Zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung.

Von **Julius Mandl**, k. u. k. Major des Geniestabes in Wien.

Den im IX. Jahrgange dieser Zeitschrift, Seite 117 und ff. entwickelten Eigenschaften der Kegelschnittslinien entsprechen analoge Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Legt man nämlich durch einen Punkt M einer Fläche zweiter Ordnung F drei aufeinander senkrecht stehende — aber sonst beliebig gerichtete — Strahlen a', a'', a''' und ermittelt deren Schnittpunkte A', A'', A''' mit der Fläche F, so geht die durch diese Schnittpunkte bestimmte Ebene A', A'', A''' durch einen von der Richtung der Strahlen a', a'', a''' unabhängigen Punkt N.

Letzterer liegt auf der dem Punkte M angehörigen Normalen der Fläche F.

Einem anderen Punkte M_1 entspricht ein anderer Punkt N_1; der geometrische Ort aller Punkte N, die allen Punkten M der Fläche F entsprechen, ist wieder eine Fläche zweiter Ordnung F'.

F und F' haben gemeinschaftlichen Mittelpunkt und gemeinschaftliche Hauptebenen und sind im allgemeinen Flächen zweiter Ordnung derselben Art. Dieselben sind jedoch nicht geometrisch ähnliche Flächen und es kann z. B. vorkommen, dass F' in eine Ebene degeneriert, während F ein Ellipsoid ist, indem die eine Hauptaxe jenes Ellipsoides, welches die Fläche F' bilden soll, den Wert Null annimmt. Auch sind die unendlich fernen Punkte der Flächen F und F' im Allgemeinen nicht gemeinschaftlich für beide Flächen.

Um dies zu beweisen, beziehen wir die Fläche F auf ein rechtwinkliges Punktcoordinaten-System. Die Gleichung von F sei:

$$(1)\ F)\ldots\ a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

Die Discriminante der Fläche ist:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

worin

$$a_{mn} \equiv a_{nm}$$

ist.

Der Abkürzung wegen setzen wir

$$\begin{aligned}
t &= a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + a_{14} \\
u &= a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z + a_{24} \\
v &= a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z + a_{34} \\
w &= a_{41}\, x + a_{42}\, y + a_{43}\, z + a_{44},
\end{aligned}$$

so dass sich die Gleichung von F auch in folgender Form schreiben lässt:

$$(2) \qquad F) \ldots .\; x\, t + y\, u + z\, v + w = 0.$$

Ein Punkt M der Fläche F habe die Coordinaten x_0, y_0, z_0; dann ist:

$$(3) \quad a_{11}\, x_0^2 + a_{22}\, y_0^2 + a_{33}\, z_0^2 + 2a_{12}\, x_0\, y_0 + 2a_{13}\, x_0\, z_0 + 2a_{23}\, y_0\, z_0 + \\ + 2a_{14}\, x_0 + 2a_{24}\, y_0 + 2a_{34}\, z_0 + a_{44} = 0.$$

Legt man nun durch M irgend eine Gerade a, so ist dieselbe durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(4) \qquad a) \begin{cases} x = x_0 + r\,\alpha \\ y = y_0 + r\,\beta \\ z = z_0 + r\,\gamma. \end{cases}$$

Hierin bedeuten α, β und γ die Richtungscoefficienten der Geraden a, und r den Abstand des laufenden Punktes der Geraden a von M.

Substituiert man — um den Schnittpunkt von a und F zu erhalten — die Ausdrücke für x, y und z aus den Gleichungen (4) in Gleichung (1), so erhält man bei Berücksichtigung von Gleichung (3)

$$(5)\; A \begin{cases} r \;=\; -2\, \dfrac{\alpha\, t_0 + \beta\, u_0 + \gamma\, v_0}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}, \text{ worin} \\ t_0 = a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13}\, z_0 + a_{14}, \\ u_0 = a_{21}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23}\, z_0 + a_{24}, \\ v_0 = a_{31}\, x_0 + a_{33}\, y_0 + a_{33}\, z_0 + a_{34} \text{ und} \\ \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = a_{11}\, \alpha^2 + a_{22}\, \beta^2 + a_{33}\, \gamma^2 + 2a_{12}\, \alpha\beta + 2a_{13}\, \alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma \end{cases}$$

bedeutet.

Legt man durch M drei aufeinander senkrecht stehende Geraden a_1, a_2 und a_3 mit den Richtungscoefficienten α_1, β_1, γ_1, respective $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, so erhält man für die Schnittpunkte A_1, A_2 und A_3 dieser Geraden mit der Fläche F:

$$(6)\qquad \begin{cases} A_1) \ldots\ldots r_1 = -2\,\dfrac{\alpha_1\, t_0 + \beta_1\, u_0 + \gamma_1\, v_0}{\varphi\,(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \\ A_2) \ldots\ldots r_2 = -2\,\dfrac{\alpha_2\, t_0 + \beta_2\, u_0 + \gamma_2\, v_0}{\varphi\,(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} \\ A_3) \ldots\ldots r_3 = -2\,\dfrac{\alpha_3\, t_0 + \beta_3\, u_0 + \gamma_3\, v_0}{\varphi\,(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)} \end{cases}$$

Zwischen den Richtungscoefficienten von a_1, a_2 und a_3 bestehen die Beziehungen:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \ \beta_1 = -\begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \ \gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_2 = -\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \ \beta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \ \gamma_2 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \ \beta_3 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \ \gamma_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma_2 = 0 \\ \alpha_1\,\alpha_3 + \beta_1\,\beta_3 + \gamma_1\,\gamma_3 = 0 \\ \alpha_2\,\alpha_3 + \beta_2\,\beta_3 + \gamma_2\,\gamma_3 = 0 \\[1ex] \alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2 + \alpha_3\,\beta_3 = 0 \\ \alpha_1\,\gamma_1 + \alpha_2\,\gamma_2 + \alpha_3\,\gamma_3 = 0 \\ \beta_1\,\gamma_1 + \beta_2\,\gamma_2 + \beta_3\,\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \\[1ex] \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{cases}$$

Die Coordinaten der Schnittpunkte A_1, A_2 und A_3 sind:

$$A_1 \begin{cases} x_1 = x_0 + r_1\, \alpha_1 \\ y_1 = y_0 + r_1\, \beta_1 \\ z_1 = z_0 + r_1\, \gamma_1 \end{cases} \quad A_2 \begin{cases} x_2 = x_0 + r_2\, \alpha_2 \\ y_2 = y_0 + r_2\, \beta_2 \\ z_3 = z_0 + r_2\, \gamma_2 \end{cases} \quad A_3 \begin{cases} x_3 = x_0 + r_3\, \alpha_3 \\ y_3 = y_0 + r_3\, \beta_3 \\ z_3 = z_0 + r_3\, \gamma_3 \end{cases}$$

In Bezug auf ein zu dem gewählten Coordinatensystem paralleles System M (ξ, η, ζ), dessen Ursprung mit dem Punkte M der Fläche F zusammenfällt, lauten die Coordinaten der Punhte A_1, A_2 und A_3:

$$A_1 \begin{cases} \xi_1 = r_1\, \alpha_1 \\ \xi_2 = r_1\, \beta_1 \\ \xi_3 = r_1\, \gamma_1 \end{cases} \quad A_2 \begin{cases} \xi_2 = r_2\, \alpha_2 \\ \eta_2 = r_2\, \beta_2 \\ \zeta_2 = r_2\, \gamma_2 \end{cases} \quad A_3 \begin{cases} \xi_3 = r_3\, \alpha_3 \\ \eta_3 = r_3\, \beta_3 \\ \zeta_3 = r_3\, \gamma_3 \end{cases}$$

Die Gleichung der durch diese drei Punkte hindurchgehenden Ebene $A_1\ A_2\ A_3$ lautet:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aus Gleichung (1) folgt ferner:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + a_{14}}{a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z + a_{34}} = -\frac{t}{v}$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z + a_{24}}{a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z + a_{34}} = -\frac{u}{v}$$

Daher ist für den Punkt M:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_0 = -\frac{t_0}{v_0} \text{ und } \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_0 = -\frac{u_0}{v_0}$$

Die Gleichungen der Normalen $M\ N$ lauten somit:

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \frac{v_0}{t_0} \text{ und } \frac{z - z_0}{y - y_0} = \frac{v_0}{u_0}$$

oder mit Bezug auf das Coordinatensystem M (ξ, η, ζ):

$$(8) \qquad \frac{\zeta}{\xi} = \frac{v_0}{t_0} \text{ und } \frac{\zeta}{\eta} = \frac{v_0}{u_0},$$

oder in anderer Form:

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi = \lambda\, t_0 \\ \eta = \lambda\, u_0 \\ \zeta = \lambda\, v_0 \end{cases}$$

wobei λ einen allgemeinen Parameter der Geraden $M\,N$ bedeutet.

Um dem Schnittpunkt N der normalen $M\,N$ mit der Ebene $A_1\,A_2\,A_3$ zu ermitteln, setzen wir die Werte von ξ, η und ζ aus den Gleichungen (9) in die Gleichung (7) ein.

Man erhält:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \lambda\, t_0 & \lambda\, u_0 & \lambda\, v_0 & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

woraus sich der dem Schnittpunkte N entsprechende Wert von λ und mittelst der Gleichungen (9) die Coordinaten von N berechnen lassen.

Dividirt man Gleichung (10) durch λ und zerlegt die Determinante auf der linken Seite dieser Gleichung, so kann man auch schreiben:

$$\begin{vmatrix} t_0 & u_0 & v_0 & \frac{1}{\lambda} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 0 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_0 & u_0 & v_0 & 0 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(11) \qquad \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_0 & u_0 & v_0 & 0 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Substituiert man in diese Gleichung die früher ermittelten Werte für die Coordinaten der Punkte A_1, A_2 und A_3, so erhält man:

$$\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} -2\cdot\frac{\alpha_1 t_0+\beta_1 u_0+\gamma_1 v_0}{\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}\cdot\alpha_1 & -2\cdot\frac{\alpha_1 t_0+\beta_1 u_0+\gamma_1 v_0}{\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}\cdot\beta_1 & -2\cdot\frac{\alpha_1 t_0+\beta_1 u_0+\gamma_1 v_0}{\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}\cdot\gamma_1 \\ -2\,\frac{\alpha_2 t_0+\beta_2 u_0+\gamma_2 v_0}{\varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}\cdot\alpha_2 & -2\cdot\frac{\alpha_2 t_0+\beta_2 u_0+\gamma_2 v_0}{\varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}\cdot\beta_2 & -2\cdot\frac{\alpha_2 t_0+\beta_2 u_0+\gamma_2 v_0}{\varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}\cdot\gamma_2 \\ -2\cdot\frac{\alpha_3 t_0+\beta_3 u_0+\gamma_3 v_0}{\varphi(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)}\cdot\alpha_3 & -2\cdot\frac{\alpha_3 t_0+\beta_3 u_0+\gamma_3 v_0}{\varphi(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)}\cdot\beta_3 & -2\cdot\frac{\alpha_3 t_0+\beta_3 u_0+\gamma_3 v_0}{\varphi(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)}\cdot\gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix}
t_0 & u_0 & v_0 & 0 \\
-2\cdot\dfrac{\alpha_1 t_0+\beta_1 u_0+\gamma_1 v_0}{\varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)}\cdot\alpha_1 & -2\cdot\dfrac{\alpha_1 t_0+\beta_1 u_0+\gamma_1 v_0}{\varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)}\cdot\beta_1 & -2\cdot\dfrac{\alpha_1 t_0+\beta_1 u_0+\gamma_1 v_0}{\varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)}\cdot\gamma_1 & 1 \\
-2\cdot\dfrac{\alpha_2 t_0+\beta_2 u_0+\gamma_2 v_0}{\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)}\cdot\alpha_2 & -2\cdot\dfrac{\alpha_2 t_0+\beta_2 u_0+\gamma_2 v_0}{\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)}\cdot\beta_2 & -2\cdot\dfrac{\alpha_2 t_0+\beta_2 u_0+\gamma_2 v_0}{\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)}\cdot\gamma_2 & 1 \\
-2\cdot\dfrac{\alpha_3 t_0+\beta_3 u_0+\gamma_3 v_0}{\varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)}\cdot\alpha_3 & -2\cdot\dfrac{\alpha_3 t_0+\beta_3 u_0+\gamma_3 v_0}{\varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)}\cdot\beta_3 & -2\cdot\dfrac{\alpha_3 t_0+\beta_3 u_0+\gamma_3 v_0}{\varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)}\cdot\gamma_3 & 1
\end{vmatrix}
$$

oder:

$$
-\frac{8}{\varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\cdot\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\cdot\varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)}\cdot
$$

$$
\cdot\frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix}
\alpha_1^2 t_0+\alpha_1\beta_1 u_0+\alpha_1\gamma_1 v_0 & \alpha_1\beta_1 t_0+\beta_1^2 u_0+\beta_1\gamma_1 v_0 & \alpha_1\gamma_1 t_0+\beta_1\gamma_1 u_0+\gamma_1^2 v_0 \\
\alpha_2^2 t_0+\alpha_2\beta_2 u_0+\alpha_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\beta_2 t_0+\beta_2^2 u_0+\beta_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\gamma_2 t_0+\beta_2\gamma_2 u_0+\gamma_2^2 v_0 \\
\alpha_3^2 t_0+\alpha_3\beta_3 u_0+\alpha_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\beta_3 t_0+\beta_3^2 u_0+\beta_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\gamma_3 t_0+\beta_3\gamma_3 u_0+\gamma_2^3 v_0
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \frac{4}{\varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\cdot\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\cdot\varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)}\cdot
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
t_0 & u_0 & v_0 & 0 \\
\alpha_1^2 t_0+\alpha_1\beta_1 u_0+\alpha_1\gamma_1 v_0 & \alpha_1\beta_1 t_0+\beta_1^2 u_0+\beta_1\gamma_1 v_0 & \alpha_1\gamma_1 t_0+\beta_1\gamma_1 u_0+\gamma_1^2 v_0 & \varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) \\
\alpha_2^2 t_0+\alpha_2\beta_2 u_0+\alpha_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\beta_2 t_0+\beta_2^2 u_0+\beta_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\gamma_2 t_0+\beta_2\gamma_2 u_0+\gamma_2^2 v_0 & \varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) \\
\alpha_3^2 t_0+\alpha_3\beta_3 u_0+\alpha_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\beta_3 t_0+\beta_3^2 u_0+\beta_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\gamma_3 t_0+\beta_3\gamma_3 u_0+\gamma_3^2 v_0 & \varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)
\end{vmatrix}
$$

oder:

$$
-\frac{2}{\lambda}\begin{vmatrix}
t_0 & u_0 & v_0 \\
\alpha_2^2 t_0+\alpha_2\beta_2 u_0+\alpha_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\beta_2 t_0+\beta_2^2 u_0+\beta_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\gamma_2 t_0+\beta_2\gamma_2 u_0+\gamma_2^2 v_0 \\
\alpha_3^2 t_0+\alpha_3\beta_3 u_0+\alpha_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\beta_3 t_0+\beta_3^2 u_0+\beta_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\gamma_3 t_0+\beta_3\gamma_3 u_0+\gamma_3^2 v_0
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
t_0 & u_0 & v_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2+\varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3) \\
\alpha_2^2 t_0+\alpha_2\beta_2 u_0+\alpha_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\beta_2+\beta_2^2 u_0+\beta_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\gamma_2 t_0+\beta_2\gamma_2 u_0+\gamma_2^2 v_0 & \varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) \\
\alpha_3^2 t_0+\alpha_3\beta_3 u_0+\alpha_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\beta_3 t_0+\beta_3^2 u_0+\beta_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\gamma_3 t_0+\beta_3\gamma_3 u_0+\gamma_3^2 v_0 & \varphi(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)
\end{vmatrix}
$$

oder:

$$
-\frac{2}{\lambda}\begin{vmatrix}
t_0 & u_0 & v_0 \\
\alpha_2^2 t_0+\alpha_2\beta_2 u_0+\alpha_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\beta_2 t_0+\beta_2^2 u_0+\beta_2\gamma_2 v_0 & \alpha_2\gamma_2 t_0+\beta_2\gamma_2 u_0+\gamma_2^2 v_0 \\
\alpha_3^2 t_0+\alpha_3\beta_3 u_0+\alpha_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\beta_3 t_0+\beta_3^2 u_0+\beta_3\gamma_3 v_0 & \alpha_3\gamma_3 t_0+\beta_3\gamma_3 u_0+\gamma_3^2 v_0
\end{vmatrix} =
$$

$$= \Big[\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + \varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + \varphi(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \Big] .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} t_0 & u_0 & v_0 \\ \alpha_2^2 t_0 + \alpha_2 \beta_2 u_0 + \alpha_2 \gamma_2 v_0 & \alpha_2 \beta_2 t_0 + \beta_2^2 u_0 + \beta_2 \gamma_2 v_0 & \alpha_2 \gamma_2 t_0 + \beta_2 \gamma_2 u_0 + \gamma_2^2 v_0 \\ \alpha_3^2 t_0 + \alpha_3 \beta_3 u_0 + \alpha_3 \gamma_3 v_0 & \alpha_3 \beta_3 t_0 + \beta_3^2 u_0 + \beta_3 \gamma_3 v_0 & \alpha_3 \gamma_3 t_0 + \beta_3 \gamma_3 u_0 + \gamma_3^2 v_0 \end{vmatrix}$$

woraus folgt:

$$(12) \qquad \lambda = -\frac{2}{\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + \varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + \varphi(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)}$$

Der Wert von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ist in Gleichung (5) definiert. Es ergibt sich daraus, dass

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + \varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + \varphi(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

ist. Daher ist.

$$(13) \qquad \lambda = -\frac{2}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}$$

Die Coordinaten von N sind daher:

$$(14) \qquad N) \left\{ \begin{aligned} \xi &= -\frac{2 t_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \\ \eta &= -\frac{2 u_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \\ \zeta &= -\frac{2 v_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \end{aligned} \right.$$

oder:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_0 - \frac{2 t_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \\ y &= y_0 - \frac{2 u_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \\ z &= z_0 - \frac{2 v_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} . \end{aligned} \right.$$

Die Lage des Punktes N ist somit von den Richtungen der Strahlen a_1, a_2 und a_3 unabhängig; er ist ein gemeinsamer Punkt für alle Ebenen $A_1 A_2 A_3$, die auf die früher beschriebene Art entstanden sind.

Die Lage des Punktes N ist jedoch von den Coordinaten des Punktes M abhängig und verändert sich, wenn M seine Lage auf der Fläche F wechselt. Der geometrische Ort für alle Punkte N, die allen Punkten M der Fläche F entsprechen, ist eine Fläche F', deren Gleichung durch Elimination von x_0, y_0 und z_0 aus den Gleichungen (14) erhalten werden kann.

Um diese Rechnung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, das Coordinatensystem habe jene specielle Lage, bei welcher die xz- und yz-Ebene Hauptebenen von F sind und der Ursprung der Coordinaten auf der Fläche F liegt.

In diesem Falle ist:

$$a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = 0,\ a_{14} = 0,\ a_{24} = 0 \text{ und } a_{44} = 0.$$

Die Gleichung der Fläche F lautet daher:

$$F) \ldots a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{34} z = 0. \tag{15}$$

Ferner ist:

$$\begin{cases} t_0 = a_{11} x_0 \\ u_0 = a_{22} y_0 \\ v_0 = a_{33} z_0 + a_{34} \end{cases}$$

Daher sind die Coordinaten des Punktes N:

$$N) \begin{cases} x = x_0 - \dfrac{2 a_{11} x_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \\ y = y_0 - \dfrac{2 a_{22} y_0}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \\ z = z_0 - \dfrac{2 (a_{33} z_0 + a_{34})}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} \end{cases} \tag{16}$$

Überdies besteht die Beziehung:

$$a_{11} x_0^2 + a_{22} y_0^2 + a_{33} z_0^2 + 2 a_{34} z_0 = 0. \tag{17}$$

Die Elimination von x_0, y_0 und z_0 aus den Gleichungen (16) und (17) ergibt als Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes F':

$$\begin{aligned} (18)\ F') \ldots & \frac{a_{11} (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2}{(-a_{11} + a_{22} + a_{33})^2} x^2 + \frac{a_{22} (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2}{(a_{11} - a_{22} + a_{33})^2} y^2 + \\ & + \frac{a_{33} (a_{11} + a_{22} + {}_{33})^2}{(a_{11} + a_{22} - a_{33})^2} \left(z + \frac{a_{34}}{a_{33}}\right)^2 - \frac{a_{34}^2}{a_{33}} = 0 \end{aligned}$$

F' ist also eine Fläche zweiter Ordnung, welche mit F gemeinschaftliche Hauptebenen hat. Schreibt man Gleichung (15) in der Form:

$$(19) \qquad F) \ldots a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33}\left(z + \frac{a_{34}}{a_{33}}\right)^2 - \frac{a_{34}^2}{a_{33}} = 0,$$

so erkennt man aus den beiden Gleichungen (18) und (19), dass F und F' auch einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Die Discriminante der Fläche F lautet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

Jene der Fläche F' ist:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})^2}{(-a_{11}+a_{22}+a_{33})^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \cdot \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})^2}{(a_{11}-a_{22}+a_{33})^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})^2}{(a_{11}+a_{22}-a_{33})^2} & a_{34} \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})^2}{(a_{11}+a_{22}-a_{33})^2} \\ 0 & 0 & a_{34} \cdot \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})^2}{(a_{11}+a_{22}-a_{33})^2} & \frac{(a_{11}+a_{22}) \cdot a_{34}{}^2}{(a_{11}+a_{22}-a_{33})^2} \end{vmatrix}$$

Ein Vergleich dieser beiden Werte ergibt:

$$\Delta' = \Delta \cdot \frac{(a_{11} + a_{22} + a_{33})^6}{(-a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 \cdot (a_{11} - a_{22} + a_{33})^2 \cdot (a_{11} + a_{22} - a_{33})^2}.$$

Die Discriminanten beider Flächen haben daher immer dasselbe Vorzeichen. Auch ist das Nullwerden von Δ' durch das Verschwinden von Δ bedingt, wenn man von dem speciellen Falle absieht, in welchem

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

ist, in welchem Falle die Fläche F' ganz im Unendlichen liegt (wie aus Gleichung (18) zu ersehen).

Auch sämmtliche Unterdeterminanten von Δ' und die Unterdeterminanten dieser letzteren haben dieselben Vorzeichen wie die homologen Ausdrücke, welche man aus den Gliedern von Δ bildet und verschwinden auch gleichzeitig mit ihnen. Daraus folgt, dass die beiden Flächen F und F' stets Flächen zweiter Ordnung derselben Art sind; d. h. beide Flächen sind gleichzeitig entweder reale oder imaginäre Ellipsoide, eintheilige oder zweitheilige Hyperboloide, hyperbolische oder elliptische Paraboloide, reale oder imaginäre elliptische oder parabolische oder hyperbolische Cylinderflächen, reale oder imaginäre Kegelflächen, reale oder immaginäre parallele oder vereinigte oder sich schneidende Ebenenpaare.