Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.

(Di LUIGI BIANCHI, *a Pisa.)*

I teoremi di cui qui do le dimostrazioni trovansi già, per la massima parte, enunciati nella mia Nota inserita nel vol. 30 degli Atti della R. Accademia di Torino (*). Credo per ciò superfluo riassumere i risultati contenuti nel presente lavoro, a cui quella Nota serve per sè di prefazione.

Soltanto richiamerò l'attenzione sulle ulteriori proprietà qui descritte di quei sistemi tripli ortogonali dello spazio ellittico, di cui fa parte una serie di superficie a curvatura nulla, in particolare sul caso notevole in cui le superficie di questa serie sono rigate.

Avverto inoltre che, per maggiore semplicità delle formole, suppongo in tutto il corso della Memoria la curvatura dello spazio eguale all'unità.

§ 1. Gli scorrimenti nello spazio ellittico.

Mi sia lecito riprodurre dalla citata Nota la parte relativa agli scorrimenti, essendo indispensabile l'aver presenti le proprietà di questi singolari movimenti dello spazio ellittico per studiare le proprietà delle superficie a curvatura nulla, che con quelle strettamente si collegano (**).

« Gli scorrimenti, assimilabili sotto molti rapporti alle ordinarie trasla-
« zioni, possono definirsi per mezzo di una loro proprietà caratteristica con-
« sistente in ciò che tutti i punti, eseguito il movimento, hanno la medesima

(*) Adunanza del 9 giugno 1895.

(**) Veggasi la Memoria di KLEIN: *Zur nicht-euklidischen Geometrie.* Mathem. Annalen, Bd. 37, pag. 544.

« distanza dalle loro rispettive posizioni iniziali. Nello spazio rappresentativo (*) essi sono le omografie biassiali i cui assi coincidono con due generatrici immaginarie coniugate dell'assoluto. Gli scorrimenti si dividono in due classi distinte e cioè in scorrimenti destrorsi o sinistrorsi secondochè gli assi della corrispondente omografia appartengono al primo ovvero al secondo sistema di generatrici dell'assoluto.

« In uno scorrimento ogni punto si sposta di un tratto costante d sopra la retta della congruenza lineare avente per assi le due generatrici fondamentali e dualmente ogni piano ruota attorno alla retta della congruenza in esso contenuta dell'angolo costante $\varphi = \frac{d}{R}$ (**). Ad ogni scorrimento corrisponde così una congruenza che si dirà una congruenza di Clifford.

« Analiticamente gli scorrimenti sono definiti dalle formole seguenti. Essendo x_1, x_2, x_3, x_4 quattro variabili reali legate dalla relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

« la formola:

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2),$$

« definisce appunto l'elemento lineare ds dello spazio ellittico di raggio R.
« Ogni movimento in questo spazio è rappresentato da una sostituzione ortogonale a determinante $+1$:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

« sulle quattro variabili x. Per gli scorrimenti valgono in particolare le formole:

$$\left.\begin{aligned}
x'_1 &= Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4 \\
x'_2 &= Bx_1 + Ax_2 - Dx_3 + Cx_4 \\
x'_3 &= Cx_1 + Dx_2 + Ax_3 - Bx_4 \\
x'_4 &= Dx_1 - Cx_2 + Bx_3 + Ax_4,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(*) La rappresentazione di cui qui si tratta è quella *geodetica* dello spazio ellittico sullo spazio euclideo, che si ottiene mediante la determinazione metrica di Cayley a quadrica fondamentale (assoluto) immaginaria.

(**) Con $\frac{1}{R^2}$ è indicata la curvatura dello spazio ellittico. In seguito, come già ho detto nella prefazione, riterrò costantemente $R = 1$.

« ovvero le altre:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4 \\ x'_2 &= Bx_1 + Ax_2 + Dx_3 - Cx_4 \\ x'_3 &= Cx_1 - Dx_2 + Ax_3 + Bx_4 \\ x'_4 &= Dx_1 + Cx_2 - Bx_3 + Ax_4, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

« secondo che lo scorrimento appartiene all'una o all'altra specie, in ambedue « i casi denotando A, B, C, D quattro costanti, legate dall'unica relazione:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

« Ora supponiamo che, nelle (1) ad esempio, siano x_1, x_2, x_3, x_4 fun- « zioni di una variabile u, sicchè le formole:

$$x_i = x_i(u) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad (3)$$

« ci definiscano una curva; se inoltre i quattro coefficienti A, B, C, D con- « tengono un nuovo parametro variabile che indichiamo con v e poniamo:

$$A = y_1(v), \qquad B = y_2(v), \qquad C = y_3(v), \qquad D = y_4(v), \qquad (4)$$

« sostituendo nelle (1), queste ci definiranno una superficie come luogo della « curva (3) che si muove nello spazio collo scorrimento continuo di prima « specie definito dalle (4). Ma d'altra parte se ordiniamo le nostre formole « rapporto a y_1, y_2, y_3, y_4 scrivendo:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \\ x'_2 &= x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_4 y_3 - x_3 y_4 \\ x'_3 &= x_3 y_1 - x_4 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_4 \\ x'_4 &= x_4 y_1 + x_3 y_2 - x_2 y_3 + x_1 y_4, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

« vediamo che la medesima superficie può anche generarsi collo scorrimento « continuo della curva:

$$y_i = y_i(v) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad (3^*)$$

« lungo la curva (3). La superficie definita dalle (5) potrà dirsi opportuna- « mente una *superficie di scorrimento*. Per definire una tale superficie basta « evidentemente dare, uscenti da un punto, le due curve generatrici (3), (3*). »

§ 2. Le rigate delle congruenze di Clifford.

Dal sistema ∞^2 di raggi di una congruenza di Clifford stacchiamone ad arbitrio una totalità semplicemente infinita; avremo così una *rigata della congruenza*. Ora diciamo che sussiste il teorema:

Qualunque rigata di una congruenza di Clifford è una superficie a curvatura assoluta nulla (*).

E infatti la nostra superficie S ammette un movimento continuo in sè medesima e cioè appunto lo scorrimento secondo la congruenza di Clifford in cui S è immersa. Ne segue che prendendo a linee coordinate $u =$ cost. sulla S le rette e a linee $v =$ cost. le loro traiettorie ortogonali, l'elemento lineare ds della superficie avrà necessariamente la forma che appartiene ad un'ordinaria superficie di rotazione (**), cioè:

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2,$$

essendo $\varphi(u)$ una funzione della sola u. Ma poichè qui le $u =$ cost. sono geodetiche, si ha:

$$\frac{d\varphi}{du} = 0,$$

e però, cangiando il parametro v, risulta semplicemente:

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

ciò che dimostra il teorema.

In particolare se in una congruenza di Clifford si considerano i raggi che si appoggiano ad una retta fissa, questi generano una particolare rigata a curvatura nulla, *la superficie di Clifford,* che possiede un doppio sistema di rette ed ammette quindi due distinti scorrimenti fra loro permutabili. Da

---

(*) Per una superficie dello spazio ellittico distinguiamo la curvatura *assoluta* K dalla *relativa* k. La prima è la curvatura che compete alla forma differenziale quadratica che ne fornisce il quadrato dell'elemento lineare. La seconda, che eguaglia il prodotto delle curvature principali ridotte, è legata alla prima dalla relazione:

$$k = K - \frac{1}{R^2}\,\cdot$$

(**) Veggasi per es. il n.° 101, pag. 158 delle mie *Lezioni di geometria differenziale*. (Pisa, Spörri, 1894.)

questa ultima circostanza Clifford traeva appunto la dimostrazione del teorema che alla sua superficie compete il valore zero per la curvatura (*). Ma, come sopra si è visto, ciò discende già dal fatto che la superficie ammette un movimento continuo in sè stessa, durante il quale le geodetiche di un sistema strisciano sopra sè stesse.

Dimostreremo in seguito (vedi § 6) che le rigate delle congruenze di Clifford sono le uniche rigate a curvatura nulla. Intanto possiamo già dare le formole più generali che definiscono una tale rigata. Osserviamo per ciò che due congruenze di Clifford della medesima specie sono sovrapponibili, onde segue che le formole (1), relative ad uno scorrimento di prima specie d'ampiezza v, possono porsi, a meno di movimenti, sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos v - x_2 \operatorname{sen} v \\ x'_2 &= x_1 \operatorname{sen} v + x_2 \cos v \\ x'_3 &= x_3 \cos v - x_4 \operatorname{sen} v \\ x'_4 &= x_3 \operatorname{sen} v + x_4 \cos v. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Supponendo che in queste formole x_1, x_2, x_3, x_4 designino quattro funzioni di una variabile u legate dalla relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

e del resto arbitrarie, avremo definita la più generale rigata di una congruenza di prima specie di Clifford. Analogamente dicasi per le congruenze di seconda specie. Senza particolarizzare la rigata (6), possiamo assumerne a profilo generatore la sezione fatta col piano $x_4 = 0$, con che le formole si presentano sotto la forma data nel n. 4 della mia Nota citata. Possiamo di più supporre che a parametro u si prenda l'arco del profilo generatore e allora le funzioni x_1, x_2, x_3, x_4 verranno inoltre legate dalla relazione:

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{du}\right)^2 = 1.$$

L'elemento lineare della superficie assume in conseguenza la forma:

$$ds^2 = du^2 + 2U du\, dv + dv^2,$$

(*) Cfr. Klein loc. cit., come anche le litografie delle *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie* (1889-90).

dove si è posto:

$$U = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ \frac{dx_3}{du} & \frac{dx_4}{du} \end{vmatrix}.$$

Verifichiamo ora subito la proprietà già dimostrata che la curvatura è nulla. E infatti ne risulta:

$$ds^2 = (1 - U^2)du^2 + (U du + dv)^2.$$

§ 3. Formole fondamentali per la teoria delle superficie (*).

Come nella geometria euclidea, così nella ellittica (e nella iperbolica) ad ogni superficie S appartengono due forme differenziali quadratiche fondamentali, dalle quali dipendono tutte le proprietà inerenti alla forma della superficie, astrazione fatta dalla sua posizione nello spazio.

Se indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate di un punto mobile della S espresse in funzione di due parametri u, v e con

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4,$$

le coordinate del piano tangente, ovvero le coordinate del polo di questo piano rispetto all'assoluto, le X sono determinate dalle equazioni simultanee (**):

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

$$\sum Xx = 0, \qquad \sum X^2 = 1.$$

Le due forme fondamentali da considerarsi sono allora le seguenti:

$$ds^2 = \sum dx^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$-\sum dx\, dX = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2.$$

Fra i loro sei coefficienti sussistono, come in geometria euclidea, tre relazioni, le quali esprimono le condizioni necessarie e sufficienti, perchè quelle due forme appartengano come forme fondamentali ad una superficie.

(*) Il lettore troverà la dimostrazione delle formole date nel presente paragrafo nei due capitoli aggiunti alla traduzione tedesca delle mie *Lezioni di geometria differenziale*.

(**) Propriamente le X risultano determinate a meno del segno, ma un cangiamento simultaneo del segno nelle coordinate di un punto riporta, nello spazio ellittico *semplice*, al punto stesso.

Queste relazioni sono date in primo luogo dalle *equazioni di Codazzi*, che si conservano precisamente le stesse come in geometria euclidea, e noi scriveremo qui sotto la seconda forma (*):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}-\\
&\qquad-2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}+\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}=0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}-\\
&\qquad-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}+\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}=0.
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

In secondo luogo abbiamo la equazione di Gauss che, a causa della curvatura $K_0 = +1$ dello spazio attuale, assume la forma modificata:

$$\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}=K-1, \qquad (B)$$

dove K indica la curvatura della prima forma fondamentale, cioè la curvatura assoluta della superficie S.

Viceversa, se le due forme:

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$
$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2,$$

soddisfano le equazioni (A) e (B), esiste una superficie dello spazio ellittico, *perfettamente determinata di forma a meno di movimenti nello spazio*, che le ammette per forme fondamentali.

Per determinare poi le x, X in funzione di u, v abbiamo allora le seguenti equazioni differenziali che valgono pei quattro valori:

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

dell'indice i:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}&=\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v}-Ex_i+DX_i\\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v}&=\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v}-Fx_i+D'X_i\\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}&=\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v}-Gx_i+D''X_i
\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

(*) *Lezioni*, ecc., pag. 91.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u} &= \frac{FD' - GD}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial v} \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

Si osserverà che, formalmente, soltanto le formole del primo gruppo (C) differiscono dalle corrispondenti in geometria euclidea pei termini additivi:

$$-Ex_i, \qquad -Fx_i, \qquad -Gx_i.$$

La superficie S' descritta dal polo del piano tangente a S si dirà la *superficie polare* di S. Essa può anche definirsi come la superficie parallela a S alla distanza di un quadrante.

Se indichiamo con

$$ds'^2 = E'du^2 + 2F'du'dv' + G'dv^2,$$

la prima forma di S', siccome la relazione fra S, S' è manifestamente invertibile, varranno ancora le formole dedotte dalle (A), (B), (C), (D), col sostituire rispettivamente ad

i coefficienti $\qquad \begin{matrix} E, & F, & G, \\ E', & F', & G'. \end{matrix}$ (*)

§ 4. Formole di Frenet.

Insieme alle formole sopra riportate dobbiamo utilizzare nel seguito le *formole di Frenet* per la teoria delle curve in geometria ellittica. Data una curva C nello spazio ellittico, abbiamo da considerare in ogni suo punto, come nell'ordinaria geometria, le tre direzioni principali e cioè la tangente, la normale principale e la binormale. Alla curva C compete poi in ogni suo punto una certa *flessione* ed una certa *torsione*. La flessione $\frac{1}{\rho}$ si misurerà sempre in valore assoluto, cioè si assumerà ρ positivo, mentre alla torsione $\frac{1}{T}$ si at-

(*) Le formole del presente paragrafo, nel caso speciale di un sistema coordinato (u, v) ortogonale, furono date la prima volta dal Fibbi nella Memoria: *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazi di curvatura costante* (Annali della Scuola Normale di Pisa, vol. 7.°, 1895).

tribuirà anche un segno che dipenderà dall'essere nel punto la curva destrorsa o sinistrorsa (*).

Indicando con

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,$$

le coordinate di un punto mobile sopra C, espresse in funzione dell'arco u, denotiamo con

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\quad \xi_4,$$

i coseni di direzione della tangente, ossia le coordinate del piano normale e similmente con

$$\eta_1,\quad \eta_2,\quad \eta_3,\quad \eta_4,$$

i coseni di direzione della normale principale, infine con

$$\zeta_1,\quad \zeta_2,\quad \zeta_3,\quad \zeta_4,$$

quelli della binormale.

Valgono allora le seguenti formole:

$$\frac{dx_i}{du}=\xi_i,\qquad \frac{d\xi_i}{du}=\frac{\eta_i}{\rho}-x_i,\qquad \frac{d\eta_i}{du}=-\frac{\xi_i}{\rho}-\frac{\zeta_i}{T},\qquad \frac{d\zeta_i}{du}=\frac{\eta_i}{T}\qquad (E)$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Esse si stabiliscono in modo simile alle formole di Frenet in geometria euclidea, delle quali qui fanno le veci (**).

Notiamo soltanto la importante conseguenza che da queste deriva col teorema:

Una curva C è pienamente determinata di forma dalle espressioni dei raggi ρ, T di prima e seconda curvatura in funzione dell'arco u.

Il lettore ricostruirà facilmente la dimostrazione affatto analoga alla corrispondente in geometria euclidea (***).

(*) Cfr. *Lezioni*, ecc., pag. 11.

(**) Se la curvatura K_0 dello spazio fosse $+\frac{1}{R^2}$ esse si scriverebbero:

$$\frac{dx_i}{du}=\frac{\xi_i}{R},\qquad \frac{d\xi_i}{du}=\frac{\eta_i}{\rho}-\frac{x_i}{R}$$

$$\frac{d\eta_i}{du}=-\frac{\xi_i}{\rho}-\frac{\zeta_i}{T}.\qquad \frac{d\zeta_i}{du}=\frac{\eta_i}{T}.$$

(***) *Lezioni*, ecc., pag. 12.

§ 5. Curve a torsione costante.

Consideriamo la superficie rigata luogo delle binormali a una curva C. Indichiamo con v la lunghezza della binormale contata a partire da C e le coordinate x'_i dell'estremo saranno date dalle formole:

$$x'_i = x_i \cos v + \zeta_i \operatorname{sen} v. \tag{7}$$

Da queste, derivando e tenendo conto delle formole (E) di Frenet, si trae per l'elemento lineare ds' della superficie:

$$ds'^2 = dv^2 + \left\{\cos^2 v + \frac{1}{T^2}\operatorname{sen}^2 v\right\} du^2. \tag{8}$$

Se si suppone $T = \text{cost.}$ l'elemento lineare (8) appartiene ad una superficie di rotazione di cui le $v = \text{cost.}$ sono i meridiani, onde il teorema:

Le superficie delle binormali delle curve a torsione costante sono applicabili sopra superficie di rotazione, le generatrici distendendosi sui meridiani.

Inversamente si può dimostrare che queste rigate sono le uniche applicabili sopra superficie di rotazione *in guisa che ai meridiani corrispondano le generatrici*, risultato importante, perchè con esso viene a precisarsi il caso d'eccezione al teorema inverso di Weingarten in geometria ellittica (*).

(*) Accenniamo qui soltanto alla dimostrazione. Sia:

$$ds^2 = dv^2 + \varphi^2(v)\, du^2,$$

l'elemento lineare di una rigata di cui le $u = \text{cost.}$ siano le generatrici e però assintotiche, onde:

$$D'' = 0.$$

Le formole di Codazzi dànno:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\varphi}\right) + 2\frac{D'}{\varphi}\cdot\frac{\varphi'}{\varphi} = 0,$$

e l'equazione di Gauss:

$$\frac{D'^2}{\varphi^2} = \frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Dalla prima integrando segue:

$$\frac{D'}{\varphi} = \frac{C}{\varphi^2} \quad (C \text{ cost.}),$$

e sostituendo nella seconda, coll'integrare di nuovo si otterrà per il ds^2 precisamente l'espressione (8) del testo.

Ma qui a noi interessa il caso particolare in cui:

$$T^2 = 1,$$

cioè la torsione della curva eguaglia in valore assoluto la curvatura dello spazio. Allora la (8) ci dà il teorema:

La superficie luogo delle binormali ad ogni curva di torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ *è una rigata a curvatura nulla.*

È facile ora dimostrare il teorema inverso:

In ogni superficie rigata a curvatura nulla le traiettorie ortogonali delle generatrici sono curve congruenti a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$.

L'elemento lineare di una tale rigata riferita alle generatrici v e alle loro traiettorie ortogonali u sia infatti:

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Poichè le v sono assintotiche sarà:

$$D = 0,$$

e inoltre, a causa di $K = 0$, per l'equazione (B) di Gauss:

$$D' = \sqrt{G}.$$

La prima equazione (A) di Codazzi dà quindi:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

onde deduciamo che anche le $u =$ cost, sono geodetiche e però ciascuna di esse ha per binormali le generatrici. Ma allora basta ricorrere alla nostra formola (8) per accertarsi che, essendo $K = 0$ e le linee u, v geodetiche, deve aversi:

$$T^2 = 1.$$

Che inoltre le dette traiettorie ortogonali siano tutte fra loro congruenti risulta da ciò che esse si corrispondono ad archi eguali e calcolando la loro flessione si trova che essa è la stessa in punti corrispondenti, mentre anche la torsione ha lo stesso valore ± 1. Dal teorema alla fine del § 4 segue quindi la verità della nostra asserzione.

§ 6. Le rigate a curvatura nulla.

Dimostriamo ora che le superficie ultimamente considerate sono rigate di una congruenza di Clifford, dopo di che, combinandovi il risultato ottenuto al paragrafo precedente, avremo stabilito il teorema già annunciato al § 2:

Qualunque rigata a curvatura nulla è una rigata di una congruenza di Clifford.

Se consideriamo infatti una superficie (7) luogo delle binormali di una curva a torsione ± 1, facilmente troviamo per le coordinate X_1, X_2, X_3, X_4 del piano tangente le formole:

$$X_i = \eta_i \cos v - \xi_i \operatorname{sen} v, \tag{9}$$

onde pei coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale si calcolano i valori:

$$D = \frac{1}{\rho}, \qquad D' = 1, \qquad D'' = 0. \tag{10}$$

Di qui segue che cangiando v in $v + c$, essendo c una costante arbitraria, tanto la prima che la seconda forma fondamentale della superficie restano inalterate e però (§ 3) esiste un movimento continuo di tutto lo spazio, pel quale la superficie scorre in sè stessa. Ma di più tutte le generatrici strisciando sopra sè stesse, il movimento è di necessità uno scorrimento, il che dimostra quanto sopra è asserito.

Adottando la definizione di Clifford per il *parallelismo* di due rette in geometria ellittica, possiamo anche enunciare il nostro risultato così:

Le binormali di ogni curva a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ *sono tutte rette fra loro parallele nel senso di Clifford.*

Aggiungiamo che, a seconda del segno della torsione, il parallelismo sarà destrorso o sinistrorso.

Consideriamo ora in una rigata a curvatura nulla le assintotiche non rettilinee. Per le (10) avremo immediatamente l'equazione in termini finiti di queste assintotiche sotto la forma:

$$2v + \int \frac{du}{\rho} = \text{cost.}$$

Osservando poi che per una tale curva i coseni di direzione della binormale sono precisamente le X_i date dalle (9) e applicando le ultime formole (E) di Frenet, stabiliremo subito il teorema:

In ogni rigata a curvatura nulla le assintotiche non rettilinee sono (come le traiettorie ortogonali delle generatrici) curve a torsione costante ± 1.

Questo del resto non è che un caso particolare del teorema di Enneper in geometria ellittica.

È facile stabilire inversamente che ogni curva C a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ appartiene, come curva assintotica, ad ∞^1 superficie rigate a curvatura nulla. Ritenendo per la curva C le notazioni del § 4 e ponendo:

$$\sigma = \int \frac{du}{\rho},$$

le superficie richieste si troveranno date dalle formole:

$$x'_i = x_i \cos v + (\xi_i \cos\sigma - \eta_i \operatorname{sen}\sigma) \operatorname{sen} v, \tag{11}$$

il che dà per l'elemento lineare della superficie riferita alle assintotiche u, v:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\sigma\, du\, dv + dv^2. \tag{12}$$

§ 7. La superficie di Clifford.

Esaminiamo ora il caso particolare della superficie di Clifford, quando cioè anche le assintotiche del secondo sistema sono rettilinee. Possiamo ottenere le formole relative dalle (11) supponendo che la curva C sia una retta, a cui attribuiamo la torsione costante $\frac{1}{T} = 1$. Basterà per ciò prendere i valori delle

$$x_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad \zeta_i,$$

in guisa da soddisfare le formole (E) di Frenet in cui si faccia:

$$\frac{1}{\rho} = 0, \qquad \frac{1}{T} = 1.$$

Prendiamo ad esempio:

$$\begin{array}{llll}
x_1 = \cos u & x_2 = \operatorname{sen} u & x_3 = 0 & x_4 = 0 \\
\xi_1 = -\operatorname{sen} u & \xi_2 = \cos u & \xi_3 = 0 & \xi_4 = 0 \\
\eta_1 = 0 & \eta_2 = 0 & \eta_3 = \cos u & \eta_4 = \operatorname{sen} u \\
\zeta_1 = 0 & \zeta_2 = 0 & \zeta_3 = \operatorname{sen} u & \zeta_4 = -\cos u
\end{array}$$

e per definire la superficie di Clifford riferita alle assintotiche u, v avremo dalle (11) le formole:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos u \cos v - \cos\sigma \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ x_2 &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos\sigma \cos u \operatorname{sen} v \\ x_3 &= \operatorname{sen}\sigma \cos u \operatorname{sen} v \\ x_4 &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

essendo qui σ una costante arbitraria e per l'elemento lineare varrà la formola (12):

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\sigma\, du\, dv + dv^2.$$

I coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie di Clifford hanno i valori:

$$D = 0, \qquad D' = \operatorname{sen}\sigma, \qquad D'' = 0.$$

La superficie di Clifford ha quindi costanti ambedue i raggi principali di curvatura, circostanza che si rende anche manifesta dall'esistenza di due distinti scorrimenti della superficie in sè stessa. Aggiungiamo che la proprietà di avere costanti i raggi principali di curvatura appartiene soltanto alla superficie di Clifford e alla sfera.

Le traiettorie ortogonali delle generatrici sono curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ (§ 5), ma di più attualmente anche la loro flessione è costante. E invero la formola:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

che anche in geometria ellittica dà la flessione della geodetica, spiccata nella direzione fissata dal rapporto $\frac{dv}{du}$, dimostra che per le dette traiettorie ortogonali, le cui equazioni in termini finiti sono:

$$v + u\cos\sigma = \text{cost.}$$

$$u + v\cos\sigma = \text{cost.},$$

si avrà:

$$\frac{1}{\rho} = \cot\sigma.$$

Per ciò le formole (13), dove si faccia:

$$v = -u\cos\sigma,$$

dànno la curva coi raggi di curvatura costanti:

$$\rho = \operatorname{tg}\sigma, \qquad T = 1.$$

Consideriamo ora le linee di curvatura della superficie di Clifford, le cui equazioni in termini finiti sono:

$$v - u = \text{cost.}, \qquad v + u = \text{cost.}$$

Esse sono linee geodetiche e però in piani normali alla superficie; di più poichè i raggi di curvatura sono costanti esse sono circoli, tutti quelli di un medesimo sistema avendo egual raggio. In fine si osserverà che il luogo dei centri dei circoli di un sistema è una retta normale a tutti i loro piani (*), sicchè la superficie di Clifford è suscettibile della semplice generazione seguente che non sembra osservata:

Un circolo di raggio costante (arbitrario) il cui centro percorra una retta, restando il piano del circolo sempre normale alla retta descrive una superficie di Clifford.

(*) Tutte le proprietà ora descritte possono leggersi facilmente nelle (13), dalle quali facendo per es. $v = u$ risulta:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - (1 + \cos\sigma)\operatorname{sen}^2 u \\ x_2 &= (1 + \cos\sigma)\operatorname{sen} u \cos u \\ x_3 &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} u \cos u \\ x_4 &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}^2 u. \end{aligned}\right\}$$

Di qui si traggono le due formole:

$$x_2 \operatorname{sen}\sigma - x_3(1 + \cos\sigma) = 0$$

$$x_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2} + x_4 \cos\frac{\sigma}{2} = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2},$$

la prima delle quali dimostra che la linea di curvatura $v = u$ è piana, la seconda che tutti i suoi punti distano dal punto fisso:

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2},\quad 0,\quad 0,\quad \cos\frac{\sigma}{2}\right),$$

di questo piano della lunghezza costante:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2} \quad \text{ecc. ecc.}$$

§ 8. Le eliche in geometria ellittica.

Le proprietà delle rigate a curvatura nulla descritte nei paragrafi precedenti ravvicinano queste superficie della geometria ellittica ai *cilindri* della geometria euclidea, in particolare la superficie di Clifford al cilindro circolare retto.

Proseguiremo ancora queste analogie col definire come *eliche* della geometria ellittica quelle curve tracciate sopra le rigate a curvatura nulla, che ne tagliano sotto angolo costante le generatrici, che sono cioè geodetiche della superficie. Per studiare le nostre curve consideriamo una tale rigata come luogo delle binormali ad una curva C di torsione $\frac{1}{T}=1$, per la quale riteniamo le solite notazioni (§ 4). Le coordinate di un punto variabile sull'elica C' saranno date dalle formole:

$$x'_i = x_i \cos v + \zeta_i \operatorname{sen} v,$$

dove si ponga:

$$v = u \operatorname{tg} \alpha \qquad (\alpha \text{ cost.}).$$

Derivando coll'aver riguardo alle formole di Frenet e all'ipotesi $T=1$ e indicando cogli accenti tutti gli elementi relativi a C', troviamo in primo luogo:

$$du' = \frac{du}{\cos\alpha},$$

indi:

$$\xi'_i = -x \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} v + \xi \cos\alpha \cos v + \eta \cos\alpha \operatorname{sen} v + \zeta \operatorname{sen}\alpha \cos v.$$

Con una nuova derivazione si trovano le formole:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_i &= \eta_i \cos v - \xi_i \operatorname{sen} v \\ \frac{1}{\rho'} &= \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\rho}, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Ne seguono le altre:

$$\zeta'_i = -x \cos\alpha \operatorname{sen} v - \xi \operatorname{sen}\alpha \cos v - \eta \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} v + \zeta \cos\alpha \cos v,$$

che derivate dànno:

$$\frac{1}{T'} = \cos 2\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\rho} \quad (*). \qquad (b)$$

(*) Le formole (a), (b) si potrebbero anche scrivere subito come conseguenze delle formole generali che dànno la curvatura e la torsione di una linea geodetica di una superficie.

Eliminando ρ fra le (a), (b) si ottiene:

$$\frac{1}{T'} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\rho'} = 1,$$

ovvero:

$$\rho' \left(\frac{1}{T'} - 1 \right) = \text{cost.}$$

come relazione caratteristica fra i raggi di prima e seconda curvatura di un'elica in geometria ellittica.

Osserviamo che dalle (a), (b) risulta come per ρ costante siano costanti anche ρ' e T' e dipendentemente dai valori di ρ e di α possono ricevere valori ad arbitrio. Se ne deduce il teorema corrispondente a quello di Puiseux in geometria euclidea:

Le curve che in geometria ellittica hanno costanti ambedue i raggi di curvatura sono le eliche (geodetiche) della superficie di Clifford.

Per avere dunque la curva più generale a raggi di curvatura costanti basterà porre nelle (13) § 7

$$v = k u \qquad (k \text{ cost.}).$$

Si osserverà che se k è commensurabile la elica corrispondente è algebrica.

§ 9. Le superficie generali a curvatura nulla.

Andiamo ora a trattare delle superficie generali a curvatura nulla dello spazio ellittico, rigate o no. Dovremo perciò applicare le formole fondamentali date al § 3.

Per una superficie S a *curvatura assoluta* $K = 0$, la equazione (B) di Gauss (§ 3) ci dà:

$$\frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2} = -1.$$

Le linee assintotiche della superficie sono quindi reali e distinte e assumendole a linee coordinate u, v, avremo:

$$D = 0, \qquad D' = \sqrt{E G - F^2}, \qquad D'' = 0.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (A) di Codazzi, otteniamo:

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

ossia (cfr. *Lezioni*, ecc., n.° 67, pag. 126).

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

e cangiando i parametri u, v potremo fare senz'altro:

$$E = 1, \qquad G = 1.$$

Così per l'elemento lineare della superficie avremo:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2,$$

essendo θ l'angolo racchiuso dalle linee assintotiche. Ma poichè deve essere $K = 0$ ne risulta:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0,$$

quindi:

$$\theta = U + V,$$

indicando U una funzione di u soltanto e V una funzione di v. Abbiamo dunque il risultato:

L'elemento lineare di una superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico, riferita alle sue linee assintotiche u, v, assume la forma:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(U + V)\, du\, dv + dv^2. \tag{14}$$

Viceversa, prese ad arbitrio le due funzioni U, V di u, v rispettivamente, esiste una corrispondente superficie a curvatura nulla coll'elemento lineare (14), *le u, v essendo le assintotiche.*

L'ultima parte del teorema si dimostra subito osservando che col prendere:

$$D = 0, \qquad D' = \operatorname{sen}(U + V), \qquad D'' = 0,$$

si soddisfano le equazioni di Codazzi.

Dalla forma (14) dell'elemento lineare segue poi il teorema (cfr. *Lezioni*, ecc., loc. cit.):

In ogni quadrilatero curvilineo racchiuso sulla superficie da due assintotiche del primo e due del secondo sistema gli archi opposti hanno eguale lunghezza.

Si aggiunga che: *La somma degli angoli di un tale quadrilatero è eguale a quattro retti.*

E infatti se il quadrilatero è racchiuso dalle due coppie di assintotiche:

$$u = u_0 \qquad u = u_1$$
$$v = v_0 \qquad v = v_1,$$

e con U_0, U_1; V_0, V_1 indichiamo i valori che rispettivamente assumono su di esse U, V, la detta somma è data da:

$$U_0 + V_0 + U_1 + V_1 + \pi - (U_0 + V_1) + \pi - (U_1 + V_0) = 2\pi.$$

§ 10. Le superficie a curvatura nulla come superficie di scorrimento.

Secondo il teorema di Enneper, le assintotiche di un medesimo sistema di una nostra superficie S hanno tutte la torsione

$$\frac{1}{T} = \pm 1,$$

valendo l'uno o l'altro segno a seconda che l'assintotica appartiene al primo o al secondo sistema.

Di una di queste assintotiche, per es.:

$$u = u_0,$$

consideriamo la flessione $\frac{1}{\rho_{u_0}}$, la quale, per essere la linea assintotica, coincide colla curvatura geodetica ed è data (salvo il segno) da:

$$\frac{1}{\rho_{u_0}} = \frac{dV}{dv} = V',$$

valore indipendente da u_0. Ne segue che tutte le linee:

$$u = \text{cost.},$$

avendo le medesime espressioni pei raggi di prima e seconda curvatura in funzione dell'arco v, sono fra loro congruenti (§ 4). Lo stesso vale naturalmente per le assintotiche del secondo sistema.

Nel movimento continuo che porta una assintotica a coincidere successivamente con tutte quelle del medesimo sistema i vari punti dell'assintotica descrivono, pel § 9, archi di assintotica dell'altro sistema di eguale lunghezza, onde è facile concludere che il movimento stesso è uno scorrimento.

Ma per stabilire questo risultato in tutto rigore basterà che ci appoggiamo sul teorema:

Le tangenti condotte per i punti di una assintotica $u = u_0$ di una superficie a curvatura nulla alle assintotiche v dell' altro sistema sono rette fra loro parallele (nel senso di Clifford).

La dimostrazione di questo teorema risulta facilmente dall' applicare le formole del § 3 al caso nostro. E infatti considerando la rigata generata da quelle tangenti, basterà provare (pel § 6) che essa è a curvatura nulla. Ora indicando con t la lunghezza del tratto di generatrice contata a partire da $u = u_0$, per le coordinate x'_i dell' estremo avremo:

$$x'_i = x_i \cos t + \frac{\partial x_i}{\partial u} \operatorname{sen} t,$$

ove in x_i e $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ si faccia $u = u_0$. Derivando coll' aver riguardo alla media delle (C) § 3, troviamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial v} &= \frac{\partial x_i}{\partial v} \cos t + \left\{ \operatorname{sen}(U_0 + V) X_i - \cos(U_0 + V) x_i \right\} \operatorname{sen} t \\ \frac{\partial x'_i}{\partial t} &= - x_i \operatorname{sen} t + \frac{\partial x_i}{\partial u} \cos t, \end{aligned}\right\}$$

avendo al solito indicato con U_0 il valore di U per $u = u_0$.

Per l' elemento lineare della rigata ne segue subito:

$$ds'^2 = \sum dx_i'^2 = dv^2 + 2 \cos(U_0 + V) dv\, dt + dt^2,$$

formola che mette appunto in evidenza l' avere la rigata nulla la curvatura.

Se ritorniamo ora alla considerazione del movimento infinitesimo che porta un' assintotica u nella posizione infinitamente vicina, vediamo che tutti i suoi punti si muovono di tratti eguali secondo direzioni parallele e però il movimento stesso è uno scorrimento. Possiamo quindi enunciare il risultato finale:

Le superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico sono superficie di scorrimento che hanno per curve generatrici due curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ eguale ed opposta.

Aggiungiamo poi che, essendo le due funzioni U, V affatto arbitrarie, potremo scegliere le due curve generatrici C, C' ad arbitrio, purchè l' una sia a torsione $+1$, l' altra a torsione -1. Basterà allora collocare C, C' nello spazio in guisa che escano da un medesimo punto, avendovi a comune il piano osculatore, ma tangenti distinte. Di poi dando alla C, lungo la C', uno scorrimento destrorso o sinistrorso a seconda del segno della sua torsione, si genererà una superficie a curvatura nulla.

Si noti poi che i risultati dei §§ 1 e 5 ci pongono in grado di assegnare, con sole quadrature, tutte le curve a torsione ± 1 e quindi anche tutte le superficie a curvatura nulla.

In particolare si osservi che se delle due funzioni U, V una è costante la superficie è una rigata e ancor più in particolare una superficie di Clifford, se sono costanti ambedue.

§ 11. **Evoluta ed evolventi delle superficie a curvatura nulla.**

Se riferiamo una superficie S alle sue linee di curvatura u, v e con

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

ne indichiamo l'espressione dell'elemento lineare, con r_1, r_2 i raggi principali (ridotti) di curvatura, le formole (A) di Codazzi diventano:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} = 0 \\ &\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (A^*)$$

Ora se poniamo:

$$r_1 = \operatorname{tg} w_1, \qquad r_2 = \operatorname{tg} w_2,$$

le lunghezze w_1, w_2 sono precisamente quelle che intercedono fra un punto M di S e i rispettivi centri principali di curvatura M_1, M_2. Indicando con $x_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate di M_1, si ha:

$$x_i^{(1)} = x_i \cos w_1 - X_i \operatorname{sen} w_1.$$

Di qui derivando ed indicando con

$$\begin{matrix} E_1, & F_1, & G_1 \\ D_1, & D_1', & D_1'', \end{matrix}$$

i coefficienti della prima e seconda forma fondamentale per la prima falda S_1

dell'evoluta di S, troviamo:

$$E_1 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial u}\right)^2 + E\,\frac{\operatorname{sen}^2(w_1 - w_2)}{\operatorname{sen}^2 w_2}, \quad F_1 = \frac{\partial w_1}{\partial u}\,\frac{\partial w_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial v}\right)^2 \qquad (15)$$

$$D_1 = \frac{E}{\sqrt{G}}\,\frac{\operatorname{sen} w_1}{\operatorname{sen}^2 w_2}\,\frac{\partial w_2}{\partial v}, \quad D_1' = 0, \quad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{\operatorname{sen} w_1}\,\frac{\partial w_1}{\partial v}. \qquad (16)$$

Costruendo l'espressione:

$$k_1 = \frac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

della curvatura *relativa* di S_1, ne deduciamo:

$$k_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(w_1 - w_2)}\,\frac{\dfrac{\partial w_2}{\partial v}}{\dfrac{\partial w_1}{\partial v}}, \qquad (17)$$

e con notazione analoga per la seconda falda:

$$k_2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(w_1 - w_2)}\,\frac{\dfrac{\partial w_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial w_2}{\partial u}}. \qquad (17^*)$$

Supponiamo ora che la evolvente S sia a curvatura assoluta nulla, cioè si abbia:

$$r_1 r_2 = -1,$$

ossia:

$$w_1 - w_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Le (17), (17*) dànno allora subito:

$$k_1 = -1, \qquad k_2 = -1,$$

mentre le (16) dimostrano che:

$$D_1, \quad D_1', \quad D_1'',$$

sono rispettivamente proporzionali a

$$D = -\frac{E}{r_2}, \qquad D' = 0, \qquad D'' = -\frac{G}{r_1},$$

Abbiamo quindi il teorema:

I. *Le due falde dell'evoluta di una superficie a curvatura nulla sono esse stesse a curvatura nulla: alle assintotiche della evolvente corrispondono sopra ambedue le falde dell'evoluta le assintotiche.*

Osserviamo che, secondo le (15), l'elemento lineare ds_1 della prima falda S_1 è dato da:

$$ds_1^2 = dw_1^2 + E\,\frac{\text{sen}^2(w_1 - w_2)}{\text{sen}^2 w_2}\,du^2,$$

onde calcolando sopra S_1 la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_{w_1}}$ delle linee geodeticamente parallele $w_1 = \text{cost.}$ troviamo:

$$\frac{1}{\rho_{w_1}} = \cot.(w_1 - w_2). \tag{18}$$

Applicando questa formola al caso attuale, abbiamo l'ulteriore risultato:

II. *Le geodetiche inviluppate sopra ciascuna falda dell'evoluta di una superficie a curvatura nulla dalle normali della evolvente sono parallele nel senso euclideo.*

Inversamente prendiamo una superficie S_1 a curvatura nulla, nella quale tracciamo ad arbitrio un sistema di geodetiche parallele e a queste conduciamo le tangenti. Sia S una qualunque superficie normale a queste tangenti, cioè una evolvente di S_1. Poichè qui deve essere $\frac{1}{\rho_{w_1}} = 0$ la (18) ci dà:

$$w_1 - w_2 = \frac{\pi}{2},$$

cioè il teorema:

III. *Tracciando sopra una superficie a curvatura nulla un sistema qualunque di geodetiche parallele, le rette tangenti a queste geodetiche hanno per superficie normali altrettante superficie a curvatura nulla.*

§ 12. **Verifica.**

Non sarà inutile verificare direttamente le proprietà gia dimostrate al paragrafo precedente.

Riferiamo per ciò la superficie S a curvatura nulla alle sue linee assintotiche u, v e sia (§ 9):

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(2\Omega)\,du\,dv + dv^2,$$
$$\Omega = U + V,$$

il suo elemento lineare. Per le coordinate $x_i^{(1)}$ dell'uno dei centri di curvatura avremo allora:

$$x_i^{(1)} = x_i \cos\Omega - X_i \operatorname{sen}\Omega.$$

Derivando col tener conto delle formole [(*D*) § 3]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u} &= \cot(2\Omega)\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{1}{\operatorname{sen}(2\Omega)}\frac{\partial x_i}{\partial v} \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= -\frac{1}{\operatorname{sen}(2\Omega)}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \cot(2\Omega)\frac{\partial x_i}{\partial v}, \end{aligned}\right\}$$

si trae:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial u} &= \frac{1}{2\cos\Omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) - (x_i \operatorname{sen}\Omega + X_i\cos\Omega)\,U' \\ \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial v} &= \frac{1}{2\cos\Omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) - (x_i \operatorname{sen}\Omega + X_i\cos\Omega)\,V', \end{aligned}\right\}$$

da cui per l'elemento lineare ds_1 della corrispondente falda dell'evoluta risulta:

$$ds_1^2 = (1 + U'^2)du^2 + 2(1 + U'V')du\,dv + (1 + V'^2)dv^2, \tag{19}$$

formola che, ponendo:

$$\alpha = u + v, \qquad \beta = U + V,$$

diventa:

$$ds_1^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Ciò dimostra la prima parte del teorema I, § 11 ed il teorema II. La seconda parte del teorema I, si verificherebbe agevolmente osservando che le coordinate $X_i^{(1)}$ del piano tangente all'evoluta sono date da:

$$X_i^{(1)} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\Omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\right),$$

e perciò valgono le formole:

$$\sum \frac{\partial X_i^{(1)}}{\partial u}\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial X_i^{(1)}}{\partial v}\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial v} = 0.$$

Come immediata conseguenza della nostra formola (19) troviamo poi che le assintotiche $v = \text{cost.}$ sulla evoluta sono rette allorchè si abbia $U'' = 0$, cioè $U' = \text{cost.}$, nel qual caso le assintotiche della evolvente hanno, oltre la torsione $\frac{1}{T} = \pm 1$, costante la flessione. Prendendo adunque delle rigate a curvatura nulla le evolventi rispetto ad un sistema di geodetiche parallele avremo quelle superficie a curvatura nulla di cui una delle curve assintotiche generatrici ha costante la flessione. In particolare per le evolventi della superficie di Clifford ambedue le assintotiche generatrici avranno flessione costante.

§ 13. Superficie complementari.

Se combiniamo il teorema III col teorema I del § 11 ne deduciamo subito la costruzione seguente che rappresenta per le nostre superficie la trasformazione complementare (cfr. *Lezioni*, ecc., pag. 431):

Sulle rette tangenti alle geodetiche di un sistema parallelo sopra una superficie S a curvatura nulla si stacchi, a partire dal punto di contatto, un segmento eguale a un quadrante $\frac{\pi}{2}$ (*): *il luogo S' degli estremi sarà una nuova superficie a curvatura nulla.*

Possiamo facilmente dimostrare in modo più diretto questo teorema. Sulla superficie S prendansi infatti a linee coordinate v le geodetiche del sistema parallelo e le loro traiettorie ortogonali u, sicchè per l'elemento lineare avremo semplicemente:

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

ed essendo nulli tutti i simboli di Christoffel, le formole (A) di Codazzi esprimeranno semplicemente che:

$$D\,du + D'\,dv$$

$$D'\,du + D''\,dv,$$

sono differenziali esatti (**). Ora le coordinate x'_i del punto di S' corrispondente al punto x_i di S sono date evidentemente da:

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

(*) Il senso è indifferente, perchè nello spazio ellittico semplice la retta si chiude dopo un giro di π.

(**) In questo modo di trattare il problema D, D', D'' risultano le derivate seconde di una medesima funzione $\Phi(u, v)$:

$$D = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}, \qquad D' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v}, \qquad D'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2},$$

integrale dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v}\right)^2 = -1.$$

da cui per le (C) § 3 si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x'_i}{\partial u} &= D X_i - x_i\\ \frac{\partial x'_i}{\partial v} &= D' X_i,\end{aligned}\right\}$$

e quindi per l'elemento lineare di S':

$$ds'^2 = (1 + D^2)du^2 + 2DD'du\,dv + D'^2dv^2,$$

cioè:

$$ds'^2 = du^2 + (D\,du + D'\,dv)^2,$$

il che, per essere, come si è detto, $D\,du + D'\,dv$ un differenziale esatto, dimostra il teorema.

Osserviamo poi che dalle proprietà svolte alla fine del § 12 risulta che la trasformazione complementare applicata ad una rigata a curvatura nulla dà sempre nuovamente una rigata, in particolare la complementare di una superficie di Clifford è una nuova superficie di Clifford. La stessa cosa risulta anche dall'osservare che la rigata ammette uno scorrimento in sè stessa, durante il quale la complementare scorre pure sopra sè stessa; questa superficie è dunque nuovamente rigata.

In luogo di un sistema di geodetiche parallele sopra una superficie a curvatura nulla, prendiamo ora a considerare un fascio di geodetiche uscenti da un punto a distanza finita e della S costruiamo la *complementare* (*) S' rispetto a questo sistema di geodetiche.

Secondo il teorema di Weingarten (esteso alla geometria ellittica), tutte queste superficie S' costituiscono una classe completa di superficie applicabili l'una sull'altra. Per superficie tipica di questa classe si potrà prendere ad esempio la complementare di una superficie di Clifford.

Così adunque, nella geometria ellittica, troviamo con sole quadrature due classi complete di superficie applicabili, cioè le superficie a curvatura nulla e le loro complementari testè considerate. A queste due classi è da aggiungersi, come completamente nota, una terza, quella delle *superficie sviluppabili*, cioè distendibili sul piano della geometria ellittica. Queste superficie, caratterizzate dal valore $K = 1$ della curvatura assoluta, sono come le analoghe dello spazio euclideo, il luogo delle tangenti alle curve dello spazio (**).

(*) *Lezioni*, ecc., pag. 237.

(**) Il lettore dimostrerà facilmente il teorema, ricorrendo alle formole (A), (D) del § 3 e supponendovi, come è lecito;

$$F = 0, \qquad D = 0, \qquad D' = 0.$$

§ 14. Sistemi tripli ortogonali nello spazio ellittico.

Affinchè l'elemento lineare:

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2,$$

appartenga allo spazio di curvatura di RIEMANN $K_0 = 1$ è necessario e sufficiente che le funzioni H_1, H_2, H_3 delle tre variabili u_1, u_2, u_3 soddisfino le sei equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H_l}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\frac{\partial H_l}{\partial u_k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\frac{\partial H_l}{\partial u_i} \\ &\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\right) + \frac{1}{H_l^2}\frac{\partial H_i}{\partial u_l}\frac{\partial H_k}{\partial u_l} + H_i H_k = 0, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

dove con ikl si indica una qualunque permutazione degli indici 123.

Supposte le (20) soddisfatte, per determinare in funzione di u_1, u_2, u_3, le coordinate:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4,$$

di un punto dello spazio, legate dalla solita relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

tali dunque che si abbia:

$$\sum dx_i^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2,$$

valgono le osservazioni seguenti.

Poniamo:

$$\xi_\nu^{(i)} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

sicchè:

$$\xi_1^{(i)}, \quad \xi_2^{(i)}, \quad \xi_3^{(i)}, \quad \xi_4^{(i)},$$

sono i coseni di direzione della tangente alla linea coordinata (u_i). Allora se consideriamo le quattro funzioni:

$$x_\nu, \quad \xi_\nu^{(1)}, \quad \xi_\nu^{(2)}, \quad \xi_\nu^{(3)},$$

per un valore fisso qualunque di ν, esse soddisfano al sistema di equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u_i} &= H_i \xi^{(i)} \\
\frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial u_i} &= \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} \xi^{(i)} \\
\frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial u_l} &= \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_l}{\partial u_k} \xi^{(l)} \\
\frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial u_k} &= -\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \xi^{(i)} - \frac{1}{H_l} \frac{\partial H_k}{\partial u_l} \xi^{(l)} - H_k x,
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

le quali, appunto in virtù delle (20), formano un sistema illimitatamente integrabile.

§ 15. Sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura nulla.

Un semplice esempio dei sistemi indicati nel titolo di questo paragrafo si ha considerando una superficie a curvatura nulla e le sue parallele che sono altrettante superficie a curvatura nulla. Queste superficie parallele insieme colle sviluppabili luogo delle loro normali lungo le linee di curvatura dànno il sistema in discorso.

Volendo studiare i sistemi generali che contengono una serie di superficie a curvatura nulla procederemo in modo affatto analogo a quello tenuto al n.° 293, pag. 497 e ss. delle *Lezioni,* ecc. e dalle attuali formole (20) dedurremo che può porsi:

$$H_1 = \cos\theta, \qquad H_2 = \operatorname{sen}\theta, \qquad H_3 = \frac{\partial\theta}{\partial u_3},$$

dove la funzione θ deve soddisfare alla equazione del 2.° ordine:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} = 0, \tag{22}$$

e alle tre del 3.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right) &= -\frac{1}{\cos\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u_1} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3} \\
\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\cos\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right) &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u_2} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3} \\
\frac{\partial^3\theta}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u_1} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u_2} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3},
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

all' ultima delle quali conviene anche dare le forme equivalenti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\right)&=-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u_2}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\\ \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\right)&=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\,.\end{aligned}\right\}$$

In forza di queste equazioni si vede che l' espressione:

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2,$$

è indipendente sì da u_1 che da u_2 e però, cangiando convenientemente il parametro u_3, si può dare a questa somma il valore $=1$.

Indicando quindi con ω un angolo ausiliario, potremo porre:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}=\cos\theta\operatorname{sen}\omega\,,\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}=\operatorname{sen}\theta\cos\omega\,,$$

dopo di che le (23) diventano semplicemente:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_1}=\frac{\partial\omega}{\partial u_2}\,,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_2}=\frac{\partial\omega}{\partial u_1}\,,$$

e queste traggono seco evidentemente la (22). Avremo dunque un sistema triplo ortogonale della specie richiesta corrispondente alla forma:

$$ds^2=\cos^2\theta\,du_1^2+\operatorname{sen}^2\theta\,du_2^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2du_3^2, \tag{24}$$

dell' elemento lineare, ogniqualvolta la funzione θ sia legata ad un' altra funzione ausiliare ω dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial u_1}&=\frac{\partial\omega}{\partial u_2}\,,&\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_2}&=\frac{\partial\omega}{\partial u_1}\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}&=\cos\theta\operatorname{sen}\omega\,,&\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}&=\operatorname{sen}\theta\cos\omega.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ora questo sistema (25) si riporta facilmente alla nota equazione:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\operatorname{sen}z,$$

della teoria delle ordinarie superficie pseudosferiche, procedendo nel modo seguente.

Introduciamo in luogo di u_1, u_2 le due nuove variabili α, β:

$$\alpha = \frac{1}{2}(u_2 + u_1), \qquad \beta = \frac{1}{2}(u_2 - u_1),$$

cioè i parametri delle linee assintotiche e le (25) diventano:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial u_3} = \operatorname{sen}(\theta + \omega), \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta \partial u_3} = \operatorname{sen}(\theta - \omega). \end{aligned}\right\} \tag{25*}$$

Ma dalle due prime equazioni segue che possiamo porre:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= A + B \\ \omega &= A - B, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

dove A è una funzione delle sole variabili α, u_3 e B delle due β, u_3. Dopo di ciò le due ultime (25*) ci dànno:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial u_3} = \operatorname{sen}(2A) \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \beta \partial u_3} = \operatorname{sen}(2B). \tag{27*}$$

Abbiamo così tanto per la funzione A che per la B la equazione tipica da cui dipende la ricerca delle ordinarie superficie pseudosferiche. E poichè inversamente se A, B sono rispettivamente integrali dalla (27), (27*) le funzioni θ, ω date dalle (26) soddisfano le (25*), ossia le (25), possiamo enunciare il notevole risultato:

Ad ogni coppia di superficie pseudosferiche dello spazio ordinario, prese ad arbitrio, corrisponde un sistema triplo ortogonale (24) *dello spazio ellittico con una serie di superficie a curvatura nulla.*

I nostri sistemi tripli ortogonali vengono quindi visibilmente a dipendere da quattro funzioni arbitrarie.

§ 16. Sistemi complementari.

È chiaro che la funzione ω definita dalla seconda delle (26) verifica le medesime condizioni della θ e perciò l'elemento lineare:

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2, \tag{28}$$

definisce alla sua volta un secondo sistema triplo ortogonale della medesima specie del sistema (24). Due tali sistemi si diranno *complementari* per la ragione che andiamo ora ad esporre.

Nel sistema triplo ortogonale (24) consideriamo sulle superficie a curvatura nulla $u_3 = \text{cost.}$ *le linee di livello:*

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = \text{cost.}$$

e dimostriamo che esse formano un sistema di linee geodetiche parallele.

A causa delle due ultime (25*) l'equazione differenziale delle linee di livello può scriversi:

$$\cos\theta \operatorname{sen}\omega \, d u_1 + \operatorname{sen}\theta \cos\omega \, d u_2 = 0,$$

e quindi quella delle traiettorie ortogonali:

$$\cos\theta \cos\omega \, d u_1 - \operatorname{sen}\theta \cos\omega \, d u_2 = 0.$$

Ma le due prime (25) ci dimostrano che i primi membri delle due equazioni precedenti sono, rapporto a u, v, i differenziali esatti di due funzioni che indichiamo con φ, ψ (*), onde avremo:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta \operatorname{sen}\omega \, d u_1 + \operatorname{sen}\theta \cos\omega \, d u_2 &= d\varphi \\ \cos\theta \cos\omega \, d u_1 - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega \, d u_2 &= d\psi, \end{aligned}\right\}$$

da cui quadrando e sommando si ottiene:

$$\cos^2\theta \, d u_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d u_2^2 = d\varphi^2 + d\psi^2,$$

con che appunto è dimostrata l'asserzione superiore.

Ora diciamo che:

Se di ciascuna superficie a curvatura nulla del sistema (24) *si assume la complementare rispetto alle geodetiche parallele di livello, le nuove superficie a curvatura nulla ottenute dànno appunto luogo al sistema* (28).

E infatti se adoperiamo le notazioni del § 14 e indichiamo con

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \eta_4,$$

i coseni della direzione tangente in un punto ad una linea di livello $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = \text{cost.}$,

(*) La stessa cosa si vede subito trasformando le dette espressioni in coordinate α, β perchè esse diventano rispettivamente:

$$\operatorname{sen}(2A)\,d\alpha + \operatorname{sen}(2B)\,d\beta$$
$$\cos(2A)\,d\alpha - \cos(2B)\,d\beta.$$

avremo per le (25):

$$\eta_i = \xi_i^{(1)} \cos\omega - \xi_i^{(2)} \operatorname{sen}\omega. \tag{29}$$

Ora le formole generali (21) applicate al nostro sistema (24) dànno le formole:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial u_1} = \frac{\partial \theta}{\partial u_2}\xi_i^{(2)} + \operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(3)} - \cos\theta\, x_i, \quad \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial u_2} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}\xi_i^{(2)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial u_3} = \operatorname{sen}\omega\,\xi_i^{(3)}\\
&\frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial u_1} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_2}\xi_i^{(1)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial u_2} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_1}\xi_i^{(1)} - \cos\theta\,\xi_i^{(3)} - \operatorname{sen}\theta\, x_i, \quad \frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial u_3} = \cos\omega\,\xi_i^{(3)}\\
&\frac{\partial \xi_i^{(3)}}{\partial u_1} = -\operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(1)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(3)}}{\partial u_2} = \cos\theta\,\xi_i^{(2)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(3)}}{\partial u_3} = -\operatorname{sen}\omega\,\xi_i^{(1)} - \cos\omega\,\xi_i^{(2)} - \frac{\partial \theta}{\partial u_3}x_i\\
&\frac{\partial x_i}{\partial u_1} = \cos\theta\,\xi_i^{(1)}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(2)}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_3} = \frac{\partial \theta}{\partial u_3}\xi_i^{(3)}.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Calcolando con queste formole le derivate delle η dalle (29) troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \eta_i}{\partial u_1} = \cos\omega(\operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(3)} - \cos\theta\, x_i)\\
&\frac{\partial \eta_i}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\omega(\cos\theta\,\xi_i^{(3)} + \operatorname{sen}\theta\, x_i)\\
&\frac{\partial \eta_i}{\partial u_3} = -(\operatorname{sen}\omega\,\xi_i^{(1)} + \cos\omega\,\xi_i^{(2)})\frac{\partial \omega}{\partial u_3},
\end{aligned}\right\}$$

da cui risulta:

$$\sum d\eta_i^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3,$$

formola che dimostra il teorema.

§ 17. Sistemi con superficie a curvatura nulla rigate.

Abbiamo dimostrato alla fine del § 15 l'effettiva esistenza dei nostri sistemi tripli ortogonali, riferendoci alla teoria delle superficie pseudosferiche ordinarie. Ora consideriamo una classe molto notevole di questi sistemi che si ottiene assumendo eguale a zero l'una o l'altra delle funzioni A, B al § 15. Prendiamo per es. $B = 0$, cioè $\theta = \omega$ e allora basterà che la funzione θ delle variabili $u_1 + u_2$, u_3 soddisfi l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Ma poichè sopra una superficie a curvatura nulla $u_3 = \text{cost.}$, θ è funzione di $u_1 + u_2$ soltanto, ne risulta che le linee *assintotiche* $u_1 + u_2 = \text{cost.}$, sono rette e perciò:

Nei sistemi tripli ortogonali in discorso le superficie $u_3 = \text{cost.}$ *sono rigate a curvatura nulla.*

La stessa cosa risulta dall'osservare che le dette linee assintotiche coincidono nel caso attuale colle linee di livello e però sono geodetiche parallele (§ 16).

Come caso particolare del risultato ottenuto alla fine del § 15 abbiamo qui il teorema:

Ad ogni superficie pseudosferica dello spazio euclideo corrisponde un sistema triplo ortogonale dello spazio ellittico, nel quale le superficie di una serie sono rigate a curvatura nulla.

Un'altra singolare proprietà degli attuali sistemi merita di essere osservata. Se cangiamo le variabili u_1, u_2 ponendo nuovamente:

$$u_2 + u_1 = 2\alpha, \qquad u_2 - u_1 = 2\beta,$$

l'elemento lineare (24) diventa:

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos(2\theta)\,d\alpha\,d\beta + d\beta^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

e poichè θ è funzione solo di α, u_3 (indipendente da β) le superficie $\alpha = \text{cost.}$ che hanno l'elemento lineare:

$$ds^2 = d\beta^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

sono rigate a curvatura nulla. Ma in queste superficie le traiettorie ortogonali delle generatrici sono curve a torsione ± 1 (§ 5); dunque sussiste il teorema:

Nei sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie rigate a curvatura nulla le traiettorie ortogonali di queste superficie sono curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$.

Ne segue che sulle superficie delle altre due serie le linee di curvatura di un sistema sono curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$. Le superficie poi che sono luogo di assintotiche curvilinee corrispondenti sulle $u_3 = \text{cost.}$ posseggono un doppio sistema ortogonale di curve colla torsione $\frac{1}{T} = \pm 1$, quelle dell'un sistema essendo inoltre geodetiche.

In fine osserveremo che se dello spazio ellittico si fa la nota rappresentazione *conforme* sullo spazio euclideo, i sistemi tripli ortogonali della specie ora studiata hanno per immagini sistemi tripli ortogonali dello spazio ordinario e poichè le rette dello spazio ellittico hanno per immagini circoli che tagliano in punti diametralmente opposti una sfera fissa, ne concludiamo:

Ad ogni superficie pseudosferica (dello spazio euclideo) corrisponde univocamente un sistema triplo ortogonale ordinario, in cui le superficie di una serie sono CERCHIATE *e precisamente luoghi di circoli, che tagliano in punti diametralmente opposti una sfera fissa.*

Si aggiunga che tutte queste superficie cerchiate sono integrali di una medesima equazione a derivate parziali del secondo ordine, la quale esprime che le superficie obiettive dello spazio ellittico sono a curvatura nulla. Di più è evidente che i circoli *non sono* linee di curvatura, perchè corrispondono alle assintotiche della superficie obiettiva. Inoltre i circoli stessi insieme colle loro traiettorie ortogonali formano, sulle superficie in discorso, un sistema isotermo.

§ 18. Trasformazione di Bäcklund.

Ai sistemi tripli ortogonali finora studiati sono applicabili quei metodi di trasformazione che ho esposto pei sistemi pseudosferici ordinari al Cap. XX delle *Lezioni*, ecc. Qui mi limiterò a dare le formole effettive che servono per siffatte trasformazioni, sulle quali formole sarà poi facile verificare tutte le proprietà asserite.

Consideriamo uno dei nostri sistemi definito dalla forma (24) dell'elemento lineare dello spazio, essendo ζ, ω due funzioni legate dalle (25). Indicando con φ un terzo angolo incognito e con σ un angolo costante, si determini φ dal sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} = \cot\sigma \operatorname{sen}(\varphi + \zeta) \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \frac{\partial \theta}{\partial u_1} = - \cot\sigma \operatorname{sen}(\varphi + \zeta) \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u_3} + \frac{\partial \theta}{\partial u_3} = - \operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}(\varphi + \omega) \text{ (*)},
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

(*) Se in particolare $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ritorniamo alla trasformazione complementare (§ 16), giacchè allora ne segue:

$$\varphi = - \omega.$$

ossia dalla corrispondente equazione ai differenziali totali:

$$d\varphi = \left(\cot\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta) - \frac{\partial\theta}{\partial u_2}\right)du_1 - \left(\cot\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta) + \frac{\partial\theta}{\partial u_1}\right)du_2 -$$
$$- \left(\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\omega) + \frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)du_3. \tag{31*}$$

Le condizioni d'*illimitata* integrabilità per le (31) o (31*) sono qui identicamente soddisfatte a causa delle (25); perciò la soluzione generale φ del sistema (31) contiene una costante arbitraria. Preso l'angolo φ eguale a una soluzione particolare qualsiasi delle (31), conduciamo a ciascuna superficie a curvatura nulla $u_3 = \mathrm{cost.}$ in ogni suo punto (x_i) una tangente inclinata sulle linee di curvatura $u_2 = \mathrm{cost.}$ precisamente dell'angolo φ e sopra questa tangente stacchiamo, a partire dal punto di contatto, un segmento eguale alla costante σ. Se con x'_i indichiamo le coordinate dell'estremo, avremo manifestamente:

$$x'_i = x_i\cos\sigma + (\xi_i^{(1)}\cos\varphi + \xi_i^{(2)}\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma. \tag{32}$$

Calcolando le derivate delle x'_i, osservando le (30) § 16 e le (31), troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'_i}{\partial u_1} &= \cos\sigma\cos\varphi\cos(\varphi+\theta)\xi_i^{(1)} + \cos\sigma\cos\varphi\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)\xi_i^{(2)} + \\
&\quad + \mathrm{sen}\,\sigma\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\xi_i^{(3)} - \mathrm{sen}\,\sigma\cos\varphi\cos\theta\, x_i \\
\frac{\partial x'_i}{\partial u_2} &= \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)\xi_i^{(1)} - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos(\varphi+\theta)\xi_i^{(2)} - \\
&\quad - \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta\,\xi_i^{(3)} - \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\, x_i \\
\frac{\partial x'_i}{\partial u_3} &= [-\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\xi_i^{(1)} + \mathrm{sen}\,\sigma\cos\varphi\,\xi_i^{(2)} - \cos\sigma\,\xi_i^{(3)}]\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_3},
\end{aligned}\right\} \tag{32*}$$

e per la somma dei quadrati dei differenziali dx'_i abbiamo quindi:

$$ds'^2 = \sum dx_i'^2 = \cos^2\varphi\, du_1^2 + \mathrm{sen}^2\varphi\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2. \tag{33}$$

Questa formola ci dimostra come, per mezzo della costruzione indicata, siamo pervenuti ad un nuovo sistema triplo ortogonale. Di più le superficie $u_3 = \mathrm{cost.}$ sono nuovamente a curvatura nulla perchè dalle (31) segue che φ soddisfa alla equazione:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2} = 0.$$

§ 19. Continuazione.

La interpretazione geometrica dei risultati precedenti è così simile a quella che ho stabilito al Cap. XX delle *Lezioni*, ecc., che sarà inutile insistervi. Osserviamo soltanto che la nostra trasformazione può applicarsi non solo ai sistemi tripli ortogonali considerati ma anche alle superficie a curvatura nulla isolate. In tal caso si ottiene ogni volta una congruenza di raggi nella quale è costante la distanza dei fuochi e dei punti limiti mentre le due falde focali sono superficie a curvatura nulla. Su queste si corrispondono inoltre e linee di curvatura e assintotiche, queste ultime ad archi eguali.

Esaminiamo ora il modo di integrare il sistema (31). Trasformiamo per ciò nuovamente nelle variabili:

$$\alpha = \frac{1}{2}(u_2 + u_1), \qquad \beta = \frac{1}{2}(u_2 - u_1), \qquad u_3,$$

ed otterremo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} &= -2\cot\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta) \\ \frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial u_3} &= -\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\omega). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ma al § 15 formole (26) abbiamo posto:

$$\theta = A + B, \qquad \omega = A - B,$$

e risultando dalla prima delle (34):

$$\varphi = B' - A,$$

dove B' indica, come B, una funzione delle due variabili β, u_3, le ultime due (34) diventano:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(B'-B)}{\partial\beta} &= -2\cot\sigma\,\mathrm{sen}(B'+B) \\ \frac{\partial(B'+B)}{\partial u_3} &= -\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{sen}(B'-B). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Queste, con una piccola modificazione nelle notazioni, sono precisamente le formole della trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche ordinarie (*).

Se ci riferiamo dunque al risultato finale del § 15, vediamo che basterà saper applicare ad una delle due superficie pseudosferiche generatrici la trasformazione di Bäcklund, lasciando l'altra superficie invariata, per ottenere la trasformazione di Bäcklund del corrispondente sistema triplo ortogonale dello spazio ellittico. E così tutte le conseguenze che si sono dedotte dal *teorema di permutabilità* per lo spazio euclideo valgono pure per lo spazio ellittico, la qual cosa si può del resto dimostrare direttamente stabilendo per i nostri sistemi il teorema dato a pag. 506 delle *Lezioni*, ecc., pei sistemi pseudosferici ordinari.

In particolare si può partire da un tale sistema triplo ortogonale dello spazio ellittico che l'applicazione *illimitata* della trasformazione di Bäcklund non richieda mai altro che calcoli algebrici e di derivazione. Tale è per es. il caso se si parte dal sistema triplo corrispondente alla formola:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = e^{u_1 + u_2 + u_3}.$$

(*) *Lezioni*, ecc., pag. 427.