

# Ueber conjugirte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugirten Curve dritter Classe.

Von

OTTO SCHLESINGER in Zürich.

## Einleitung.

Die geometrische Beziehung, die zwischen einer Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $a_x^n = 0$  und einer solchen  $n^{\text{ter}}$  Classe  $u_a^n = 0$  stattfindet, wenn die simultane, bilineare Invariante derselben verschwindet, d. h. wenn die Curven zu einander conjugirt sind\*), ist für den Fall  $n = 2$  seit langer Zeit bekannt\*\*), dagegen für alle höheren Werthe von  $n$  bisher nicht festgestellt worden. Zwar liess sich aus dem Verhalten der Kegelschnitte vermuthen, welche Form etwa jene Relation zwischen den beiden Curven annehmen würde. Eine Curve  $2^{\text{ter}}$  Ordnung  $a_x^2 = 0$  ist nämlich, wie bekannt, zu einer Curve  $2^{\text{ter}}$  Classe  $u_a^2 = 0$  dann und nur dann conjugirt, wenn die erste unendlich viele Punkttupel  $yzt$  enthält von der Art, dass  $u_a^2$  sich linear aus den Quadraten von  $u_y, u_z, u_t$  zusammensetzen lässt, oder, was dasselbe ist, wenn auf  $a_x^2 = 0$  unendlich viele Polardreiecke von  $u_a^2 = 0$  liegen\*\*\*). Andererseits wusste man, dass wenn die Punkte  $y_1, y_2, \dots, y_p$  so beschaffen sind, dass  $u_a^n$  sich aus  $u_{y_1}^n, u_{y_2}^n, \dots, u_{y_p}^n$  linear zusammensetzen lässt ( $p$  solcher Punkte werden wir zweckmässig als Polar- $p$ -Eck von  $u_a^n = 0$  bezeichnen), jede Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, die durch  $y_1, y_2, \dots, y_p$  geht, zu  $u_a^n = 0$  conjugirt ist. Es liess sich nun vermuthen, dass auch umgekehrt jede zu  $u_a^n = 0$  conjugirte Curve gewisse Polar- $p$ -Ecke enthalten werde.

Im Folgenden zeige ich, dass dies im Falle  $n = 3$  in der That stattfindet, und zwar, dass wenn eine Curve 3. Ordnung zu einer Curve

\*) Rosanes, Crelles Journal, Bd. 76, p. 316.

\*\*) Hesse, Crelles Journal, Bd. 45, p. 87. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte 2. Aufl., p. 445. Rosanes, Math. Ann. Bd. 6. Smith, proceedings of the London Math. Society. vol. 2. Darboux, Bulletin des Sciences Mathématiques. t. I, sér. 1.

\*\*\*). Ein Polardreieck eines Kegelschnittes ist zugleich Polardreieck desselben; will man aber die Analogie mit höheren Curven aufrecht erhalten, so darf man, wie sich aus dem Folgenden ergibt, nur von Polardreiecken reden, sobald die Curve als Classencurve aufgefasst wird.

dritter Classe conjugirt ist, die erstere unendlich viele Polarfünfecke der letzteren enthält. Zu diesem Zweck gebe ich zunächst (§ 1) die Definition der Polar- $p$ -Ecke einer Curve  $n^{\text{ter}}$  Classe und leite gewisse einfache Eigenschaften derselben ab. Ein allgemeiner Satz über projectivische Erzeugung conjugirter Curven (§ 2), der auch an sich von einigem Interesse sein mag, giebt ein Mittel an die Hand, die erwähnten Polarfünfecke nicht nur nachzuweisen, sondern auch zu construiren (§ 3). Die bemerkenswerthe Art, wie diese Fünfecke über die Curve vertheilt sind, fordert eine besondere Untersuchung, die in § 4 erledigt wird. Den Schluss bildet eine kurze Bemerkung über andere Polar- $p$ -Ecke einer  $K^3$ , die in einer zu ihr conjugirten  $C^3$  enthalten sind.

### § 1.

**Definition der Polar- $p$ -Ecke einer Curve  $n^{\text{ter}}$  Classe und Ableitung ihrer einfachsten Eigenschaften.**

**Definition:** Unter einem Polar- $p$ -Eck ( $p \leq \frac{n(n+3)}{2}$ ) einer Curve  $n^{\text{ter}}$  Classe verstehe ich  $p$  Punkte von der Beschaffenheit, dass die linke Seite der Curvengleichung sich aus den  $n^{\text{ten}}$  Potenzen der den  $p$  Punkten entsprechenden linearen Formen linear zusammensetzen lässt.\*)

Sind also die Gleichungen der Curve und der  $p$  Punkte resp. dargestellt durch:

$$u^n = 0, u_{a_1} = 0, u_{a_2} = 0 \dots u_{a_p} = 0,$$

so lassen sich constante Grössen  $k_1 \dots k_p$  so finden, dass:

$$(1) \quad u^n \equiv \sum_{i=1}^{i=p} k_i u_{a_i}^n.$$

Die Definition hat nur für  $p \leq \frac{n(n+3)}{2}$  eine Bedeutung, da zwischen  $\frac{n(n+3)}{2} + 2$  oder mehr ternären Formen  $n^{\text{ter}}$  Classe stets eine lineare Identität stattfindet.

Ersetzt man die Grössen  $u_1 u_2 u_3$  in Gleichung (1) durch Symbole einer ternären Form  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, so folgt sogleich der Satz:

1. Jede Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, welche durch die  $p$  Punkte eines Polar- $p$ -Ecks einer  $K^n$  hindurchgeht, ist zu dieser  $K^n$  conjugirt.

\*) Cfr. Johnson, Quaterly Journal of pure and applied mathematics. February 1887, wo die Polar- $p$ -Ecke als „sich selbst conjugirte  $p$ -Ecke“ bezeichnet werden. Ich habe den ersten Ausdruck der Kürze halber vorgezogen.

Ueber die hier vielbenutzte Verwendung von Identitäten zwischen Potenzen linearer Formen vergl. man ausser den citirten Abhandlungen auch: Paul Serret, géométrie de direction.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

2. Haben  $p$  Punkte die Eigenschaft, dass  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - p$  independente durch sie hindurchgehende Curven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung zu einer  $K^n$  conjugirt sind, so bilden sie ein Polar- $p$ -Eck dieser Curve.

Da nämlich  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - p$  independenten Curven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung nur eine  $p$ -gliedrige Gruppe von conjugirten Curven  $n^{\text{ter}}$  Classe gegenübersteht,\*) anderseits uns  $(p+1)$  Curven bekannt sind, die dieser Gruppe angehören müssen, nämlich  $K^n(u_\alpha^n=0)$  und wenn  $\alpha, \alpha_2 \dots \alpha_p$  die  $p$  Punkte sind,  $u_{\alpha_1}^n=0, u_{\alpha_2}^n=0 \dots u_{\alpha_p}^n=0$  so folgt, dass zwischen diesen  $(p+1)$  Curven Dependenz stattfindet, d. h. es ist:

$$u_\alpha^n \equiv \sum_u^p k_i u_{\alpha_i}^n$$

was zu beweisen war.

Man beachte ferner den folgenden Satz:

3. Ein Polar- $p$ -Eck einer Curve bildet mit jedem Punkte der Ebene zusammen ein Polar- $(p+1)$ -Eck derselben, mit jedem Punktepaar zusammen ein Polar- $(p+2)$ -Eck etc.;

denn die Gleichung

$$u_\alpha^n \equiv \sum_u^p k_i u_{\alpha_i}^n$$

lässt sich auch schreiben:

$$u_\alpha^n \equiv \sum_1^p k_i u_{\alpha_i}^n + 0 \cdot u_y^n,$$

$$u_\alpha^n \equiv \sum_1^p k_i u_{\alpha_i}^n + 0 \cdot u_y^n + 0 \cdot u_z^n$$

wo  $y, z$  beliebige Punkte sind.

Ein Polar- $(p+1)$ -Eck kann also ein Polar- $p$ -Eck in sich enthalten; der  $(p+1)^{\text{te}}$  Punkt ist alsdann unwesentlich und kann durch jeden Punkt der Ebene ersetzt werden.

Da wir uns im Folgenden besonders mit den Polarfünfecken einer Curve dritter Classe beschäftigen werden, hierbei aber nach der eben gemachten Bemerkung auch die Polarvierecke eine Rolle spielen können, so betrachten wir noch einige geometrische Eigenschaften derselben.

a) Polarviereck. Aus der Definitionsgleichung

$$u_\alpha^3 \equiv \sum_1^4 k_i u_{\alpha_i}^3$$

\*) Rosanes l. c. p. 316.

folgt durch Polarisirung:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha) (\alpha_3 \alpha_4 \alpha) u_\alpha \equiv 0$$

d. h.  $\overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$  sind conjugirte Geradenpaare der Hesse'schen Curve von  $K^3 (u_\alpha^3 = 0)$ . Das Gleiche gilt für jedes Gegenseitenpaar unseres Viereckes\*). Es gehen also durch die vier Punkte 3 (zerfallende) apolare Curven\*\*) von  $K^3$ , jede Curve des durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  gehenden Büschels ist mithin zu  $K^3$  apolar. Es gilt aber auch umgekehrt der Satz:

4. Sind  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  die Schnittpunkte zweier zu  $K^3$  apolaren Curven 2<sup>ter</sup> Ordnung (die keinen weiteren Punkt gemeinsam haben) so ist  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  ein Polarviereck von  $K^3$ .

Denn sind  $a_x^2 = 0$ ,  $b_x^2 = 0$  die betreffenden apolaren Curven,  $v_x = 0$ ,  $w_x = 0$ ,  $t_x = 0$  beliebige Geraden, so sind die folgenden 6 durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  gehenden Curven 3. Ordnung

$$(2) \quad \begin{aligned} a_x^2 v_x &= 0, & b_x^2 v_x &= 0, \\ a_x^2 w_x &= 0, & b_x^2 w_x &= 0, \\ a_x^2 t_x &= 0, & b_x^2 t_x &= 0 \end{aligned}$$

zu  $K^3$  conjugirt. Die Curven (2) sind independent, weil sonst  $a_x^2 = 0$  und  $b_x^2 = 0$  eine ganze Gerade gemein haben müssten; es folgt mithin aus Satz 2., dass  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  ein Polarviereck von  $K^3$  constituiren.

b) Polarfünfeck. Ich bezeichne des bequemerem Ausdrucks halber als Geradenpaar eines Fünfecks irgend 2 Geraden, die 4 Punkte desselben enthalten. Den 5<sup>ten</sup> übrig bleibenden Punkt nenne ich Gegenecke des Geradenpaars. Zu jeder Ecke  $\alpha_i$  des Fünfecks  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$  gehören demnach 3 Geradenpaare, die  $\alpha_i$  zur Gegenecke haben.

Ist nun  $v$ ,  $w$  ein beliebiges Geradenpaar eines Polarfünfecks von  $K^3$ ,  $\alpha_q$  seine Gegenecke, so folgt aus unserer Definitionsgleichung:

$$u_\alpha^3 \equiv \sum_1^5 k_i u_{\alpha_i}^3$$

durch Polarisirung:

$$v_\alpha w_\alpha u_\alpha \equiv k_q v_{\alpha_q} w_{\alpha_q} u_{\alpha_q}$$

d. h.

5. In einem Polarfünfeck von  $K^3$  ist die Gegenecke jedes Geradenpaars  $v$ ,  $w$  zugleich die gemischte Polare von  $v$ ,  $w$  in Bezug auf  $K^3$ . oder auch:

In einem Polarfünfeck von  $K^3$  bildet ein Geradenpaar  $v$ ,  $w$  mit

\*) Rosanes l. c. p. 328.

\*\*) Ueber die Bedeutung dieser Bezeichnung cfr. Reye, Journal f. Math. Bd. 78. — Eine Zusammenstellung aller im Folgenden gebrachten, nicht allgemein bekannten Benennungen findet man: Math. Ann. Bd. 22, p. 522—524.

jeder durch die Gegenecke gehenden Geraden zusammen ein conjugirtes Dreieit von  $K^3$ .\*)

Wir wissen aus Satz 2, dass wenn durch  $\alpha_1 \dots \alpha_5$  fünf zu  $K^3$  conjugirte independente Curven gelegt werden können,  $\alpha_1 \dots \alpha_5$  ein Polarfünfeck von  $K^3$  ist. Indem wir die betreffenden Curven in specieller Weise wählen, können wir diese Thatsache anschaulicher darstellen. Ist nämlich allgemein  $l_{ik}(x) = 0$  die Verbindungslinie von  $\alpha_i$  und  $\alpha_k$  so ist für beliebiges  $\xi$ :

$$l_{13}(x) l_{45}(x) (\alpha_2 \xi x) = 0$$

eine der erwähnten Curven. Die Gerade  $l_{45}$  kommt auch in einem der zu  $\alpha_1$  gehörigen Geradenpaare vor, nämlich in  $l_{23} l_{45}$ ; ein anderes Geradenpaar, welches  $\alpha_1$  zur Gegenecke hat, ist  $l_{24} l_{35}$ . Wir haben dann für beliebig gewählte Punkte  $\eta \xi$  folgende durch  $\alpha_1 \dots \alpha_5$  gehende Curven 3. Ordnung

$$l_{13}(x) l_{45}(x) (\alpha_2 \xi x) = 0,$$

$$l_{23}(x) l_{45}(x) (\alpha_1 \eta x) = 0,$$

$$l_{23}(x) l_{45}(x) (\alpha_1 \xi x) = 0,$$

$$l_{24}(x) l_{35}(x) (\alpha_1 \eta x) = 0,$$

$$l_{24}(x) l_{35}(x) (\alpha_1 \xi x) = 0.$$

Diese Curven sind bei einem wirklichen Fünfeck nie dependent; andernfalls müsste es nämlich 2 bestimmte durch  $\alpha_1$  gehende Geraden  $v_x = 0$ ,  $w_x = 0$  derart geben, dass:

$$0 \equiv l_{13}(x) l_{45}(x) (\alpha_2 \xi x) + l_{23}(x) l_{45}(x) v_x + l_{24}(x) l_{35}(x) w_x.$$

Für alle Punkte von  $l_{45}$  müsste also eine der Gleichungen:

$$l_{24}(x) = 0, \quad l_{35}(x) = 0, \quad w_x = 0$$

stattfinden, d. h. es müssten  $\alpha_2 \alpha_4 \alpha_5$  oder  $\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$  oder  $\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5$  in gerader Linie liegen. Schliessen wir dies aus und bemerken, dass die Hervorhebung von  $\alpha_1 \alpha_2$  ganz unwesentlich war, so folgt:

6. Wenn in einem Fünfeck, in welchem niemals 3 Punkte auf derselben Geraden liegen, die 3 zu  $\alpha_i$  gehörigen Geradenpaare mit jeder durch  $\alpha_i$  gehenden Geraden zusammen ein conjugirtes Dreieit von  $K^3$  bilden und ein anderes Geradenpaar mit einer durch seine Gegenecke gehenden Geraden ein ebensolches Dreieit bildet, so ist das Fünfeck ein Polarfünfeck von  $K^3$ .

Legen wir durch die Punkte eines Polarfünfecks die eine durchgehende Curve 2<sup>ter</sup> Ordnung, so bildet diese nach Satz 1 mit jeder Geraden zusammen eine zu  $K^3$  conjugirte Curve 3<sup>ter</sup> Ordnung und es folgt mithin:

7. Die einem Polarfünfeck von  $K^3$  umschriebene Curve 2. Ordnung ist zu  $K^3$  apolar.

\*) Cfr. Johnson l. c.

## § 2.

## Ueber projectivische Erzeugung conjugirter Curven.

Wenn eine Curve  $(n+m)^{\text{ter}}$  Classe  $K^{n+m}$  und 2 Curvenbüschel resp. von der  $n^{\text{ten}}$  und  $m^{\text{ten}}$  Ordnung gegeben sind, so liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, ob und wie man die Büschel projectivisch so zuordnen kann, dass sie eine zu  $K^{n+m}$  conjugirte Curve erzeugen. Diese Frage wird durch einen einfachen Satz beantwortet, von dem ich späterhin Gebrauch machen werde und dessen Beweis daher nebst einigen nothwendigen Vorbemerkungen hier eine Stelle finden soll.

Eine projectivische Beziehung oder, wie ich kurz sagen will, eine Homographie zwischen 2 binären Gebieten mit den Variablen  $(\lambda_1, \lambda_2)$   $(\mu_1, \mu_2)$  wird bekanntlich\*) durch eine bilineare Gleichung zwischen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\mu_1, \mu_2$  defnirt. Zwei Homographien zwischen denselben Gebieten:

$$R \equiv r_{11}\lambda_1\mu_1 + r_{12}\lambda_1\mu_2 + r_{21}\lambda_2\mu_1 + r_{22}\lambda_2\mu_2 = 0,$$

$$S \equiv s_{11}\lambda_1\mu_1 + s_{12}\lambda_1\mu_2 + s_{21}\lambda_2\mu_1 + s_{22}\lambda_2\mu_2 = 0$$

nennt man zu *einander conjugirt*,\*\*) wenn die bilineare Invariante derselben Null ist, d. h. wenn die Gleichung gilt:

$$(3) \quad r_{11}s_{22} - r_{12}s_{21} - r_{21}s_{12} + r_{22}s_{11} = 0.$$

Man beweist leicht den Satz:\*\*\*)

8. *Zwei Homographien sind dann und nur dann conjugirt, wenn diejenigen Elementenpaare der einen Variablenreihe, welchen je dasselbe Element der andern Variablenreihe in den beiden Homographien zugehört, eine Involution bilden.*

Wenn nämlich dem Element  $\lambda$  innerhalb  $R$  das Element  $\mu$ , innerhalb  $S$  dagegen das Element  $\mu'$  zugehört, so ist:

$$\lambda_1(r_{11}\mu_1 + r_{12}\mu_2) + \lambda_2(r_{21}\mu_1 + r_{22}\mu_2) = 0,$$

$$\lambda_1(s_{11}\mu'_1 + s_{12}\mu'_2) + \lambda_2(s_{21}\mu'_1 + s_{22}\mu'_2) = 0.$$

Mithin giebt die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} r_{11}\mu_1 + r_{12}\mu_2 & r_{21}\mu_2 + r_{22}\mu_2 \\ s_{11}\mu'_1 + s_{12}\mu'_2 & s_{21}\mu'_1 + s_{22}\mu'_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} r_{11} & r_{21} \\ s_{11} & s_{21} \end{vmatrix} \mu_1\mu'_1 + \begin{vmatrix} r_{11} & r_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} \mu_1\mu'_2 + \begin{vmatrix} r_{12} & r_{22} \\ s_{11} & s_{21} \end{vmatrix} \mu_2\mu'_1 + \begin{vmatrix} r_{12} & r_{22} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} \mu_2\mu'_2 \end{aligned}$$

diejenige Beziehung, die zwischen 2 Elementen  $(\mu_1, \mu_2)$   $(\mu'_1, \mu'_2)$  bestehen muss, damit  $\mu$  durch die Homographie  $R$  demselben Element zugeordnet

\*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen p. 66.

\*\*) Rosanes, Crelles Journal. Bd. 90, p. 312. Stephanos, Math. Ann. Bd. 22, p. 304.

\*\*\*) Rosanes l. c. Pasch, Math. Ann. Bd. 23.

werden soll, wie  $\mu'$  durch die Homographie  $S$ . Diese Relation zwischen  $\mu$   $\mu'$  ist eine Homographie zwischen 2 *aufeinanderliegenden* binären Gebieten und ist dann und nur dann eine Involution, wenn:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{22} \\ s_{11} & s_{21} \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung ist aber mit (3) identisch q. e. d.

Durch diesen Satz ist die Construction conjugirter Homographien auf die bekannte Construction involutorischer Punktreihen zurückgeführt.

Wenn eine bilineare Form in das Product einer linearen Form in  $\lambda$  und einer ebensolchen in  $\mu$  zerfällt; d. h. wenn sie die Gestalt  $(\lambda_1 \Lambda_2 - \lambda_2 \Lambda_1) (\mu_1 M_2 - \mu_2 M_1)$  annimmt, so heisst die Form selbst, sowie die dadurch definirte Homographie eine *specielle*\*) und man sagt alsdann, die specielle Homographie bestehe aus den beiden Elementen  $\Lambda$ ,  $M$ . Aus Gleichung (3) folgt aber sofort\*\*)

9. Eine specielle Homographie  $(\lambda \Lambda) (\mu M) = 0$  ist zu einer Homographie  $R$  dann und nur dann conjugirt, wenn die beiden Elemente  $\Lambda$ ,  $M$  der speciellen Homographie ein Nullpaar von  $R$  bilden.

Haben wir nun die beiden Curvenbüschel:

$$(4) \quad \begin{aligned} \lambda_1 a_{1x}^n + \lambda_2 a_{2x}^n &= 0, \\ \mu_1 b_{1x}^m + \mu_2 b_{2x}^m &= 0, \end{aligned}$$

so bilden die Parameter  $\lambda$  ein binäres Gebiet und die Parameter  $\mu$  ein zweites. Werden nun diese beiden Gebiete und damit die beiden Curvenbüschel projectivisch auf einander bezogen durch die Homographie:

$$(5) \quad 0 = r_{11} \lambda_1 \mu_1 + r_{12} \lambda_1 \mu_2 + r_{21} \lambda_2 \mu_1 + r_{22} \lambda_2 \mu_2,$$

so erhält man das Erzeugniss der beiden so zugeordneten Curvenbüschel, d. h. den Ort der Schnittpunkte entsprechender Curven, indem man  $\lambda$ ,  $\mu$  aus den Gleichungen (4) und (5) eliminirt. Es ergibt sich als Gleichung des Ortes;

$$(6) \quad r_{11} a_{2x}^n b_{2x}^m - r_{12} a_{2x}^n b_{1x}^m - r_{21} a_{1x}^n b_{2x}^m + r_{22} a_{1x}^n b_{1x}^m = 0.$$

Soll nun die so erzeugte Curve zu der Curve  $(n+m)^{\text{ter}}$  Classe

$$u_a^{n+m} = 0$$

conjugirt sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$0 = r_1 a_{2a}^n b_{2a}^m - r_{12} a_{2a}^n b_{1a}^m - r_{21} a_{1a}^n b_{2a}^m + r_{22} a_{1a}^n b_{1a}^m.$$

Diese Gleichung ist aber nach (3) ganz gleichbedeutend mit der That-  
sache, dass die beiden Homographien:

\*) Rosanes, Crelles Journal Bd. 88, p. 269. Stephanos, l. c.

\*\*) Stephanos, l. c.

$$0 = r_{11} \lambda_1 \mu_1 + r_{12} \lambda_1 \mu_2 + r_{21} \lambda_2 \mu_1 + r_{22} \lambda_2 \mu_2,$$

$$0 = a_{1\alpha}^n b_{1\alpha}^m \lambda_1 \mu_1 + a_{1\alpha}^n b_{2\alpha}^m \lambda_1 \mu_2 + a_{2\alpha}^n b_{1\alpha}^m \lambda_2 \mu_1 + a_{2\alpha}^n b_{2\alpha}^m \lambda_2 \mu_2 \\ = (\lambda_1 a_{1\alpha}^n + \lambda_2 a_{2\alpha}^n) (\mu_1 b_{1\alpha}^m + \mu_2 b_{2\alpha}^m)$$

zu einander conjugirt sind. Die erste Homographie ist die gegebene. Die zweite Gleichung sagt aus, dass das Product

$$(\lambda_1 a_{1\alpha}^n + \lambda_2 a_{2\alpha}^n) (\mu_1 b_{1\alpha}^m + \mu_2 b_{2\alpha}^m)$$

zu  $u_\alpha^{n+m} = 0$  conjugirt ist. Sie ordnet also immer 2 Curven der beiden Büschel einander zu, deren Product eine zu  $u_\alpha^{n+m}$  conjugirte Curve vorstellt. Um nun das erhaltene Resultat einfacher aussprechen zu können, gebe ich folgende

*Definition.* Liegen 2 Büschel von Curven resp.  $n^{\text{ter}}$  und  $m^{\text{ter}}$  Ordnung, und eine Curve  $(n+m)^{\text{ter}}$  Classe  $K$  vor, so giebt es stets eine ganz bestimmte Homographie, welche diejenigen Curven der beiden Büschel entsprechend setzt, die zusammen eine zu  $K$  conjugirte Curve liefern. Diese Homographie nenne ich die polare Homographie der beiden Büschel in Bezug auf  $K$ .

Mit Hülfe dieser Bezeichnung ergibt sich nun sofort der Satz:

10. Eine Curve, welche durch projectivische Zuordnung zweier Büschel  $n^{\text{ter}}$  und  $m^{\text{ter}}$  Ordnung entstanden ist, ist dann und nur dann zu einer Curve  $(n+m)^{\text{ter}}$  Classe  $K$  conjugirt, wenn die erzeugende Homographie zu der polaren Homographie der beiden Büschel in Bezug auf  $K$  conjugirt ist.\*)

Es kann vorkommen, dass eine bestimmte Curve  $\Lambda_1 a_{1\alpha}^n + \Lambda_2 a_{2\alpha}^n = 0$  des ersten Büschels mit jeder Curve des zweiten zusammen eine conjugirte Curve von  $K$  bildet. Alsdann wird die polare Homographie für  $\lambda_i = \Lambda_i$  und beliebiges  $\mu$  erfüllt und die linke Seite ihrer Gleichung ist durch  $(\lambda_1 \Lambda_2 - \lambda_2 \Lambda_1)$  theilbar. Da der Quotient nur die Form  $(\mu_1 M_2 - \mu_2 M_1)$  haben kann, so folgt: die polare Homographie ist in diesem Falle eine specielle und es giebt eine bestimmte Curve

$$M_1 b_{1\alpha}^m + M_2 b_{2\alpha}^m = 0$$

des zweiten Büschels, die mit jeder Curve des ersten zusammen eine zu  $K$  conjugirte Curve liefert. Soll nun das Erzeugniss der beiden Büschel zu  $K$  conjugirt sein, so muss die erzeugende Homographie zu der speciellen  $(\lambda \Lambda) (\mu M) = 0$  conjugirt sein und muss also nach Satz 9,  $\Lambda M$  zu entsprechenden Elementen haben. Es folgt mithin:

10a. Wenn die polare Homographie der beiden Curvenbüschel  $n^{\text{ter}}$  und  $m^{\text{ter}}$  Ordnung in Bezug auf  $K^{n+m}$  eine specielle ist, die aus den Curven  $C^* \mathfrak{C}^m$  besteht, so liefert eine projectivische Zuordnung der

\*) Aus diesem Theorem ergeben sich leicht die Sätze, die ich in meiner Dissertation (§ 7) angegeben habe; cfr. Math. Annalen, Bd. 22, p. 550.



Büschel dann und nur dann eine zu  $K^{n+m}$  conjugirte Curve, wenn  $C^m$  einander entsprechen.

Es kann weiterhin der Fall eintreten, dass die polare Beziehung der beiden Büschel identisch verschwindet, was geometrisch sich dadurch zu erkennen giebt, dass jede Curve des einen Büschels mit jeder Curve des anderen zusammen eine conjugirte Curve von  $K$  liefert. Zu einer identisch verschwindenden bilinearen Form ist aber jede andere conjugirt; es folgt also, was auch leicht direct eingesehen werden kann:

10b. Wenn die beiden Curvenbüschel  $n^{ter}$  und  $m^{ter}$  Ordnung so beschaffen sind, dass jede Curve des einen mit jeder Curve des anderen zusammen eine zu  $K^{n+m}$  conjugirte Curve bildet, so erzeugen sie in jeder Zuordnung eine zu  $K$  conjugirte Curve.

Der Satz 10a gestattet den Beweis des folgenden Theorems, von dem ich später gleichfalls Gebrauch machen werde:

11. Ist eine Curve dritter Ordnung  $C^3$  zu einer Curve dritter Classe  $K^3$  conjugirt und legt man durch zwei Punkte  $\pi_1, \pi_2$  von  $C^3$  die eine durchgehende zu  $K^3$  apolare Curve zweiter Ordnung, welche  $C^3$  noch in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  schneiden möge, so haben alle Curven zweiter Ordnung durch diese 4 Punkte in Bezug auf  $K^3$  denselben Polarpunkt  $z^*)$  und dieser liegt auf  $\pi_1 \pi_2$ .

Beweis: Ist  $a_x^2 = 0$  der durch  $\pi_1, \pi_2$  gelegte apolare Kegelschnitt,  $b_x^2 = 0$  irgend eine andere durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  gehende  $C^2$ , so hat eine beliebige Curve des Büschels  $a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0$  in Bezug auf  $K^3$  den von  $\lambda$  unabhängigen Polarpunkt  $u_x \equiv a_x^2 u_\alpha + \lambda b_x^2 u_\alpha \equiv \lambda b_x^2 u_\alpha = 0$ . Nun sei  $\pi$  der dritte Schnittpunkt von  $\pi_1, \pi_2$  und  $C^3$ . Wir bestimmen die polare Homographie zweier Büschel in Bezug auf  $K^3$ , nämlich des durch  $\pi$  gehenden Geradenbüschels und des durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  gehenden Büschels von Curven 2. Ordnung. Die Curve  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \pi_1, \pi_2)$  bildet als apolare Curve von  $K^3$  mit jeder Geraden des Büschels  $\pi$  zusammen eine zu  $K^3$  conjugirte Curve; anderseits liefert die Gerade  $\pi z$ , da sie durch den gemeinschaftlichen Polarpunkt aller Curven des Büschels geht, mit jeder Curve desselben zusammen eine conjugirte Curve von  $K^3$ . Die gesuchte Homographie ist also eine specielle und besteht aus den Elementen  $\pi z, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \pi_1, \pi_2)$ . Jede Zuordnung der beiden Büschel, die eine zu  $K^3$  conjugirte Curve erzeugen soll, muss nach Satz 10a diese beiden Elemente entsprechend setzen. Da aber  $C^3$  selbst aus den beiden Büscheln projectivisch erzeugt werden kann und in der  $C^3$  erzeugenden Homographie der Curve  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \pi_1, \pi_2)$  die Gerade  $\pi_1 \pi_2$  entspricht, so muss, da  $C^3$  nach Vor. zu  $K^3$  conjugirt ist,  $\pi z$  mit  $\pi_1 \pi_2$  identisch sein, d. h.  $z$  auf  $\pi_1 \pi_2$  liegen, wie behauptet wurde.

\*) Polarpunkt von  $a_x^2 = 0$  in Bezug auf  $u_\alpha^3 = 0$  ist  $a_\alpha^2 u_\alpha = 0$  im Sinne von Reye. l. c. cfr. die obige Anmerkung.

## § 3.

**Nachweis und Construction der Polarfünfecke einer Curve dritter Classe, die auf einer zu ihr conjugirten Curve dritter Ordnung liegen.**

Wir nehmen nunmehr eine Curve dritter Ordnung  $C^3$  und eine Curve dritter Classe  $K^3$ , welche zu einander conjugirt sind, als gegeben an und stellen uns die Aufgabe, die Polar- $p$ -Ecke von  $K^3$  mit möglichst geringer Eckenzahl aufzusuchen, die etwa auf der  $C^3$  gelegen sind. Im Allgemeinen wird sich kein Polarviereck von  $K^3$  auf  $C^3$  vorfinden, denn es lassen sich bei allgemeiner Beschaffenheit von  $K^3$  leicht Curven angeben, die, trotzdem sie zu  $K^3$  conjugirt sind, kein solches Viereck enthalten. Sind nämlich  $a_x^2=0$ ,  $b_x^2=0$ ,  $c_x^2=0$  drei independente apolare Curven von  $K^3$ ,  $v_x=0$ ,  $w_x=0$ ,  $t_x=0$  ganz beliebige nicht durch denselben Punkt gehende Geraden, so ist

$$(7) \quad v_x a_x^2 + w_x b_x^2 + t_x c_x^2 = 0$$

die Gleichung einer  $C^3$ , die offenbar zu  $K^3$  conjugirt ist. Würde diese nun ein Polarviereck  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  enthalten und wären  $P_x^2=0$ ,  $Q_x^2=0$  zwei durch die vier Punkte gehende Curven, die also zu  $K^3$  apolar sind, so müssten sich unsere  $C^3$  auch in der Form darstellen lassen:

$$p_x P_x^2 + q_x Q_x^2 = 0$$

d. h. es müsste nach (7) die Gleichung gelten

$$(8) \quad \varepsilon(v_x a_x^2 + w_x b_x^2 + t_x c_x^2) \equiv p_x P_x^2 + q_x Q_x^2.$$

Da aber  $P_x^2=0$ ,  $Q_x^2=0$  apolar sind, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} P_x^2 &\equiv \varrho a_x^2 + \sigma b_x^2 + \tau c_x^2, \\ Q_x^2 &\equiv \varrho' a_x^2 + \sigma' b_x^2 + \tau' c_x^2 \end{aligned}$$

und so resultirt aus (8)

$$\begin{aligned} (\varepsilon v_x + \varrho p_x + \varrho' q_x) a_x^2 + (\varepsilon w_x + \sigma p_x + \sigma' q_x) b_x^2 \\ + (\varepsilon t_x + \tau p_x + \tau' q_x) c_x^2 \equiv 0 \end{aligned}$$

d. h. es lassen sich lineare Functionen  $V_x W_x T_x$  so finden, dass:

$$(9) \quad V_x a_x^2 + W_x b_x^2 + T_x c_x^2 \equiv 0;$$

oder zwischen den Curven

$$\begin{aligned} (10) \quad &a_x^2 x_1 = 0, \quad b_x^2 x_1 = 0, \quad c_x^2 x_1 = 0, \\ &a_x^2 x_2 = 0, \quad b_x^2 x_2 = 0, \quad c_x^2 x_2 = 0, \\ &a_x^2 x_3 = 0, \quad b_x^2 x_3 = 0, \quad c_x^2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

besteht eine lineare Dependenz. Es giebt daher eine zweigliedrige Gruppe von Curven dritter Classe, die zu *allen* Curven (10) conjugirt sind. Jede Curve dieser Eigenschaft hat aber  $a_x^2=0$ ,  $b_x^2=0$ ,  $c_x^2=0$  zu apolaren Curven; es müsste also *unendlich viele* Curven geben, die *dasselbe* Netz apolarer Curven besitzen, wie  $K^3$ . Schon der Umstand, dass alle

diese unendlich vielen Curven auch dieselbe Hesse'sche Curve besitzen müssten, lehrt, dass dies nur bei specieller Beschaffenheit von  $K^3$  eintreten kann.

Mithin stellt bei allgemeiner Beschaffenheit von  $K^3$  (7) eine Curve dar, die kein Polarviereck von  $K^3$  enthält und wir sehen, dass die Thatsache, dass  $C^3$  und  $K^3$  conjugirt sind, nicht erfordert, dass  $C^3$  ein Polarviereck von  $K^3$  enthält.

Da überdies in den Fällen, in denen ein Polarviereck  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  von  $K^3$  auf  $C^3$  enthalten ist, unendlich viele Polarfünfecke von selbst dadurch gegeben sind, dass jeder Punkt mit  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  zusammen ein Polarfünfeck liefert (Satz 3),\*) so können wir nunmehr von den zu betrachtenden Curven ein für allemal voraussetzen, dass  $C^3$  kein Polarviereck von  $K^3$  enthält. Diese Festsetzung schliesst besonders zwei Fälle aus:

1) dass die Curve  $C^3$  aus einem apolaren Kegelschnitt von  $K^3$  und einer Geraden besteht; denn in diesem Falle giebt es auf dem Kegelschnitt unendlich viele Polarvierecke, da jeder andere apolare Kegelschnitt ihn in vier Punkten dieser Art schneidet (cfr. Satz 4).

2) dass die Curve  $K^3$  aus drei Punkten derselben Geraden besteht.

Wenn nämlich  $K^3$  in drei Punkte  $\xi, \eta, \zeta$  derselben Geraden  $v$  zerfällt, so lässt sich die Curve als cubische Form des binären Gebietes ( $v$ ) auffassen und es giebt alsdann auf  $v$  eine dreigliedrige Gruppe von zu  $(\xi \eta \zeta)$  conjugirten Punkttripeln. Eine Curve 3. Ordnung  $C^3$  ist aber zu  $K^3(u_\xi u_\eta u_\zeta = 0)$  dann und nur dann conjugirt, wenn sie  $v$  in einem zu  $\xi \eta \zeta$  conjugirten Tripel  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$  schneidet. Wegen der Beziehung von  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$  und  $\xi \eta \zeta$  lässt sich  $u_{\xi_1} u_{\eta_1} u_{\zeta_1}$  aus den Cuben von  $u_\xi, u_\eta, u_\zeta$  zusammensetzen, wie aus der Theorie der binären Formen bekannt. Daraus folgt, dass  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$  ein auf  $C^3$  gelegenes Polar-dreieck von  $K^3$  ist, mithin sind nach Satz 3 unendlich viele Polarvierecke von  $K^3$  auf  $C^3$  von vornherein gegeben.

Durch die Ausschliessung des letzten Falles erlangen wir für unsere Untersuchung noch einen besonderen Vortheil. Die zu einer  $K^3$  apolaren Curven 2. Ordnung lassen sich bekanntlich auch als Kegelschnitte definiren, die zu *allen* ersten Polaren von  $K^3$  conjugirt sind. Im Allgemeinen bilden sie daher eine dreigliedrige Gruppe und sie können nur dann eine viergliedrige formiren, wenn die Polaren von  $K^3$  ( $u_a^3 = 0$ ) eine zweigliedrige bilden; d. h. wenn zwischen

$$u_a^2 \alpha_1 = 0,$$

$$u_a^2 \alpha_2 = 0,$$

$$u_a^2 \alpha_3 = 0$$

---

\*) Damit soll nicht gesagt sein, dass dies die einzigen auf solchen Curven liegenden Polarfünfecke sind.

eine lineare Identität besteht. In diesem Fall gäbe es aber ein  $v$ , für welches

$$v_\alpha u_\alpha^2 \equiv 0$$

d. h.  $u_\alpha^3$  bestünde aus drei in derselben Geraden  $v$  liegenden Punkten. Da dies ausgeschlossen, so bilden die apolaren Curven der zu betrachtenden  $K^3$  immer eine dreigliedrige Gruppe.

Ich behaupte nunmehr:

12. Durch jeden Punkt  $\pi$  unserer  $C^3$  lässt sich eine zu  $K^3$  apolare Curve 2. Ordnung legen, deren fünf weitere Schnittpunkte mit  $C^3$  ein Polarfünfeck von  $K^3$  bilden.

Ich führe den Beweis durch directe Construction der betreffenden Curve: durch den Punkt  $\pi$  geht ein Büschel von zu  $K^3$  apolaren Curven, welches im Allgemeinen nur drei zerfallende Curven besitzt; unter speciellen Verhältnissen kann jedoch der Fall eintreten, dass jede durch  $\pi$  gehende Gerade ganz in einer apolaren Curve enthalten ist. Dieser Fall soll zunächst ausgeschlossen und unten behandelt werden.

Ist nun  $g$  eine Gerade durch  $\pi$ , die keiner Curve des erwähnten Büschels angehört, und schneidet sie  $C^3$  noch in  $\pi_1 \pi_2$ , so lege man durch diese Punkte die eine durchgehende apolare Curve (mehr als eine giebt es nicht, weil sonst  $g$  selbst Theil einer apolaren Curve sein müsste, was ausgeschlossen); diese schneide  $C^3$  noch in  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ . Alle Curven des durch diese vier Punkte gehenden Kegelschnittbüschels haben nach Satz 11 in Bezug auf  $K^3$  denselben bestimmten Polarpunkt  $z$ , der auf  $g$  liegt. (Der Fall, dass jeder Punkt als Polarpunkt betrachtet werden könnte, kann nicht eintreten, weil sonst  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  ein Polarviereck von  $K^3$  wäre). Ich lege nun durch  $\pi$  und  $z$  die eine durchgehende apolare Curve  $\mathfrak{C}^2$  (es giebt nur eine aus demselben Grunde, wie oben) und behaupte, dass ihre fünf weiteren Schnittpunkte  $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  mit  $C^3$  ein Polarfünfeck von  $K^3$  liefern.

Beweis: Da der Punkt  $\pi$  und die Punktgruppe  $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  Reste\*) zu einander sind,  $\pi$  beigeordneter Rest\*) von  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  ist, so sind auch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ,  $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  Reste und bilden also zusammen die Grundpunkte eines Curvenbüschels 3. Ordnung. Nun gilt bekanntlich der Satz:\*\*)

„Wenn  $\alpha_1 \dots \alpha_9$  Grundpunkte eines Curvenbüschels 3. Ordnung sind und man legt durch fünf von ihnen z. B.  $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  einen Kegelschnitt, so ist jeder Punkt  $z$  desselben beigeordneter Rest (gegenüberliegender Punkt) der vier übrigen Punkte auf derjenigen Curve des Büschels, die durch  $z$  geht.“

\*) Im Sinne Sylvesters cfr. Salmon-Fiedler, höhere ebene Curven. Erste Aufl. Art. 159, p. 164.

\*\*) Plücker, algebraische Curven, p. 56. cfr. Durège, Curven 3. O., p. 158.

In unserem Falle wird der erwähnte Kegelschnitt durch  $\mathfrak{C}^2$  geliefert und wir erkennen, dass auch unser oben construirter Punkt  $s$  gegenüberliegender Punkt von  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  auf der durch  $s$  gehenden Curve  $C_1^3$  des Büschels ist. Das heisst aber bekanntlich nichts anderes, als dass  $C_1^3$  projectivisch erzeugt werden kann aus dem Geradenbüschel durch  $s$  und dem Curvenbüschel durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ . Da aber nach der Construction von  $s$  jede Gerade des ersten Büschels mit jeder Curve des zweiten zusammen eine zu  $K^3$  conjugirte Curve liefert, so folgt aus Satz 10b, dass die Büschel, wie sie auch immer zugeordnet werden, stets conjugirte Curven von  $K^3$  erzeugen. Es ist also auch  $C_1^3$  eine zu  $K^3$  conjugirte Curve. Es gehen mithin, wenn  $v_x = 0$ ,  $w_x = 0$ ,  $t_x = 0$  drei beliebige independente Geraden sind, durch  $\alpha_3 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  folgende zu  $K^3$  conjugirte Curven

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{C}^2 v & \mathfrak{C}^2 w & \mathfrak{C}^2 t, \\ C^3 & C_1^3 & \end{array}$$

Wenn diese Curven independent sind, so folgt nach Satz 2 sofort, dass  $\alpha_3 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  ein Polarfünfeck von  $K^3$  ist, wie zu zeigen war.

Nun würde eine Dependenz der Curven (11) offenbar aussagen, dass das Büschel mit den Grundpunkten  $\alpha_1 \dots \alpha_9$  eine Curve enthält, die aus  $\mathfrak{C}^2$  und einer Geraden  $l$  besteht. Von den Punkten  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  müsste mithin einer, etwa  $\alpha_4$  in  $\pi$  hineinfallen, die andern  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  auf  $l$  liegen. Es waren aber  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  die weiteren Schnittpunkte der durch  $\pi, \pi_2$  gehenden apolaren Curve und diese müsste mithin da  $\alpha_4 = \pi$  die Gerade  $\pi_1 \pi_2 = g$  enthalten, von der aber vorausgesetzt war, dass sie nicht Bestandtheil einer apolaren Curve ist. Daher kann eine Dependenz der Curven (11) nicht stattfinden und unser Satz ist vollständig erwiesen.

Zu jedem Punkt  $\pi$  gehört also (von dem noch zu betrachtenden Ausnahmefall abgesehen) eine ganz bestimmte auf obige Weise zu construierende Curve, die wir als  $C_\pi$  oder als die zu  $\pi$  gehörige Fünfeckscurve zweiter Ordnung bezeichnen wollen.

Es gilt aber auch der Satz:

13. Ist  $\alpha_3 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  ein Polarfünfeck von  $K^3$ , das ganz auf  $\mathfrak{C}^3$  liegt, und ist  $\pi$  der sechste Schnittpunkt der durchgehenden (apolaren) Curve zweiter Ordnung  $\mathfrak{C}^2$ , so ist diese Curve identisch mit  $C_\pi$ .

Auch hier schliessen wir einstweilen den Fall aus, dass jede durch  $\pi$  gehende Gerade Theil einer apolaren Curve ist. Dann sei  $s$  ein Punkt der  $\mathfrak{C}^2$ , der weder auf einer zerfallenden durch  $\pi$  gehenden apolaren Curve, noch auf  $C^3$  liegt. Es seien, wie oben,  $\pi_1 \pi_2$  die weiteren Schnittpunkte von  $\pi s$  mit  $C^3$ ,  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  die fernerer Schnittpunkte der durch  $\pi_1 \pi_2$  gelegten apolaren Curve,  $s'$  der auf  $\pi s$  liegende gemeinschaftliche Polarpunkt der durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  gehenden  $\mathfrak{C}^2$  in Bezug

auf  $K$ . Wir nehmen an, dass  $z'$  von  $z$  verschieden ist und zeigen, dass dies auf einen Widerspruch führt. Es bilden nämlich aus demselben Grunde, wie oben,  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  die Grundpunkte eines Curvenbüschels 3. Ordnung und jede Curve desselben ist, da sie durch  $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  geht, nach Satz 1 zu  $K^3$  conjugirt. Ist  $C_1^3$  die durch  $z$  gehende Curve des Büschels, so ist nach dem oben citirten Satz auf  $C_1^3$  der Punkt  $z$  gegenüberliegender Punkt von  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  und es müssen sich also die Büschel ( $z$ ) und  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$  so zuordnen lassen, dass eine Curve (nämlich  $C_1^3$ ) erzeugt wird, die durch  $\alpha_5 \dots \alpha_9$  geht und mithin zu  $K^3$  conjugirt ist.

Wir suchen die polare Homographie der beiden Büschel in Bezug auf  $K^3$ . Der Kegelschnitt  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \pi_1 \pi_2)$  bildet mit jeder Geraden durch  $z$  eine conjugirte Curve; die Gerade  $zz'$  ist (falls nicht  $z = z'$ , was nach Vor. ausgeschlossen) die *einzige* Gerade durch  $z$ , die mit jeder Curve durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  zusammen eine conjugirte Curve von  $K^3$  vorstellt. Die polare Homographie ist also eine specielle, bestehend aus den beiden Elementen  $\overline{zz'} = \overline{\pi_1 \pi_2}$  und  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \pi_1 \pi_2)$ .

Nach dem Obengesagten und nach Satz 10a muss die erzeugende Homographie von  $C_1^3$  diese beiden Elemente entsprechend setzen, d. h. die Schnittpunkte  $\pi_1 \pi_2$  der beiden Elemente müssen Punkte von  $C_1^3$  sein. Dann hat aber diese Curve mit  $C^3$  die 11 Punkte  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_9 \pi_1 \pi_2$  gemein und ist also mit ihr identisch;\* da aber  $C_1^3$  durch  $z$  geht, welcher Punkt nicht auf  $C^3$  liegt, so giebt dies einen Widerspruch. Unsere Annahme, dass  $z$  von  $z'$  verschieden, ist also falsch, d. h.  $\mathcal{C}^2$  ist identisch mit  $C_\pi$ , q. e. d.

Aus den Sätzen (11) und (13) folgt also: durch jeden Punkt  $\pi$  geht eine Curve zweiter Ordnung, deren fünf weitere Schnittpunkte ein Polarfünfeck bilden und keine andere.

Es bleibt nur noch übrig, die ausgeschlossenen Fälle zu betrachten. Wir gehen dabei von folgendem Satze aus, der leicht zu bestätigen ist:

„Wenn ein Büschel von  $C^2$ , dessen einer Grundpunkt  $\pi$  ist, die Eigenschaft hat, dass jede durch  $\pi$  gehende Gerade einer Curve desselben angehört, so besteht das Büschel

entweder a) aus einer festen Geraden  $w$  und dem Strahlbüschel durch  $\pi$

oder b) aus den Geradenpaaren einer Strahleninvolution mit dem Centrum  $\pi$ .“

In unserem Falle gilt dies von dem Büschel der durch  $\pi$  gehenden

---

\*) Denn andernfalls mussten die 11 Punkte einem Kegelschnitte angehören, der ein Theil von  $C^3$  und, da er durch  $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$  geht, zu  $K^3$  apolar wäre.  $C^3$  bestände alsdann aus einem apolaren Kegelschnitt von  $K^3$  und einer Geraden, was nach Seite 463 ausgeschlossen ist.

apolaren Curven von  $K^3$ . Wir betrachten die beiden Fälle der Reihe nach:

a) Die Gerade  $w$  bildet mit *jeder* Geraden  $p$  durch  $\pi$  eine apolare Curve von  $K(u_a^3=0)$ , d. h. es ist:

$$w_a p_a u_a \equiv 0.$$

Die erste Polare von  $w$  in Bezug auf  $K$  besteht also aus einem Punktepaar der Geraden  $p$ ; da aber dasselbe von *jeder* durch  $\pi$  gehenden Geraden  $p$  gesagt werden kann, so ist die erste Polare von  $w$  der doppeltgezählte Punkt  $\pi$ . Es ist mithin:

$$w_a u_a^2 \equiv \rho u_\pi^2$$

und daraus folgt erstens, dass *alle* apolaren Curven durch  $\pi$  gehen und zweitens, dass jede durch  $\pi$  gehende Curve zweiter Ordnung mit  $w$  zusammen zu  $K$  conjugirt ist. Schneidet  $w$  die Curve  $C^3$  noch in  $\xi\eta\zeta$ , so gehen, wenn  $C_1^2 C_2^2 \dots C_5^2$  fünf independente durch  $\pi$  gehende Curven sind, durch  $\xi\eta\zeta\pi$  folgende 6 zu  $K^3$  conjugirte Curven:

$$w C_1^2 w C_2^2 \dots w C_5^2, C^3.$$

Wenn diese Curven, wie im Allgemeinen der Fall, independent sind, so ist nach Satz 2  $\xi\eta\zeta\pi$  ein Polarviereck von  $K$ , welches auf  $C^3$  liegt, ein Fall, den wir ausgeschlossen haben.

Sind die Curven dependent, so besteht  $C^3$  selbst aus der Geraden  $w$  und einer durch den Punkt  $\pi$  gehenden Curve  $C^2$ , während die übrigen Verhältnisse erhalten bleiben. Sind nun  $\xi, \eta$  zwei beliebige Punkte von  $w$ , so geht durch  $\xi\eta\pi$  eine 6-gliedrige Gruppe von Curven, die zu  $K$  conjugirt sind. In dieser 6-gliedrigen ist eine 5-gliedrige Gruppe von Curven enthalten, die aus  $w$  und je einer durch  $\pi$  gehenden Curve 2. Ordnung bestehen und durch

$$C^3 = w C^2, w C_1^2 \dots w C_4^2$$

repräsentirt sein möge. Ist nun  $C_1^3$  eine Curve der 6-gliedrigen Gruppe, die *nicht*  $w$  als Theil enthält und schneidet diese  $w$  ausser in  $\xi\eta$ , noch in  $\zeta$ , so gehen durch  $\xi\eta\zeta\pi$  folgende 6 zu  $K$  conjugirte Curven:

$$C^3 = w C^2, w C_1^2 \dots w C_4^2, \\ C_1^3.$$

Da diese nie dependent sind, so bildet  $\xi\eta\zeta\pi$  ein auf  $C^3$  liegendes Polarviereck von  $K$ , also auch dieser Fall bedarf keiner näheren Betrachtung.

b) Das Büschel der durch  $\pi$  gehenden apolaren Curven besteht aus einer Involution von Geradenpaaren mit dem Centrum  $\pi$ .

$v, w$  sei ein solches Geradenpaar; dann ist:

$$v_a w_a u_a \equiv 0$$

d. h. die erste Polare von  $v$  besteht aus einem auf  $w$  liegenden Punktepaar  $\xi\eta$ . Nun sei  $v'w'$  ein zweites Geradenpaar der Involution,  $\xi'\eta'$  die auf  $w'$  liegende erste Polare von  $v'$ ; dann ist

$$v_\alpha v'_\alpha u_\alpha = 0$$

der Polarpunkt von  $v'$  in Bezug auf  $u_\xi u_\eta$  oder, was dasselbe, der vierte harmonische Punkt von  $\pi$  in Bezug auf  $\xi\eta$  und als solcher auf  $w$  gelegen; er ist aber ebenso Polarpunkt von  $v$  in Bezug auf  $\xi'\eta'$ , d. h. der vierte harmonische Punkt von  $\pi$  in Bezug auf  $\xi'\eta'$  und als solcher auf  $w'$  liegend. Er muss also mit  $\pi$  selbst coincidiren und damit dies möglich, muss je einer der Punkte  $\xi\eta$ , resp.  $\xi'\eta'$  in  $\pi$  hineinfallen; d. h. jede Gerade durch  $\pi$  hat in Bezug auf  $K^3$  eine Polare, die aus dem Punkte  $\pi$  und einem andern Punkte  $\xi$  besteht. Demnach hat jede durch  $\pi$  gehende Gerade zur zweiten Polare den Punkt  $\pi$  selbst, der auf ihr liegt, und ist in Folge dessen Tangente der Curve.  $u_\pi = 0$  ist also ein Theil von  $K^3$ . Umgekehrt sieht man leicht, dass wenn  $K^3$  durch die Gleichung:

$$u_\pi u_\beta^2 = 0$$

dargestellt wird, die apolaren Curven durch  $\pi$  eine Involution von Geradenpaaren bilden und überhaupt die eben geschilderten Verhältnisse stattfinden. Der Ort der Punkte  $\xi$  ist alsdann die Gerade  $g$ , für welche  $g_\beta u_\beta \equiv \rho u_\pi$  ist.

Von den Schnittpunkten eines der Involution angehörigen Geradenpaares  $v, w$  mit der  $C^3$  liegen zwei in  $\pi$  vereinigt,  $\alpha_5 \alpha_6$  seien die weiteren Schnittpunkte von  $v$ ,  $\alpha_7 \alpha_8$  diejenigen von  $w$ . Es fragt sich ob es vorkommt, dass  $v, w$  ein Polarfünfeck ausschneidet, welches also aus  $\pi \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8$  bestände. In diesem Fall müsste, wenn man durch  $\alpha_7 \alpha_8$  irgend eine Curve 2. Ordnung legt, die noch in  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  schneidet, diese zusammen mit  $v$  nach Satz 1 eine conjugirte Curve von  $K^3$  bilden, oder was dasselbe ist, jede durch  $\alpha_7 \alpha_8$  gehende Curve 2. Ordnung müsste zu  $v_\alpha u_\alpha^2 = 0$ , d. h. zum Punktepaar  $\pi|(w, g)$  conjugirt sein.  $\alpha_7 \alpha_8$  selbst müsste also zu  $\pi|(w, g)$  harmonisch liegen. Nach der bekannten Eigenschaft der Polarcurve eines Punktes einer  $C^3$  folgt hieraus, dass  $(w, g)$  auf der ersten Polaren von  $\pi$  in Bezug auf  $C^3(a_x^3=0)$  liegen muss, und da der Punkt auch auf  $g$  liegt, so resultirt, dass er Schnittpunkt von  $g$  und  $a_\pi a_x^2 = 0$  ist. Da dasselbe von  $(v, g)$  bewiesen werden kann, so müssen, wenn überhaupt ein Geradenpaar  $v, w$  der gewünschten Art existiren soll,  $v, w$  die Geraden sein, welche  $\pi$  mit den Schnittpunkten von  $g$  und  $a_\pi a_x^2 = 0$  verbinden.

Man sieht aber ganz ebenso ein, dass wenn  $v, w$  die so construirten Geraden sind und  $v$  die  $C^3$  noch in  $\alpha_5 \alpha_6$ ,  $w$  noch in  $\alpha_7 \alpha_8$  schneidet,  $\pi \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8$  ein Polarfünfeck bildet, da jede durch diese Punkte gehende Curve 3. Ordnung zu  $K^3$  conjugirt ist.



Wir können also jetzt ganz allgemein den Satz aussprechen:

14. Sind  $C^3$  und  $K^3$  zwei Curven 3. Ordnung resp. Classe, die zu einander conjugirt sind, und enthält  $C^3$  kein Polarviereck von  $K^3$ , so geht durch jeden Punkt von  $C^3$  eine und nur eine Curve  $C_\pi$ , welche ein Polarfünfeck von  $K^3$ , das den Punkt  $\pi$  selbst nicht enthält, auf  $C^3$  ausschneidet.

Der Satz 12 giebt eine geometrische Deutung für das Verschwinden der Invariante  $a_\alpha^3$  der Curven  $C^3$  ( $a_\alpha^3 = 0$ ) und  $K^3$  ( $u_\alpha^3 = 0$ ). Wir wussten schon, dass wenn  $C^3$  durch ein Polarfünfeck von  $K^3$  geht,  $a_\alpha^3 = 0$  ist; aus unserem Satz ergibt sich auch das Umgekehrte. Berücksichtigen wir noch das dual gegenüberstehende Resultat, so folgt:

14a. Eine Curve dritter Ordnung  $C^3$  und eine Curve dritter Classe  $K^3$  sind dann und nur dann conjugirt, wenn  $C^3$  unendlich viele Polarfünfecke von  $K^3$  eingeschrieben sind. Dann sind aber auch  $K^3$  unendlich viele Polarfünfecke von  $C^3$  umschrieben.

Dieser Satz gilt ganz allgemein, da er im Falle, dass  $C^3$  ein Polarviereck von  $K^3$  enthält, evident ist.

Ich schliesse diesen Paragraphen mit einem Satze, der in die Vertheilung der Curven  $C_\pi$  einen näheren Einblick gestattet.

15. Wenn durch einen Punkt  $\alpha$  von  $C^3$  die Fünfeckscurve eines Punktes  $\pi$  hindurchgeht, und  $\pi'$  der dritte Schnittpunkt von  $\overline{\pi\alpha}$  und  $C^3$  ist, so geht auch die Fünfeckscurve von  $\pi'$  durch  $\alpha$  hindurch.

Beweis. Die Curve  $C_\pi$  schneide  $C^3$  ausser in  $\alpha$  noch in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Dann ist  $\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$  ein Polarfünfeck von  $K(u_\alpha^3 = 0)$  d. h. es ist:

$$(12) \quad u_\alpha^3 \equiv \sum_0^4 k_i u_{\alpha_i}^3.$$

Ist nun  $a_\alpha^3 = 0$  irgend eine Curve 2. Ordnung durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , so folgt aus (12) sehr leicht durch Polarisirung, dass ihr Polarpunkt in Bezug auf  $K$  mit  $\alpha$  coincidirt. Alle Curven des Büschels  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  haben also denselben Polarpunkt  $\alpha$ .

Construirt man aber nach Anleitung von Satz 12 die Curve  $C_\pi$ , indem man für die dort benutzte Gerade  $g$  die Gerade  $\overline{\pi\alpha\pi'}$  einsetzt, so ergibt sich der dort erwähnte Punkt  $z$  als Polarpunkt aller Curven des Büschels  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Es ist also in unserm Fall  $z = \alpha$ , und die Curve  $C_\pi$  ist die durch  $\pi'\alpha$  gehende apolare Curve. Unser Satz ist mithin bewiesen.

Man erkennt hieraus, dass die Zahl der Curven  $C_\pi$  welche ausser  $C_\alpha$  durch den Punkt  $\alpha$  der Curve hindurchgehen, stets eine gerade sein muss.

## § 4.

Die Vertheilung der Polarfünfecke auf der  $C^3$ .

Wir wissen, dass jedem Punkte  $\pi$  unserer  $C^3$  eine und nur eine Curve ( $C_\pi$ ) zugehört, deren fünf weitere Schnittpunkte ein Polarfünfeck von  $K^3$  bilden. Alle Curven  $C_\pi$  constituiren eine gewisse einfache Mannigfaltigkeit, die ganz in dem Netz der apolaren Curven enthalten ist. Aber es gilt zugleich der Satz:

16. Jede Curve zweiter Ordnung  $q$ , welche ein Polarfünfeck auf  $C^3$  ausschneidet, lässt sich nur auf eine Art als Curve  $C_\pi$  auffassen.

Denn würde eine solche Curve, die  $C^3$  in  $\pi \pi' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  schneidet, zugleich als Curve  $C_\pi$  und als  $C_{\pi'}$  betrachtet werden können, so müssten die Punktgruppen

$$\pi' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

$$\pi \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

je ein Polarfünfeck von  $K^3$  bilden; d. h. es wäre

$$u_\alpha^3 \equiv \sum_1^4 k_i u_{\alpha_i}^3 + k u_\pi^3,$$

$$u_\alpha^3 \equiv \sum_1^4 \lambda_i u_{\alpha_i}^3 + \lambda' u_{\pi'}^3,$$

In diesen Gleichungen sind  $k$  und  $\lambda'$  von Null verschieden, weil sonst  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  ein Polarviereck von  $K^3$  vorstellen würde, was ausgeschlossen ist.

In Folge dessen ergibt sich:

$$\sum_1^4 (k_i - \lambda_i) u_{\alpha_i}^3 + k u_\pi^3 - \lambda' u_{\pi'}^3 \equiv 0.$$

Ist nun  $a_x^2 = 0$  irgend eine durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  gehende von dem Kegelschnitt  $(\pi \pi' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$  verschiedene Curve, so folgt durch Polarisirung der letzten Gleichung nach  $a_x^2$ :

$$k a_\pi^2 u_\pi - \lambda a_{\pi'}^2 u_{\pi'} \equiv 0$$

und mithin, da  $k a_\pi^2$  und  $\lambda a_{\pi'}^2$  von Null verschieden sind  $\pi = \pi'$ . Jede Curve unserer Art gehört also nur zu einem Punkte  $\pi$ , q. e. d.

Wenn  $a_{1x}^2 = 0$ ,  $a_{2x}^2 = 0$ ,  $a_{3x}^2 = 0$  drei independente apolare Curven von  $K^3$  sind, mithin

$$x_1 a_{1x}^2 + x_2 a_{2x}^2 + x_3 a_{3x}^2 = 0$$

für variables  $x$  alle apolaren Curven darstellt, so giebt es unendlich viele Parameterwerthe  $x_1 x_2 x_3$ , welche Curven  $C_\pi$  liefern. Alle diese Werthe werden durch eine algebraische Gleichung

$$(13) \quad F(x_1 x_2 x_3) = 0$$

ausgeschieden werden.\*) Wir können (13) als Gleichung einer algebraischen Curve in den Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  ansehen und wollen dies des bequemeren Ausdrucks halber weiterhin thun, und dementsprechend auch von Punkten  $x$  dieser Curve reden.

Ist nun

$$(14) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichung unserer  $C^3$ , so wissen wir jetzt, dass jedem Punkt  $x$  von  $f=0$  ein und nur ein Punkt  $x$  von  $F=0$ , aber auch umgekehrt, nach dem eben bewiesenen Satze jedem Punkte  $x$  von  $F=0$  ein Punkt  $x$  von  $f=0$  zugehört. Die beiden Curven sind also eindeutig auf einander bezogen und mithin *von gleichem Geschlecht*.

Es ist aber wohl zu beachten, dass es hier nie vorkommen kann, dass zwei einfache Punkte von  $f=0$  sich zu einem Doppelpunkt von  $F=0$  vereinigen oder umgekehrt.

In der That entspricht jedem Doppelpunkt  $x$  von  $f=0$  nach unserer Construction, die dadurch nicht abgeändert wird, nur eine Curve  $C_x$ , also nur ein Punkt  $x$ , welcher mithin auch Doppelpunkt von  $F=0$  sein muss, weil sonst die eindeutige Beziehung unterbrochen würde. Andere Doppel- oder Rückkehrpunkte von  $F=0$  kann es aber nicht geben. Denn sie könnten nur dadurch entstehen, dass zwei Punkten der  $C^3$  dasselbe  $x$ , d. h. dieselbe Curve  $C_x$  zugeordnet wäre, was nach Satz 16 unmöglich ist.

Die Curve  $F=0$  hat in Folge dessen genau so viele Doppel- resp. Rückkehrpunkte, als  $f=0$  und da auch Gleichheit des Geschlechts stattfindet, so folgt Gleichheit der Ordnung.  $F=0$  ist also eine algebraische Gleichung der dritten Ordnung.

Es ist nun leicht, die Fünfeckscurven zu bestimmen, die durch einen beliebigen Punkt  $y$  der Ebene hindurchgehen. Soll eine solche dargestellt sein durch:

$$x_1 a_{1x}^2 + x_2 a_{2x}^2 + x_3 a_{3x}^2 = 0,$$

so ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen gelten:

$$x_1 a_{1y}^2 + x_2 a_{2y}^2 + x_3 a_{3y}^2 = 0, \\ F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Es giebt drei Werthe  $x_1, x_2, x_3$  welche ihnen genügen, also folgt:

17. *Durch jeden Punkt  $y$  der Ebene gehen drei Fünfeckscurven (welche demselben Büschel angehören).*

Ist  $y$  ein Punkt der Curve, so ist  $C_y$  die eine durchgehende Fünfeckscurve; das durch  $C_y$  bestimmte Polarfünfeck enthält aber den Punkt

\*) In der That könnte man diese Gleichung dadurch hergestellt denken, dass man die in Satz 12 gegebene Construction algebraisch verfolgt.

$y$  nicht; wohl aber ist  $y$  in den durch die beiden andern Curven ausgeschnittenen Fünfecken enthalten; es folgt also:

18. Ein Punkt  $y$  der  $C^3$  lässt sich auf zwei verschiedene Arten zu einem Polarfünfeck von  $K^3$  ergänzen.

Wir sehen also, dass die Zahl der ausser  $C_y$  durch einen Punkt  $y$  gehenden  $C_\pi$  in der That eine gerade ist, wie wir schon aus Satz 15 erkannten. Aus demselben Satz folgt aber noch:

19. Sind  $C_\pi C_{\pi'}$  die beiden ausser  $C_y$  durch einen Punkt  $y$  der  $C^3$  gehenden Fünfeckscurven, so liegen  $\pi y \pi'$  in derselben Geraden.

Zu jedem Punkte  $y$  der  $C^3$  gehört in Folge dessen eine bestimmte Gerade  $\Gamma_y$ , nämlich die Verbindungslinie der Punkte  $\pi \pi'$ , deren zugehörige Fünfeckscurven durch  $y$  gehen. Die Gerade  $\Gamma_y$  geht dabei selbst durch  $y$  hindurch. Um die Classe des Ortes zu bestimmen, den die Geraden  $\Gamma$  umhüllen, fragen wir uns, welche dieser Geraden ausser  $\Gamma_y$  einen Punkt  $y$  unserer  $C^3$  enthalten. Soll  $\Gamma_z$  von dieser Art sein, so muss  $C_y$  durch den Punkt  $z$  gehen; umgekehrt, ist  $z$  Punkt des zugehörigen Fünfecks, so ist  $\overline{zy} = \Gamma_z$  eine durch  $y$  gehende Gerade  $\Gamma$ . Die Gerade  $\Gamma_y$  und die Verbindungslinien von  $y$  mit den Punkten des zugehörigen Fünfecks stellen also alle Geraden  $\Gamma$  vor, die durch  $y$  gehen; d. h. der Ort der Geraden  $\Gamma$  ist von der sechsten Classe. Jede Gerade des Ortes kann aber im Allgemeinen nur zu einem Punkt  $y$  gehören; in Folge dessen ist der Ort von demselben Geschlecht  $p$ , wie die gegebene  $C^3$  und besitzt demnach  $(10-p)$  Doppeltangenten resp. Wendetangenten.

Ich kehre nunmehr zu der Beziehung zurück, die zwischen den Punkten von  $C^3$  und den Fünfeckscurven bestand. Da die Curven (13) und (14) eindeutig auf einander bezogen sind, so giebt es bekanntlich eine rationale Transformation\*)

$$(16) \quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \Phi_1(x_1 x_2 x_3), \\ \varrho x_2 &= \Phi_2(x_1 x_2 x_3), \\ \varrho x_3 &= \Phi_3(x_1 x_2 x_3), \end{aligned}$$

durch welche die Curve  $F=0$  in  $f=0$  übergeführt wird. Die Curven  $\Phi_i(x)=0$  seien von der  $s^{\text{ten}}$  Ordnung.

Jede Gleichung

$$(17) \quad h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 = 0$$

scheidet aus der Gesamtheit der apolaren Curven eine zweigliedrige Gruppe (ein Büschel) aus. In demselben sind, wie wir wissen, drei Fünfeckscurven enthalten, da deren Parameter  $\alpha$  zugleich (17) und (13) befriedigen müssen.

Wir können aber zu diesen drei Curven auch auf anderem Wege gelangen. Soll nämlich  $C_y$  eine dieser Curven sein, so ist nothwendig

\*) Cfr. Clebsch und Gordan, Abelsche Functionen p. 54 ff.

und hinreichend, dass erstens  $y$  auf  $C^3$  liege, zweitens das dem Punkt  $y$  nach (16) entsprechende Werthsystem  $x$  der Gleichung (17) genügt.  $y$  muss also die Gleichungen befriedigen:

$$(18) \quad \begin{aligned} f(y_1 y_2 y_3) &= 0, \\ h_1 \Phi_1(y) + h_2 \Phi_2(y) + h_3 \Phi_3(y) &= 0. \end{aligned}$$

Umgekehrt, wenn  $y$  eine gemeinschaftliche Lösung von (18) ist, welche nicht  $\Phi_1(y)$ ,  $\Phi_2(y)$ ,  $\Phi_3(y)$  gleichzeitig annullirt, so liefert das aus (16) bestimmbare zugehörige Werthsystem  $x$  eine der gesuchten Curven.

Da die Zahl der Lösungen drei ist, so müssen von den  $3s$  Schnittpunkten der Curven (18)  $3(s-1)$  feste gemeinsame Punkte von

$$(19) \quad f(y_1 y_2 y_3) = 0, \Phi_1(y) = 0, \Phi_2(y) = 0, \Phi_3(y) = 0$$

vorstellen, während drei andere mit  $h_1, h_2, h_3$  beweglich sind. Setzen wir nun an Stelle der Gleichung (17) die Gleichung

$$(17a) \quad a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 = 0,$$

so scheidet dieselbe das Büschel der durch einen Punkt  $\xi$  hindurchgehenden apolaren Curven aus. Wenn  $\xi$  ein Punkt von  $C^3$  ist, so wissen wir, dass das Büschel drei Fünfeckcurven enthält, deren eine  $C_\xi$  ist, während die andern zwei Punkten  $\xi', \xi''$  angehören mögen. Nach unserer Betrachtung sind  $y = \xi$ ,  $y = \xi'$ ,  $y = \xi''$  die beweglichen Schnittpunkte der Curven:

$$(18a) \quad \begin{aligned} f(y_1 y_2 y_3) &= 0, \\ a_1^2 \Phi_1(y) + a_2^2 \Phi_2(y) + a_3^2 \Phi_3(y) &= 0. \end{aligned}$$

Wir wissen aber aus Satz 19, dass  $\xi, \xi', \xi''$  in gerader Linie liegen. Von den Schnittpunkten der beiden Curven (18a), von denen die erste von  $3^{ter}$ , die zweite von  $s^{ter}$  Ordnung ist, liegen drei in einer Geraden ( $v_y = 0$ ), mithin nach einem bekannten Satze die übrigen  $3(s-1)$ , nämlich die festen gemeinsamen Punkte der Curven (19) auf mindestens einer Curve  $(s-1)^{ter}$  Ordnung. Eine solche Curve sei  $\chi(x) = 0$ ; dann muss sich in:

$$\lambda [a_1^2 \Phi_1(y) + a_2^2 \Phi_2(y) + a_3^2 \Phi_3(y)] - v_y \chi(y)$$

die Constante  $\lambda$  so bestimmen lassen, dass der Ausdruck durch  $f(y)$  theilbar wird. Es giebt also ein  $\lambda$  und eine Function  $(s-3)^{ter}$  Ordnung  $\Psi(y)$ , so dass:

$$(20a) \quad \lambda [a_1^2 \Phi_1(y) + a_2^2 \Phi_2(y) + a_3^2 \Phi_3(y)] + \Psi(y) f(y) \equiv v_y \chi(y).$$

Da  $\chi$  von  $\xi$  ganz unabhängig ist, so werden, wenn  $\eta, \xi$  zwei andere Punkte von  $C^3$  sind, zwei ganz analoge Gleichungen bestehen:

$$(20b) \quad \mu [a_1^2 \Phi_1(y) + a_2^2 \Phi_2(y) + a_3^2 \Phi_3(y)] + \Psi'(y) f(y) \equiv w_y \chi(y),$$

$$(20c) \quad \nu [a_1^2 \Phi_1(y) + a_2^2 \Phi_2(y) + a_3^2 \Phi_3(y)] + \Psi''(y) f(y) \equiv t_y \chi(y).$$

Für Punkte  $y$  unserer  $C^3$  [ $f(y) = 0$ ] ist daher:

$$a_{1\xi}^2 \Phi_1(y) + a_{2\xi}^2 \Phi_2(y) + a_{3\xi}^2 \Phi_3(y) = \frac{1}{\lambda} \chi(y) v_y,$$

$$a_{1\eta}^2 \Phi_1(y) + a_{2\eta}^2 \Phi_2(y) + a_{3\eta}^2 \Phi_3(y) = \frac{1}{\mu} \chi(y) w_y,$$

$$a_{1\zeta}^2 \Phi_1(y) + a_{2\zeta}^2 \Phi_2(y) + a_{3\zeta}^2 \Phi_3(y) = \frac{1}{\nu} \chi(y) t_y.$$

Ist also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1\xi}^2 & a_{2\xi}^2 & a_{3\xi}^2 \\ a_{1\eta}^2 & a_{2\eta}^2 & a_{3\eta}^2 \\ a_{1\zeta}^2 & a_{2\zeta}^2 & a_{3\zeta}^2 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, was durch Wahl von  $\xi\eta\zeta$  stets bewirkt werden kann,\*) so sind  $\Phi_1(y)$ ,  $\Phi_2(y)$ ,  $\Phi_3(y)$  proportional zu Ausdrücken der Form:

$$\begin{aligned} A_1 v_y + B_1 w_y + C_1 t_y &= l_{1y}, \\ A_2 v_y + B_2 w_y + C_2 t_y &= l_{2y}, \\ A_3 v_y + B_3 w_y + C_3 t_y &= l_{3y}. \end{aligned} \quad (21)$$

wo  $A_i B_i C_i$  Constante bedeuten; da aber nach (16), wenn  $y$  ein Punkt der  $C_3$ ,  $\chi$  der Parameterwerth von  $C_y$  ist, die Proportion gilt:

$$\chi_1 : \chi_2 : \chi_3 = \Phi_1(y) : \Phi_2(y) : \Phi_3(y);$$

so sind  $\chi_1 \chi_2 \chi_3$  proportional zu linearen Functionen von  $y$ . Es folgt also:

*Die beiden Curven  $f = 0$ ,  $F = 0$  können durch eine Collineation in einander übergeführt werden.*

Ist also  $y$  Punkt der  $C_3$ , so werden die Parameter  $k_1 k_2 k_3$  der zugehörigen Fünfeckscurve nach (21) gegeben durch

$$\begin{aligned} \varrho \chi_1 &= l_{1y}, \\ \varrho \chi_2 &= l_{2y}, \\ \varrho \chi_3 &= l_{3y}. \end{aligned} \quad (21a)$$

und die Fünfeckscurve selbst ist:

$$l_{1y} a_{1x}^2 + l_{2y} a_{2x}^2 + l_{3y} a_{3x}^2 = 0. \quad (22)$$

Da sie aber durch  $y$  geht, so gilt

$$l_{1y} a_{1y}^2 + l_{2y} a_{2y}^2 + l_{3y} a_{3y}^2 = 0 \quad (23)$$

für alle Punkte  $y$  der  $C^3$ . (23) ist mithin die Gleichung der Curve  $C^3$  selbst.

\*) Denn sonst müssten alle Punkte der  $C^3$  auf derselben apolaren  $C^2$  liegen; d. h.  $C^3$  müsste jedenfalls eine apolare Curve enthalten, was ausgeschlossen.

In der That lässt sich im Allgemeinen jede zu  $K^3$  conjugirte Curve 3. Ordnung in der Form (23) darstellen. Alle Curven dieser Art bilden nämlich eine neungliedrige Gruppe und specielle Curven derselben sind:

$$\begin{aligned} a_{1x}^3 x_1 &= 0, & a_{2x}^3 x_1 &= 0, & a_{3x}^3 x_1 &= 0, \\ a_{1x}^3 x_2 &= 0, & a_{2x}^3 x_2 &= 0, & a_{3x}^3 x_2 &= 0, \\ a_{1x}^3 x_3 &= 0, & a_{2x}^3 x_3 &= 0, & a_{3x}^3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wenn also zwischen diesen Curven keine Dependenz stattfindet, so lässt sich jede zu  $K^3$  conjugirte Curve 3. Ordnung ( $C_x^3=0$ ) aus ihnen zusammensetzen; d. h. für jede solche Curve lassen sich Constante

$$\begin{aligned} l_{11} \ l_{12} \ l_{13}, \\ l_{21} \ l_{22} \ l_{23}, \\ l_{31} \ l_{32} \ l_{33} \end{aligned}$$

so bestimmen, dass:

$$C_x^3 \equiv l_{1x} a_{1x}^3 + l_{2x} a_{2x}^3 + l_{3x} a_{3x}^3.$$

Alsdann stellt (22) die Fünfeckscurve vor, die zu einem Punkte  $y$  von  $C_x^3=0$  gehört. Man kann nachträglich auch durch Rechnung bestätigen, dass die Curve der Gleichung (22) durch die unter Satz 12 angegebene Construction erhalten werden kann.

Das oben erlangte Resultat können wir folgendermassen aussprechen:

20. *Es gibt zwischen den Punkten der Ebene und dem ternären Gebiet der zu  $K^3$  apolaren Curven eine bestimmte (durch die Gleichung 21 a vermittelte) Collineation, welche jedem Punkt  $y$  unserer  $C^3$  die zugehörige Fünfeckscurve zuordnet.*

Mit Hülfe dieser Thatsache können wir leicht die Aufgabe lösen, einen Punkt  $y$  der  $C^3$  zu einem auf der Curve liegenden Polarfünfeck von  $K^3$  zu ergänzen. Die Aufgabe besitzt nach Satz 18 zwei Lösungen und ist erledigt, sobald man die zum Punkte  $y$  gehörige Gerade  $\Gamma_y$  construiren kann.  $\Gamma_y$  ist aber nichts anderes, als die Punktreihe, welche in unserer Collineation  $V$  dem durch  $y$  gehenden Büschel apolarer Curven zugehört, denn wir wissen ja von drei Punkten der Geraden  $\Gamma_y$  (nämlich von den Schnittpunkten derselben mit  $C^3$ ), dass ihre zugehörigen Curven durch  $y$  hindurchgehen.

Nun sei  $\xi$  ein beliebiger Punkt der  $C^3$ ,  $\eta$  ein Schnittpunkt seiner Fünfeckscurve,  $\xi$  der dritte Schnittpunkt von  $\xi\eta$  mit unserer Curve dritter Ordnung. Da  $C_\xi$  durch  $\eta$  geht, so weiss ich aus Satz 15 dass  $C_\xi$  dasselbe thut, und erkenne, dass die Gerade  $\xi\eta\xi$  der Ort der Punkte ist, welchen innerhalb  $V$  durch  $\eta$  gehende Curven entsprechen, also  $\xi\eta\xi = \Gamma_\eta$ . Lege ich nun durch  $\eta$  und  $y$  die eine durchgehende apolare

Curve  $\mathfrak{C}(\eta y)$ , so gehört dieselbe sowohl dem Büschel der durch  $\eta$  gehenden, also auch dem Büschel der durch  $y$  gehenden Curven an, und der Punkt  $\varepsilon$ , dem diese Curve in unserer Collineation entspricht, muss sowohl auf  $\Gamma_y$  als auf  $\Gamma_\eta$  liegen; es ist also

$$(24a) \quad \varepsilon = \Gamma_y - \Gamma_\eta.$$

Da aber vier Punkte einer Geraden und die ihnen innerhalb  $V$  entsprechenden Curven dasselbe Doppelverhältniss haben müssen, so gilt andererseits:

$$(24b) \quad (\xi \eta \xi \varepsilon) \wedge (C_\xi C_\eta C_\zeta \mathfrak{C}(\eta y)).$$

Aus (24a) und (24b) ergibt sich also folgende Construction:

21. Es sei  $\xi$  ein beliebiger Punkt der Curve dritter Ordnung,  $C_\xi$  seine auf bekanntem Wege hergestellte Fünfeckscurve,  $\eta$  einer der Schnittpunkte derselben mit  $C^2$ ,  $C_\eta$  die in derselben Weise, wie  $C_\xi$ , construirte Fünfeckscurve von  $\eta$ . Ferner sei  $\zeta$  der dritte Schnittpunkt von  $\overline{\xi\eta}$  und  $C^3$  und  $C_\zeta$  die durch  $\eta\zeta$  gehende apolare Curve.  $l_\xi l_\eta l_\zeta$  seien die Tangenten von  $C_\xi C_\eta C_\zeta$  im Punkte  $\eta$ .

Ist dann  $y$  ein beliebiger Punkt der  $C^3$ , so lege man durch  $y$  und  $\eta$  die eine durchgehende apolare Curve  $\mathfrak{C}(y, \eta)$ , welche in  $\eta$  die Tangente  $l_y$  habe und bestimme den Punkt  $\varepsilon$  der Geraden  $\overline{\xi\eta}$ , für welchen: (cfr. 24b)

$$(\xi \eta \xi \varepsilon) \wedge (l_\xi l_\eta l_\zeta l_y).$$

Man ziehe  $\overline{y\varepsilon} = \Gamma_y$  und bestimme die weiteren Schnittpunkte  $y_1, y_2$  dieser Geraden mit  $C^3$ . Die durch  $yy_1$  resp.  $yy_2$  gehenden apolaren Curven  $C_y, C_y$  sind so beschaffen, dass jede von ihnen  $C^3$  noch in vier Punkten trifft, welche  $y$  zu einem Polarfünfeck von  $K^3$  ergänzen.

## § 5.

Ueber die Polarsechsecke etc. einer  $K^3$ , die auf einer zu ihr conjugirten  $C^3$  enthalten sind.

Wenn eine Curve 2<sup>ter</sup> Ordnung  $C^2$  zu einer Curve 2<sup>ter</sup> Classe  $K^2$  conjugirt ist, so liegt auf  $C^2$  bekanntlich nicht nur eine einfache Mannigfaltigkeit von Polardreiecken der  $K^2$ , sondern auch eine dreifache Mannigfaltigkeit von Polarvierecken derselben Curve.

Etwas ganz Analoges findet auch bei den Curven dritter Ordnung und dritter Classe statt und zwar ergibt sich, dass wenn  $C^3$  zu  $K^3$  conjugirt ist,  $C^3$  eine dreifache Mannigfaltigkeit von Polarsechsecken, eine fünffache von Polarsiebenecken, eine Z-fache von Polarachtecken enthält. Da ich die Untersuchungen, die sich daran anknüpfen, noch nicht habe abschliessen können, anderseits der Gegenstand nicht füglich ohne Erwähnung bleiben darf, so sei es mir gestattet, einstweilen einige diesbezügliche Resultate hier ohne Beweis mitzutheilen. Es ergibt sich:



22. Sind zwei Punkte  $\alpha_5, \alpha_6$  der  $C^3$  gegeben, so giebt es durch jeden Punkt  $\alpha$  der Curve einen Kegelschnitt, der durch  $\alpha_5$  geht und dessen weitere Schnittpunkte  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  mit  $\alpha_5, \alpha_6$  zusammen ein Polarsechseck von  $K^3$  bilden.

23. Ist  $K^3$  zu  $C^3$  conjugirt und ist  $\alpha$  ein beliebiger Punkt der  $C^3$ , so lassen sich zu vier beliebigen Punkten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  derselben Curve stets drei Punkte  $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$  auf eine und nur eine Art so hinzubestimmen, dass die sieben Punkte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$  zugleich einen beigeordneten Rest von  $\alpha$  und ein Polarsiebenneck von  $K^3$  bilden.

Zürich, im Juni 1887.

---