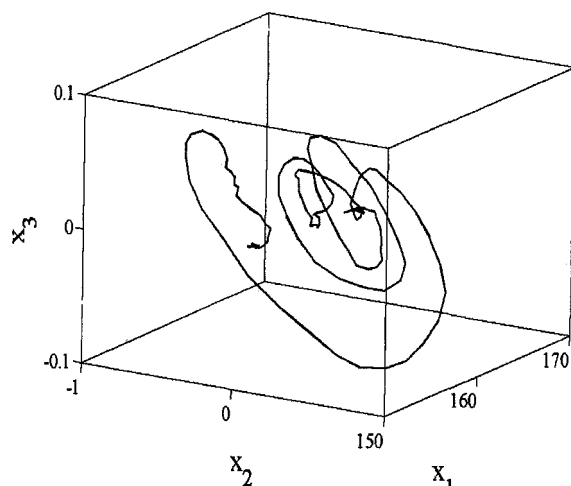


Рис. 5. Фазовый портрет для трафика абонентов сотовой связи

Показатель Херста для ряда очищенного от периодических составляющих равен 0,96.

Первоначально для прогнозов использовалась расширенная модель (12). Однако в ходе идентификации параметров модели с помощью фильтра Калмана оказалось, что некоторые из слагаемых суммы в правой части 3-го уравнения системы (12) не вносят существенный вклад в значение разности  $\Delta x_{3,k} = x_{3,k+1} - x_{3,k}$ . После приведения модели к виду (10) прогнозные значения временного ряда оказались не хуже, чем в предыдущей модели.

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = x_{1,k} + x_{2,k} + \xi_{1,k}; \\ x_{2,k+1} = x_{2,k} + x_{3,k} + \xi_{2,k}; \\ x_{3,k+1} = \beta_1 x_{2,k+1} + \beta_2 x_{3,k+1} + \\ + \beta_3 x_{1,k+1} x_{2,k+1} + \beta_4 x_{1,k+1} x_{3,k+1} + \xi_{3,k}; \\ k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (14)$$

Для упрощенной модели точность аппроксимации составила 99,7 %, а точность прогноза (рис. 6) – 83,1 %.

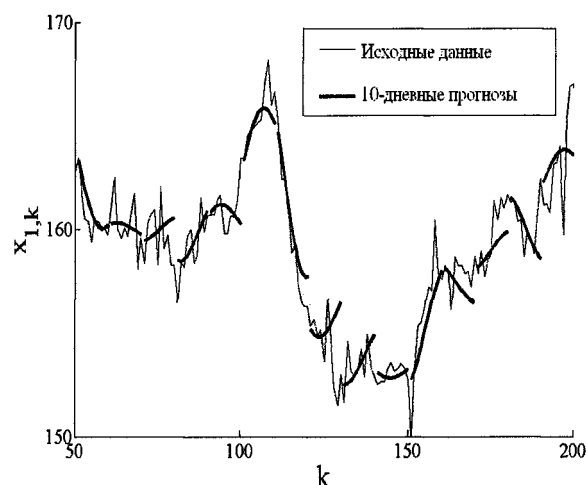


Рис. 6. Десятидневные прогнозы трафика абонентов сотовой связи

### Выводы

Показана эффективность применения нелинейных моделей для решения задачи идентификации временных систем описывающих поведение временных рядов котировок цинка и трафика абонентов сотовой связи. Для идентификации параметров моделей использовался фильтр Калмана. Средняя точность десятидневных прогнозов по полученным моделям составила 94,8 % для котировок цинка, 87,1 % для трафика.

### Литература

1. Аносов, О. Л. Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам / О. Л. Аносов, О. Я. Бутковский, Ю. А. Кравцов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2000. — Т. 8, № 1. — С. 29-45.
2. Батунин, А. В. Фазовые траектории динамических систем на рынке ценных бумаг / А. В. Батунин, А. А. Кулячков, Л. А. Чалдаева // Финансы и кредит. — 2001. — № 8(80). — С. 3-6.
3. Бек, В. В. Интегрированные системы терминального управления / В. В. Бек, Ю. С. Вишняков, А. Р. Махлин. — М.: Наука, 1989. — 224 с.
4. Борисов, А. Детерминированный хаос повышает криптостойкость / А. Борисов // Мобильные системы. — 2006. — №9. — С. 44-48.
5. Борисов, Ю. Ю. Построение прогнозирующих моделей динамических систем на основе исследования окрестностей реконструированных аттракторов / Ю. Ю. Борисов // Автоматизация и современные технологии. — 2007. — №2. — С. 32-37.
6. Безручко, Б. П. Глобальная реконструкция системы по временной реализации переходного процесса / Б. П. Безручко, Т. В. Диканев, Д. А. Смирнов // Изв. вузов Прикладная нелинейная динамика. — 2001. — Т. 9, № 3.

7. Безручко, Б. П. Математическое моделирование и хаотические временные ряды / Б. П. Безручко, Д. А. Смирнов. - Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. - 320 с.
8. Головкин, В. А. Нейросетевые методы определения спектра Ляпунова хаотических процессов / В. А. Головкин, Н. Ю. Чумерин // Нейрокомпьютеры в системах обработки сигналов. - 2004. - № 1. - С. 68-77.
9. Григорьев, В. П. Применение теории детерминированного хаоса к моделированию динамики фьючерсных рынков / В. П. Григорьев, А. В. Козловских, О. В. Ситникова // Финансы и кредит. - 2003. - №24(138). - С. 43-45.
10. Калман, Р. Е. Идентификация систем с шумами / Р. Е. Калман // Успехи мат. наук. - 1985. - Т. 40, Вып. 4(244). - С. 27-41.
11. Карабутов, Н.Н. Адаптивная идентификация систем: Информационный синтез / Н. Н. Карабутов. - М.: КомКнига, 2006. - 384 с.
12. Колесников, А. А. Синергетические методы управления сложными системами / А. А. Колесников. — М.: КомКнига, 2005. — 237 с.
13. Красовский, А. А. Аттракторы и синтез управления в критических режимах / А. А. Красовский // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1996-Мз3.-С. 5-14.
14. Красовский, А. А. Общее условие, благоприятствующее точному оцениванию, и новые алгоритмы фильтрации / А. А. Красовский // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984. - № 4. - С. 86-93.
15. Крянев, А. В. Математические методы обработки неопределенных данных / А. В. Крянев, Г. В. Лукин. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. -216 с.
16. Куржанский, А. Б. Идентификация нелинейных процессов - гарантированные оценки / А. Б. Куржанский, В. Д. Фурасов // Автоматика и телемеханика. - 1999. - №6.-С. 70-87.
- П.Льонг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льонг. - М.: Наука. 1991. - 432 с.
18. Магницкий, Н. А. Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров. — М.: Едиториал УРСС, 2004. - 320 с.
19. Магницкий, Ю. Н. Аппроксимация временных рядов хаотическими динамическими системами / Ю. Н. Магницкий // Динамика неоднородных систем. - 2006. - С. 98-103.
20. Макаренко, Н. Г. Эмбедология и нейропрогноз / Н. Г. Макаренко // V Всеросс. научн.-техн. конф. «Нейроинформатика-2003». — М.: 2003. -Ч.1.-С 86-148.
21. Малинецкий, Г. Г. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов, А. В. Подлазов. — М.: КомКнига, 2006. - 280 с.
22. Манделброт, Б. Фракталы, случай и финансы / Б. Манделброт. - Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 256 с.
23. Меклер, А. А. Применение аппарата нелинейного анализа динамических систем для обработки сигналов ЭЭГ / А. А. Меклер // Актуальные проблемы современной математики: ученые записки. - СПб.: Изд-во ЛГУ, 2004. - Т. 13, Вып. 2. - С. 112-140.
24. Никульчев, Е. В. Моделирование систем с нелинейной динамикой на основании экспериментальных данных / Е. В. Никульчев // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2006. - №5-С. 6-11.
25. Никульчев, Е. В. Модели хаоса для процессов изменения курса акций / Е. В. Никульчев, М. Е. Волович // ExponentaPro. - 2003. - № 1(1). - С. 49-52.
26. Павлов, А. Н. Применение метода восстановления математической модели к анализу электрокардиограмм / А. Н. Павлов, Н. Б. Янсон / Изв. вузов. - 1997. - Т.5, №1.- С. 93.
27. Реконструкция динамических систем по сигналам малой длительности / А. Н. Павлов и др. // Письма в ЖТФ. - 1999. - Т. 25, Вып. 11. - С. 7-13.
28. Петере, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Э. Петере. - М.: Интернет-трейдинг, 2004. — 304 с.
29. Глобальная реконструкция по временным рядам в приложении к определению направления связи / В. И. Пономаренко и др. // Вопросы прикладной физики. — 2004. - Вып. II.
30. Пономаренко, В. И. Кодирование и извлечение информации, замаскированной хаотическим сигналом системы с запаздыванием / В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров // Радиотехника и электроника. - 2004. - Т. 49, № 9. - С. 1098-1104.
31. Идентификация систем и задачи управления: на пути к современным системным методологиям / И. В. Прангишвили и др. // Проблемы управления. - 2004. - №4- С. 2-15.
32. Предсказуемость глобальных и региональных явлений в природе и обществе / В. А. Садовничий и др. // Вестник ОИГГН РАН. - 2000. - №1(11).-С. 84-121.
33. Смирнов, Д. А. Метод оценки параметров одномерных отображений по временным рядам / Д. А. Смирнов, Д. С. Власкин, В. И. Пономаренко // Письма в ЖТФ. - 2005. - Т. 31, Вып. 3. - С. 18-26.
34. Смолин, В. В. Оценивание неизвестных параметров и состояния микроэкономических систем в условиях неопределенности на примере производственно-бытовой фирмы / В. В. Смолин, В. И. Ширяев // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 2003. - № 6. - С. 68-72.
35. Тратас, Ю. Г. Применение методов статистической теории связи к задачам приема хаотических колебаний / Ю. Г. Тратас // Успехи современной радиоэлектроники. — 1998. — № 11. — С. 57-80.
36. Червяков, Н. И. Предсказание фрактальных временных рядов с помощью нейронных сетей / Н. И. Червяков, Э. Е. Тихонов // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. - 2003. - № 10-11. - С. 19.

37. Ширяев, В. И. Модели финансовых рынков. Нейросетевые методы в анализе финансовых рынков / В. И. Ширяев. — М: КомКнига, 2007. — 224 с.
38. Современные методы идентификации систем / Подред. П. Эйкхоффа. — М: Мир, 1983. — 400 с.
39. Яковлев, В. Л. Модели детерминированного хаоса в задаче прогнозирования тенденций финансовых рынков и их нейросетевая реализация / В. Л. Яковлев, Г. Л. Яковлева, Л. А. Лисицкий // • Информационные технологии. — 2000. — №2. — С. 46-52.
40. Яновский, Л. 77. Анализ состояния финансовых рынков на основе методов нелинейной динамики / Л. П. Яновский, Д. А. Филатов // Финансы и кредит. - 2005. - № 32(200). - С. 2-13.
41. Задача реконструкции математической модели применительно к электрокардиограмме / И. Б. Янсон и др. // Письма в ЖТФ. - 1996. - Т. 22, №16. - С. 57.
42. Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series analysis / R Hegger et al. // Chaos. -1998. - Vol. 8. -P. 727-754.
43. Kadtke, J. Classification of highly noisy signals using global dynamical models / J. Kadtke // Phys. Lett. A. -1995. - Vol. 203. -P. 196-202.
44. Analyzing chaotic behavior in a Belousov—Zhabotinsky reaction by using a global vector field reconstruction / C. Letellier et al. // J. Phys. Chem. - 1998. - Vol. 102. -P. 10265-10273.
45. Characterization of dolphin acoustic echolocation data using a dynamical classification method / M. Kremlivsky et al. // Int. J. of Bifurcations and Chaos. -1998. - Vol. 8. -P. 813-824.
46. Geometry from a time series / N. M. Packard // Phys. Rev. Lett. - 1980. -Vol. 45. -P. 712.
47. Rosenblum, M. G. Detecting direction of coupling in interacting oscillator / M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky // Phys. Rev. E. -2001. - Vol. 64.
48. Identification of nucleocytoplasmic cycling as a remote sensor in cellular signaling by databased modeling / I. Swameye et al. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. -2003. - Vol. 100. -P. 1028-1033.
49. Tokens, F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Tokens // Lee. Notes in Math. —1981. — Vol. 898. -P. 366-381.
50. Voss, H. U. Nonlinear dynamical system identification from uncertain and indirect measurements / H. U. Voss, J. Timmer // International Journal of Bifurcation and Chaos. -2004. -№6. -P. 1905-1933.