9.

Transformation d'une intégrale définie.

(Par Mr. *R. Hoppe* à Keilhau près Rudolstadt.)

En intégrant par parties, on trouve

$$\int x^m \cos hx\,\partial x = -\frac{1}{h}x^m\cos(hx+\tfrac{1}{2}\pi)+\frac{m}{h}\int x^{m-1}\cos(hx+\tfrac{1}{2}\pi)\,\partial x.$$

En continuant la réduction jusqu'à ce que la puissance de x disparait de l'intégrale, on parvient à l'expression suivante:

$$\int x^m \cos hx\,\partial x = -\sum_{k=0}^{k=m}\frac{1.2\ldots k m_k}{h^{k+1}}x^{m-k}\cos(hx+\tfrac{1}{2}(k+1)\pi).$$

Pour $x=0$ le second nombre s'évanouit, excepté son dernier terme, qui a la même valeur pour $x=0$ et pour $x=2n\pi$; donc on a

$$\int_0^{2n\pi} x^m\cos hx\,\partial x = -\sum_{k=0}^{k=m-1}\frac{1.2\ldots k m_k}{h^{k+1}}(2n\pi)^{m-k}\cos\tfrac{1}{2}(k+1)\pi.$$

Or on sait que

$$l(1-2a\cos x+a^2) = -2\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{a^h}{h}\cos hx.$$

En multipliant cette équation par $x^m\partial x$, et en intégrant suivant notre formule, on obtient (en désignant $l(1-2a\cos x+a^2)$ par L):

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = 2\sum_{k=0}^{k=m-1}1.2\ldots k m_k(2n\pi)^{m-k}\cos\tfrac{1}{2}(k+1)\pi\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{a^h}{h^{k+2}}.$$

Or on a

$$\frac{1}{h^{k+2}} = \frac{1}{\Gamma(k+2)}\int_0^\infty x^{k+1}e^{-hx}\,\partial x,$$

donc

$$1.2\ldots k\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{a^h}{h^{k+2}} = \frac{1}{k+1}\int_0^\infty x^{k+1}\partial x\sum_{h=1}^{h=\infty}(ae^{-x})^h = \frac{a}{k+1}\int_0^\infty\frac{x^{k+1}\partial x}{e^x-a}$$

sous condition que $a^2 \overline{\gtrless} 1$. En substituant cette valeur, et ayant attention que

$$m_k = \frac{k+1}{m+1}(m+1)_{k+1},$$

on obtient

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = \frac{2a}{m+1}\int_0^\infty\frac{\partial x}{e^x-a}\sum_{k=0}^{k=m-1}(m+1)_{k+1}(2n\pi)^{m-k}x^{k-1}\cos\tfrac{1}{2}(k+1)\pi.$$

Posons $k-1$ au lieu de k, et écrivons $\cos\frac{1}{2}(k\pi)$ en forme imaginaire: l'équation deviendra

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = \frac{a(2n\pi)^{m+1}}{m+1}\int_0^\infty \frac{\partial x}{e^x-a}\sum_{k=1}^{k=m}(m+1)_k\left(\frac{x}{2n\pi}\right)^k\{e^{\frac{1}{2}(ik\pi)}+e^{-\frac{1}{2}(ik\pi)}\}.$$

Cette somme est ce que donne la quantité

$$\left(1+\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}+\left(1-\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}$$

lorsqu'on la développe d'après le binome, en soustrayant les deux termes extrêmes, savoir

$$2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}+\left(-\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}.$$

Donc, en la remplaçant par cette expression, on a

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = \frac{a}{m+1}\int_0^\infty \frac{\partial x}{e^x-a}\{(2n\pi+ix)^{m+1}+(2n\pi-ix)^{m+1}-2(2n\pi)^{m+1} \\ -(ix)^{m+1}-(-ix)^{m+1}\}.$$

Soit $f(x)$ une fonction développable suivant la série de *Maclaurin* pour toute valeur de x. Multiplions l'équation par

$$\frac{1}{1.2\ldots m}f^{m+1}(0),$$

posons $m=0,1,2,\ldots\infty$, et prenons la somme des équations obtenues: il viendra

$$\int_0^{2n\pi} f'(x)L\,\partial x = a\int_0^\infty \frac{\partial x}{e^x-a}\{f(2n\pi+ix)+f(2n\pi-ix)-2f(2n\pi) \\ -f(ix)-f(-ix)+2f(0)\}.$$

Bien que la généralité de cette formule subit une restriction, qui exclut de son application la plupart des fonctions les plus usitées, elle fournit les moyens de transformer l'intégrale dont il s'agit en beaucoup de cas, où la fonction f ne remplit pas la condition, sur laquelle la déduction est fondée. Il suffira d'en donner un exemple. Pour $f(x)=e^{-cx}$ la formule donne l'équation suivante:

$$\int_0^{2n\pi} e^{-cx}L\,\partial x = -\frac{2a}{c}(1-e^{-2n\pi c})\int_0^\infty \frac{1-\cos cx}{e^x-a}\partial x.$$

Multiplions-la par $\sin bc\,\partial c$, et intégrons par rapport à c, depuis 0 jusqu'à ∞, eu ayant égard que

$$\int_0^\infty e^{-cx}\sin bc\,\partial c = \frac{b}{b^2+x^2},$$

il viendra

$$b\int_0^{2n\pi}\frac{L\partial x}{b^2+x^2} = 2a\int_0^\infty\frac{\partial x}{e^x-a}\int_0^\infty(e^{-2n\pi c}-1)\sin bc(1-\cos cx)\frac{\partial c}{c}.$$

Si l'on décompose le facteur $2\sin bc(1-\cos cx)$ dans les parties $2\sin bc - \sin(x+b)c+\sin(x-b)c$, il y aura à évaluer les six intégrales suivantes:

$$2\int_0^\infty e^{-2n\pi c}\sin bc\frac{\partial c}{c} = 2\int_0^b\partial b\int_0^\infty e^{-2n\pi c}\cos bc\,\partial c$$

$$= 2\int_0^b\frac{2n\pi\,\partial b}{4n^2\pi^2+b^2} = 2\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{2n\pi},$$

$$\int_0^\infty e^{-2n\pi c}\sin(x\pm b)\frac{\partial c}{c} = \operatorname{arc\,tang}\frac{x\pm b}{2n\pi},$$

$$2\int_0^\infty\sin bc\frac{\partial c}{c} = \pi,$$

$$\int_0^\infty\sin(x+b)c\frac{\partial c}{c} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\infty\sin(x-b)c\frac{\partial c}{c} = -\tfrac{1}{2}\pi+\begin{cases}0 & (x<b)\\ \pi & (x>b),\end{cases}$$

où partout on suppose $b>0$. Ces valeurs étant substituées, l'équation devient

$$\int_0^{2n\pi}\frac{L\partial x}{b^2+x^2} = \frac{a}{b}\int_0^\infty\frac{\partial x}{e^x-a}\left\{2\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{2n\pi}-\operatorname{arc\,tang}\frac{x+b}{2n\pi}+\operatorname{arc\,tang}\frac{x-b}{2n\pi}\right\}$$
$$-\frac{a\pi}{b}\int_b^\infty\frac{\partial x}{e^x-a},$$

où

$$\int_b^\infty\frac{\partial x}{e^x-a} = -\frac{1}{a}l(1-ae^{-b}).$$

Pour $n=\infty$ on obtient l'intégrale connue

$$\int_0^\infty\frac{L\partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{b}l(1-ac^{-b}).$$

Cet exemple correspond au cas où $f(x)$ est $=\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{b}$. D'une manière semblable on pourra transformer les intégrales

$$\int_0^{2n\pi}\frac{L\partial x}{(b+x)^\alpha},\quad \int_0^{2n\pi}l(b+x)L\,\partial x,\quad \text{etc.}$$

en déplaçant x dans l'exposant à l'aide des équations

$$(b+x)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty c^{\alpha-1}e^{-(b+x)c}\partial c,\qquad l(b+x) = \int_0^\infty\frac{e^{-c}-e^{-(b+x)c}}{c}\partial c.$$

Berlin, Février 1845.