# Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

In den Comptes rendus (17. Januar 1898) habe ich gezeigt, wie man vermittelst einer Methode successiver Annäherungen*) zur asymptotischen Darstellung der irregulären Integrale einer linearen Differentialgleichung durch die Thomé'schen Normalreihen gelangen kann**). Ein ähnliches Verfahren kann man, wie ich im 51. Bd. der Math. Ann. gezeigt habe, anwenden, um das Verhalten der Integrale einer nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle zu untersuchen***).

Ich betrachte jetzt ein Integral einer linearen Differentialgleichung als Function eines in den Coefficienten enthaltenen Parameters und leite vermittelst successiver Annäherungen eine asymptotische Darstellung dieser Function durch eine der Differentialgleichung formell genügende Reihe her. Um die Methode zunächst in einem einfachen Falle darzustellen, wähle ich eine Differentialgleichung, welche bei verschiedenen Problemen der mathematischen Physik auftritt, nämlich die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\alpha) \qquad \frac{d\left(A\,\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + (k^2 B + C)y = 0 \dagger);$$

*) Vgl. Fuchs, Annali di Matematica 1870.

**) Vgl. Poincaré, Am. Journ. Bd. 7, Act. math. Bd. 8.

***) Vgl. meine Arbeit im 118. und 119. Bd. von Crelle's Journ.

†) Vgl. Sturm, Liouv. Journ. Bd. 1, S. 106 ff. und S. 373 ff., sowie in Betreff der spezielleren Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 B y = 0$ Picard, Traité d'Analyse Bd. III, S. 119 ff. In dem Buch von Pockels „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik" ist auch auf diejenigen Fälle hingewiesen, in welchen $u$ nur von einer Veränderlichen abhängt. Als physikalische Aufgabe, welche auf eine nicht zu specielle Differentialgleichung $(\alpha)$ führt, sei das Problem der Wärmeleitung in einem heterogenen Stab genannt.

hierin ist $k^2$ ein willkürlicher Parameter, welcher auch complexe Werthe annehmen kann; $A, B, C$ sind reelle Functionen der reellen Veränderlichen $x$, welche in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ nebst ihren Ableitungen jeder Ordnung stetig sein sollen; ausserdem sollen $A$ und $B$ für $a \leqq x \leqq b$ positiv sein. Ein Integral $y$ von $(\alpha)$, welches ebenso wie seine Ableitung $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ einen von $k^2$ unabhängigen Werth besitzt, ist bekanntlich eine ganze transcendente Function von $k^2$.

Aus der Entwicklung dieser ganzen Function nach positiven Potenzen von $k^2$ lassen sich deren charakteristische Eigenschaften, insbesondere ihr Verhalten in der Nähe der wesentlich singulären Stelle $k = \infty$, nicht oder nur schwer erkennen; unmittelbaren Aufschluss darüber giebt aber eine Entwicklung von der Form

$$(\beta) \qquad y = \cos k\omega\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right),$$

welche der Differentialgleichung $(\alpha)$ formell genügt und ähnlich gebildet ist wie die Thomé'schen Normalreihen; darin sind $\omega; \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ Functionen von $x$, welche in § 1 berechnet werden. Ich zeige, dass die Reihe $(\beta)$ die erwähnte ganze Function für grosse Werthe von $k^2$ in einem näher bezeichneten Sinne asymptotisch darstellt (§§ 2—5).

Aus dieser asymptotischen Darstellung lässt sich auf die Nullstellen und das Geschlecht der ganzen Function schliessen*). Wir wählen jedoch eine etwas andere Fragestellung.

Bei den erwähnten Problemen der mathematischen Physik kommt es auf solche Lösungen der Differentialgleichung $(\alpha)$ an, welche die Bedingungen

$$\frac{dy}{dx} - hy = 0 \quad \text{für} \quad x = a,$$

$$\frac{dy}{dx} + Hy = 0 \quad \text{für} \quad x = b$$

erfüllen, worin $h$ und $H$ positive Grössen sind, welche auch gleich Null oder unendlich gross sein können**).

Bekanntlich giebt es solche Lösungen (ausgezeichnete Lösungen) nur, wenn $k^2$ Nullstelle einer gewissen ganzen transcendenten Function $F(k^2)$ ist; man weiss, dass die Gleichung $F(k^2) = 0$ unendlich viele reelle positive Wurzeln $k^2$ (ausgezeichnete Werthe) besitzt; es ergiebt

---

*) Vgl. den zweiten Theil meines Aufsatzes „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung" (Math. Ann. Bd. 49).

**) Im Falle $h = \infty$ geht die Bedingung $\frac{dy}{dx} - hy = 0$ in $y = 0$ über.

sich dies auch aus unserer asymptotischen Darstellung der grossen ausgezeichneten Werthe, woran sich eine asymptotische Darstellung der ausgezeichneten Lösungen mit grossem Index anschliesst (§ 6).

Man wird von den gegenwärtigen Untersuchungen Gebrauch machen können, um die für die Lösung der erwähnten physikalischen Aufgaben erforderliche Entwickelung einer Function von $x$ in eine nach ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung ($\alpha$) fortschreitende Reihe zu beweisen*).

## § 1.

Wir bezeichnen mit $y$ das Integral der Differentialgleichung ($\alpha$), welches durch die Bedingungen

$$y = \alpha_0, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha_0' \quad \text{für} \quad x = a$$

fixirt ist, und beschränken $x$ auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$. Durch formale Differentiation der Reihe

$$(\beta) \qquad y = \cos k\omega\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right),$$

worin $\omega, \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ von $x$ abhängen, erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}' + \omega' \varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu}}$$

$$+ \sin k\omega \left(-k\omega'\varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}' - \omega'\varphi_{2\nu}}{k^{2\nu-1}}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos k\omega \left(-k^2\omega'^2\varphi_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}'' + 2\omega'\varphi_{2\nu+1}' + \omega''\varphi_{2\nu+1} - \omega'^2\varphi_{2\nu+2}}{k^{2\nu}}\right)$$

$$+ \sin k\omega \Bigg(-k(2\omega'\varphi_0' + \omega''\varphi_0 + \omega'^2\varphi_1)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}'' - 2\omega'\varphi_{2\nu}' - \omega''\varphi_{2\nu} - \omega'^2\varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu-1}}\Bigg).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ($\alpha$) und Nullsetzen der Coefficienten von $k^2 \cos k\omega$ und $k \sin k\omega$ erhält man

$$-\omega'^2 A + B = 0,$$
$$2A\omega'\varphi_0' + (A\omega'' + A'\omega')\varphi_0 = 0;$$

*) Vgl. Sturm und Liouville, Liouv. Journ. Bd. 1 u. 2; Stekloff, Comptes rendus 1898 (17. Jan.).

durch Nullsetzen der Coefficienten von

$$\frac{\sin k\omega}{k^{2n-1}}, \quad \frac{\cos k\omega}{k^{2n}}$$

erhält man ferner

$$\begin{aligned} & 2A\omega'\varphi_{2n}' + (A\omega'' + A'\omega')\varphi_{2n} \\ & \qquad - (A\varphi_{2n-1}'' + A'\varphi_{2n-1}' + C\varphi_{2n-1}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \\ & 2A\omega'\varphi_{2n+1}' + (A\omega'' + A'\omega')\varphi_{2n+1} \\ & \qquad + (A\varphi_{2n}'' + A'\varphi_{2n}' + C\varphi_{2n}) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \end{aligned}$$

Hieraus berechnet man

$$\omega' = \sqrt{\frac{B}{A}},$$

so dass man

$$\omega = \int_a^x \sqrt{\frac{B}{A}}\, dx$$

setzen kann, wo der positive Werth der Quadratwurzel genommen werden möge. Ferner erhält man

$$\varphi_0 = \frac{c_0}{\sqrt[4]{AB}},$$

$$\varphi_{2n} = \frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_{2n-1}'' + A'\varphi_{2n-1}' + C\varphi_{2n-1}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx + \frac{c_{2n}}{\sqrt[4]{AB}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2n+1} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_{2n}'' + A'\varphi_{2n}' + C\varphi_{2n}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx + \frac{c_{2n+1}}{\sqrt[4]{AB}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

worin die vierte Wurzel aus der positiven Grösse $AB$ positiv angenommen werden möge. Die Integrationsconstanten $c_0, c_1, \ldots$ bestimmen wir so, dass bei formaler Rechnung $y$ den Werth $\alpha_0$, $\frac{dy}{dx}$ den Werth $\alpha_0'$ für $x = a$ annimmt, welches auch der Werth von $k$ sein möge. Für $x = a$ ist

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}(a)}{k^{2\nu}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}'(a) + \omega'(a)\varphi_{2\nu+1}(a)}{k^{2\nu}};$$

es muss also sein

$$\varphi_0(a) = \alpha_0,$$
$$\varphi_{2n}(a) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\varphi_1(a) = \frac{\alpha_0' - \varphi_0'(a)}{\omega'(a)},$$
$$\varphi_{2n+1}(a) = -\frac{\varphi_{2n}'(a)}{\omega'(a)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Demnach wird

$$\varphi_0 = \frac{\alpha_0 \sqrt[4]{A(a)B(a)}}{\sqrt[4]{AB}},$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_0'' + A'\varphi_0' + C\varphi_0}{\sqrt[4]{AB}}\, dx$$
$$+ \frac{(\alpha_0' - \varphi_0'(a)) \sqrt[4]{A(a)^3}}{\sqrt[4]{AB}\sqrt[4]{B(a)}},$$

$$\varphi_{2n} = \frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_{2n-1}'' + A'\varphi_{2n-1}' + C\varphi_{2n-1}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx$$
$$(n = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2n+1} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_{2n}'' + A'\varphi_{2n}' + C\varphi_{2n}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx$$
$$- \frac{\varphi_{2n}'(a) \sqrt[4]{A(a)^3}}{\sqrt[4]{AB}\sqrt[4]{B(a)}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wir werden zeigen, dass die Reihe ($\beta$) mit den soeben berechneten Werthen von $\omega$ und $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ das durch die angegebenen Anfangsbedingungen bestimmte Integral $y$ der Differentialgleichung für grosse Werthe des Parameters $k$ asymptotisch darstellt.

## § 2.

Wir bringen die Reihe ($\beta$) in Verbindung mit einer der Differentialgleichung ($\alpha$) genügenden convergenten Reihe, welche man durch ein Verfahren successiver Annäherungen erhält.

Die Functionen

$$e^{ik\omega}\varphi, \quad e^{-ik\omega}\varphi,$$

wo

$$\varphi = \frac{\sqrt[4]{A(a)B(a)}}{\sqrt[4]{AB}}$$

gesetzt ist*), genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d\log A}{dx}\frac{du}{dx}$$

$$+\left(k^2\frac{B}{A}+\frac{1}{4}\left(\frac{d\log A}{dx}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log\sqrt{\frac{B}{A}}}{dx}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{d^2\log(AB)}{dx^2}\right)u=0,$$

deren linke Seite mit $D(u)$ bezeichnet werden möge. Setzt man

$$Q=\frac{1}{4}\left(\frac{d\log A}{dx}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log\sqrt{\frac{B}{A}}}{dx}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{d^2\log(AB)}{dx^2}-\frac{C}{A},$$

so schreibt sich die Differentialgleichung ($\alpha$)

$$D(u)=Qu.$$

Wir ersetzen sie durch die Kette von Differentialgleichungen

$$D(u_0)=0,$$
$$D(u_m)=Qu_{m-1}\qquad(m=1,2,\ldots),$$

welche wir so integriren, dass für $x=a$

$$u_0=\alpha_0,\quad u_0'=\alpha_0\varphi'(a)$$
$$u_1=0,\quad u_1'=\alpha_0'-\alpha_0\varphi'(a)$$
$$u_m=0,\quad u_m'=0\qquad(m=2,3,\ldots)$$

wird. Dann ist

$$u_0=\frac{e^{ik\omega}\alpha_0\varphi}{2}+\frac{e^{-ik\omega}\alpha_0\varphi}{2},$$

$$u_1=\frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x\frac{e^{-ik\omega}Qu_0}{\omega'\varphi}dx-\frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x\frac{e^{ik\omega}Qu_0}{\omega'\varphi}dx$$
$$+\frac{(\alpha_0'-\alpha_0\varphi'(a))\,\varphi e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)}-\frac{(\alpha_0'-\alpha_0\varphi'(a))\,\varphi e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)},$$

$$u_m=\frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x\frac{e^{-ik\omega}Qu_{m-1}}{\omega'\varphi}dx$$
$$-\frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x\frac{e^{ik\omega}Qu_{m-1}}{\omega'\varphi}dx\qquad(m=2,3,\ldots).$$

---

*) Mit Rücksicht darauf, dass der Factor $\alpha_0$ in $\varphi_0=\alpha_0\varphi$ verschwinden kann.

Wir untersuchen die Convergenz der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

für $a \leqq x \leqq b$. Wir setzen

$$k = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

und beschränken uns, da es sich um eine eindeutige Function von $k^2$ handelt, auf die obere Halbebene der complexen Veränderlichen $k$

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi.$$

Für $a \leqq x \leqq b$ sei

$$|\varphi| \leqq M, \quad |\alpha_0\varphi| \leqq M_0, \quad \left|\frac{\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a)}{\omega'(a)\varphi(a)}\varphi\right| \leqq M_1,$$

$$\left|\frac{Q}{\omega'\varphi}\right| \leqq N.$$

Dann ist

$$|u_0| \leqq \frac{1}{2} M_0 e^{-r\omega\sin\vartheta} + \frac{1}{2} M_0 e^{r\omega\sin\vartheta} \leqq M_0 e^{r\omega\sin\vartheta},$$

da

$$e^{-r\omega\sin\vartheta} \leqq 1, \quad e^{r\omega\sin\vartheta} \geqq 1$$

ist. Ferner ist

$$|u_1| \leqq \frac{Me^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x M_0 N e^{2r\omega\sin\vartheta}\,dx$$

$$+ \frac{Me^{r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x M_0 N\,dx$$

$$+ \frac{M_1 e^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r} + \frac{M_1 e^{r\omega\sin\vartheta}}{2r};$$

da $\omega$ mit wachsendem $x$ zunimmt, so ist

$$\int_a^x e^{2r\omega\sin\vartheta}\,dx \leqq e^{2r\omega\sin\vartheta}(x-a),$$

also

$$|u_1| \leqq \frac{M_0 M N e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)}{r} + \frac{M_1 e^{r\omega\sin\vartheta}}{r}.$$

Wenn

$$|u_{m-1}| \leqq \frac{M_0(MN)^{m-1} e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-1}}{(m-1)!\,r^{m-1}}$$

$$+ \frac{M_1(MN)^{m-2} e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-2}}{(m-2)!\,r^{m-1}}$$

ist, so haben wir

$$|u_m| \leqq \frac{Me^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_0 N(MN)^{m-1} e^{2r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-1}dx}{(m-1)!\,r^{m-1}}$$

$$+\frac{Me^{r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_0 N(MN)^{m-1}(x-a)^{m-1}dx}{(m-1)!\,r^{m-1}}$$

$$+\frac{Me^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_1 N(MN)^{m-2} e^{2r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-2}dx}{(m-2)!\,r^{m-1}}$$

$$+\frac{Me^{r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_1 N(MN)^{m-2}(x-a)^{m-2}dx}{(m-2)!\,r^{m-1}}$$

oder

$$|u_m| \leqq \frac{M_0(MN)^m e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^m}{m!\,r^m}$$

$$+\frac{M_1(MN)^{m-1} e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-1}}{(m-1)!\,r^m}.$$

Es ist also

$$\sum_{m=0}^{\infty}|e^{ik\omega}u_m| \leqq M_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{MN(x-a)}{r}\right)^m$$

$$+\frac{M_1}{r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{MN(x-a)}{r}\right)^{m-1}.$$

Die Reihe

$$e^{ik\omega}(u_0+u_1+u_2+\cdots)$$

ist demnach für alle Werthe von $x$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ und für alle Werthe von $k$, welche der Bedingung

$$|k| \geqq R, \quad 0 \leqq \arg k \leqq \pi \qquad (R>0)$$

genügen, unbedingt und gleichmässig convergent. Dasselbe gilt für die Reihe

$$e^{ik\omega}k^n(u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Aehnlich beweist man die gleichmässige und unbedingte Convergenz der Reihen

$$\frac{e^{ik\omega}}{k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{du_m}{dx},$$

$$e^{ik\omega}k^n\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{du_m}{dx} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

in demselben Gebiete von $x$ und $k$. Aus dem oben aufgestellten Ausdruck für $u_m$ geht nämlich derjenige von $u'_m$ hervor, wenn man ausserhalb der Integralzeichen $e^{\pm ik\omega}\varphi$ durch

$$e^{\pm ik\omega}(\pm ik\omega'\varphi + \varphi')$$

ersetzt. Wenn für $a \leqq x \leqq b$

$$|\omega'\varphi| \leqq L, \quad |\varphi'| \leqq L'$$

ist, so hat man

$$|u'_m| \leqq \frac{e^{r\omega\sin\vartheta}(Lr+L')M_0N(MN)^{m-1}(x-a)^m}{m!\,r^m}$$
$$+ \frac{e^{r\omega\sin\vartheta}(Lr+L')M_1N(MN)^{m-2}(x-a)^{m-1}}{(m-1)!\,r^m},$$

woraus das Behauptete folgt. Die gleichmässige Convergenz der Reihen

$$\frac{e^{ik\omega}}{k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d^2u_m}{dx^2},$$

$$e^{ik\omega}k^n\sum_{m=n+2}^{\infty}\frac{d^2u_m}{dx^2} \qquad (n = -1, 0, 1, \ldots)$$

ergiebt sich daraus, dass $D(u_m) = Qu_{m-1}$ oder

$$\frac{d^2u_m}{dx^2} = -\frac{d\log A}{dx}\frac{du_m}{dx} - \left(k^2\frac{B}{A} + \frac{C}{A} + Q\right)u_m + Qu_{m-1}$$

ist. Es ist also

$$\lim_{m=\infty} D(u_0 + u_1 + \cdots + u_m) = D(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots).$$

Durch Addition der Gleichungen

$$D(u_0) = 0, \quad D(u_1) = Qu_0, \ldots, D(u_m) = Qu_{m-1}$$

erhält man

$$D(u_0 + u_1 + \cdots + u_m) = Q(u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1})$$

und hieraus für $m = \infty$

$$D(u_0 + u_1 + \cdots) = Q(u_0 + u_1 + \cdots);$$

d. h. die Reihe

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

genügt der Differentialgleichung $(\alpha)$.

## § 3.

Zur Untersuchung des Verhaltens der Reihenglieder $u_m$ für grosse Werthe von $k$ dient die folgende Hilfsbetrachtung.

Es sei $f(x)$ eine nebst ihren Ableitungen für $a \leqq x \leqq b$ stetige Function von $x$. Wir setzen

$$f_0 = f, \quad f_1 = \frac{d}{dx}\frac{f}{\omega'}, \quad f_2 = \frac{d}{dx}\frac{f_1}{\omega'}, \ldots.$$

Dann ist

$$e^{-ik\omega}\int_a^x e^{2ik\omega} f_\nu(x)\, dx = \frac{f_\nu(x)\, e^{ik\omega}}{2ik\omega'(x)} - \frac{f_\nu(a)\, e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)}$$

$$-\frac{1}{2ik}\, e^{-ik\omega}\int_a^x e^{2ik\omega} f_{\nu+1}(x)\, dx \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daraus folgt

$$J_1 = e^{-ik\omega}\int_a^x e^{2ik\omega} f(x)\, dx$$

$$= \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(x)}\left[f_0(x) - \frac{f_1(x)}{2ik} + \frac{f_2(x)}{(2ik)^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} f_{n-1}(x)}{(2ik)^{n-1}}\right]$$

$$- \frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)}\left[f_0(a) - \frac{f_1(a)}{2ik} + \frac{f_2(a)}{(2ik)^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} f_{n-1}(a)}{(2ik)^{n-1}}\right]$$

$$+ \frac{(-1)^n\, e^{-ik\omega} \varrho_n}{(2ik)^n},$$

wobei gesetzt ist:

$$\varrho_n = \int_a^x e^{2ik\omega} f_n(x)\, dx.$$

Es ist aber

$$\varrho_n = \frac{f_n(x)\, e^{2ik\omega}}{2ik\omega'(x)} - \frac{f_n(a)}{2ik\omega'(a)} - \frac{1}{2ik}\int_a^x e^{2ik\omega} f_{n+1}(x)\, dx.$$

Nun ist, wenn

$$k = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

gesetzt und $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ angenommen wird,

$$\left|e^{2ik\omega}\right| = e^{-2r\omega\sin\vartheta} \leqq 1,$$

$$\left|\int_a^x e^{2ik\omega} f_{n+1}(x)\, dx\right| \leqq F_{n+1}(b-a),$$

wo $F_{n+1}$ das Maximum von $|f_{n+1}(x)|$ für $a \leqq x \leqq b$ bezeichnet. Der absolute Betrag von $\varrho_n$ nähert sich demnach gleichmässig der Grenze Null, wenn $k$ mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ ins Unendliche geht. Wir schreiben

$$J_1 \sim \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f_\nu(x)}{(2ik)^\nu} - \frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f_\nu(a)}{(2ik)^\nu}$$

und sagen, die Function $J_1$ werde durch die angeschriebene Reihe asymptotisch dargestellt.

In demselben Sinne wird $\frac{dJ_1}{dx}$ asymptotisch dargestellt durch die Reihe, welche man durch formale Differentiation der asymptotischen Reihe für $J_1$ erhält:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1}{dx} \sim \frac{e^{ik\omega}}{2} &\left[f_0(x) + \frac{f_1(x)}{2ik} - \frac{f_2(x)}{(2ik)^2} + \cdots\right] \\ + \frac{e^{-ik\omega}\omega'}{2\omega'(a)} &\left[f_0(a) - \frac{f_1(a)}{2ik} + \frac{f_2(a)}{(2ik)^2} - \cdots\right], \end{aligned}$$

d. h. $\frac{dJ_1}{dx}$ unterscheidet sich von dem Ausdruck, welchen man erhält, wenn man sich in jeder Klammer auf die $n+1$ ersten Glieder beschränkt, um

$$\frac{e^{-ik\omega}}{(2ik)^n} \varrho_n',$$

wo

$$\lim_{k=\infty} \varrho_n' = 0$$

ist. Dies ergiebt sich, wenn in

$$\frac{dJ_1}{dx} = e^{ik\omega} f(x) - ik\omega' J_1$$

für $J_1$ der asymptotische Ausdruck gesetzt wird. Ebenso findet man, dass $\frac{d^2 J_1}{dx^2}$ asymptotisch dargestellt wird durch die Reihe, welche man durch zweimalige Differentiation der Reihe für $J_1$ erhält.

In ähnlicher Weise findet man

$$\begin{aligned} J_2 &= e^{ik\omega} \int_a^x e^{-2ik\omega} f(x)\, dx \\ &= -\frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(x)} \left[f_0(x) + \frac{f_1(x)}{2ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}(x)}{(2ik)^{n-1}}\right] \\ &\quad + \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)} \left[f_0(a) + \frac{f_1(a)}{2ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}(a)}{(2ik)^{n-1}}\right] \\ &\quad + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_n}{(2ik)^n}, \end{aligned}$$

wenn gesetzt wird:

$$\varrho_n = e^{2ik\omega} \int_a^x e^{-2ik\omega} f_n(x)\, dx.$$

Es ist

$$\varrho_n = -\frac{f_n(x)}{2ik\omega'(x)} + \frac{f_n(a)\, e^{2ik\omega}}{2ik\omega'(a)}$$
$$+ \frac{1}{2ik} e^{2ik\omega} \int_a^x e^{-2ik\omega} f_{n+1}(x)\, dx.$$

Wir haben

$$\left| e^{2ik\omega} \int_a^x e^{-2ik\omega} f_{n+1}(x)\, dx \right|$$
$$\leqq e^{-2r\omega \sin\vartheta} \int_a^x e^{2r\omega\sin\vartheta} F_{n+1}\, dx \leqq F_{n+1}(b-a),$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass $e^{2r\omega\sin\vartheta}$ für die obere Grenze $x$ grösser ist als an einer anderen Stelle des Integrationsweges. Daher hat auch jetzt $\varrho_n$ die vorhin angegebene Eigenschaft. Wir schreiben

$$J_2 \sim -\frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu(x)}{(2ik)^\nu} + \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu(a)}{(2ik)^\nu}.$$

Wie vorhin sieht man, dass diese asymptotische Gleichung nach $x$ differentiirt werden darf.

## § 4.

Vermittelst des in § 3 entwickelten Hilfssatzes bilden wir asymptotische Ausdrücke für die Glieder $u_m$ der in § 2 aufgestellten Reihe.

Zunächst ist

$$u_0 = \frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{2} + \frac{e^{-ik\omega}\varphi_0}{2}.$$

Demnach wird

$$u_1 = \frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{4ik} \int_a^x \frac{Q}{\omega'}\, dx - \frac{e^{-ik\omega}\varphi_0}{4ik} \int_a^x \frac{Q}{\omega'}\, dx$$
$$- \frac{e^{-ik\omega}\varphi_0}{4ik} \int_a^x \frac{e^{2ik\omega} Q}{\omega'}\, dx + \frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{4ik} \int_a^x \frac{e^{-2ik\omega} Q}{\omega'}\, dx$$
$$+ \frac{\left(\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a)\right)\varphi e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)} - \frac{\left(\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a)\right)\varphi e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)}.$$

Indem wir für das dritte und vierte Integral nach § 3 asymptotische Ausdrücke bilden, erhalten wir die asymptotische Gleichung

$$u_1 = e^{ik\omega} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{F_{1\nu}}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{F_{1\nu}}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_{1n}}{k^n},$$

wo $\varrho_{1n}$ mit unendlich wachsendem $|k|$ gleichmässig zur Grenze Null geht für $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ und für $a \leqq x \leqq b$.

Nehmen wir an, es bestehe auch die Gleichung

$$u_{m-1} = e^{ik\omega} \sum_{\nu=m-1}^{n} \frac{F_{m-1,\nu}}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=m-1}^{n} \frac{F_{m-1,\nu}}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_{m-1,n}}{k^n},$$

wo $\varrho_{m-1,n}$ die vorhin für $\varrho_{1n}$ angegebene Eigenschaft besitzt. Dann ist

$$\begin{aligned} u_m = {} & \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{QF_{m-1,\nu}}{(ik)^\nu \omega' \varphi}\,dx \\ & - \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{QF_{m-1,\nu}}{(-ik)^\nu \omega' \varphi}\,dx \\ & - \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{e^{2ik\omega} QF_{m-1,\nu}}{(ik)^\nu \omega' \varphi}\,dx \\ & + \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{e^{-2ik\omega} QF_{m-1,\nu}}{(-ik)^\nu \omega' \varphi}\,dx \\ & - \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik^{n+1}} \int_a^x \frac{Q\varrho_{m-1,n}}{\omega' \varphi}\,dx \\ & + \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik^{n+1}} \int_a^x \frac{e^{-2ik\omega} Q\varrho_{m-1,n}}{\omega' \varphi}\,dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_m = e^{ik\omega} \sum_{\nu=m}^{n} \frac{F_{m\nu}}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=m}^{n} \frac{F_{m\nu}}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_{mn}}{k^n},$$

wo $\varrho_{mn}$ die wiederholt angegebene Eigenschaft besitzt. Dabei sind die Glieder mit dem Nenner $k^{n+1}$ in das Restglied einbezogen.

Für $m > n$ setzen wir

$$u_m = \frac{e^{-ik\omega}\varrho_{mn}}{k^n}, \qquad \lim_{k=\infty} \varrho_{mn} = 0.$$

Der Gleichmässigkeit halber schreiben wir

$$u_0 = e^{ik\omega} F_0 + e^{-ik\omega} F_0.$$

Wir setzen

$$F_\nu = F_{1\nu} + F_{2\nu} + \cdots + F_{\nu\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$
$$\varrho_n = \varrho_{1n} + \varrho_{2n} + \cdots.$$

Dann ist

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$
$$= e^{ik\omega} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{F_\nu}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{F_\nu}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega} \varrho_n}{k^n}.$$

Die Reihe

$$e^{ik\omega} k^n (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots)$$

oder, was dasselbe ist, die Reihe

$$\varrho_{n+1,n} + \varrho_{n+2,n} + \cdots$$

ist für $|k| \geqq R > 0$, $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ und für $a \leqq x \leqq b$ gleichmässig convergent. Man kann also nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse $\varepsilon$ $p \geqq n$ so gross wählen, dass für alle angegebenen Werthe von $x$ und $k$

$$|\varrho_{p+1,n} + \varrho_{p+2,n} + \cdots| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Ferner kann man $R$ so gross annehmen, dass

$$|\varrho_{1n} + \varrho_{2n} + \cdots + \varrho_{pn}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Es ist demnach $|\varrho_n| < \varepsilon$ für $|k| \geqq R$, $0 \leqq \arg k \leqq \pi$, $a \leqq x \leqq b$; es besteht die asymptotische Gleichung

$$y \sim e^{ik\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F_\nu}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F_\nu}{(-ik)^\nu},$$

wo $F_0, F_1, F_2, \ldots$ reelle Functionen von $x$ sind. Setzen wir

$$\varphi_0 = 2F_0,\ \varphi_1 = 2F_1,\ \varphi_2 = -2F_2,\ \varphi_3 = -2F_3, \ldots,$$

so haben wir die asymptotische Gleichung

$$y \sim \cos k\omega \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega \left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right);$$

d. h. es ist

$$y = \cos k\omega \sum_{2\nu \leqq n} \frac{\varphi_{2\nu}}{k^{2\nu}} + \sin k\omega \sum_{2\nu+1 \leqq n} \frac{\varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu+1}} + \frac{e^{-ik\omega} \varrho_n}{k^n},$$

wo $\lim \varrho_n = 0$ ist, wenn $k$ in der angegebenen Weise ins Unendliche geht.

Für reelle Werthe von $k$ ist auch das Restglied reell. Setzt man $\varrho_n = \xi_n + i\eta_n$, so wird

$$\frac{e^{-ik\omega} \varrho_n}{k^n} = \frac{\xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega}{k^n},$$

und man hat

$$\lim \xi_n = 0, \quad \lim \eta_n = 0,$$

wenn $k$ als reelle Grösse unendlich gross wird.

## § 5.

Die soeben bewiesene asymptotische Gleichung kann differentiirt werden. Im § 3 wurde gezeigt, dass die Ableitungen der Functionen $J_1$ und $J_2$ nach $x$ asymptotisch dargestellt werden durch die Reihen, welche man durch formale Differentiation der dortigen Reihen erhält. Dasselbe gilt also auch für die mit $e^{ik\omega}$ bezw. $e^{-ik\omega}$ multiplicirten Integrale, welche in dem in § 4 aufgestellten Ausdruck für $u_m$ auftreten. Es wird demnach $\frac{du_m}{dx}$ asymptotisch dargestellt durch die Reihe, welche man durch formale Differentiation von

$$e^{ik\omega} \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{F_{m\nu}}{(ik)^{\nu}} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{F_{m\nu}}{(-ik)^{\nu}}$$

erhält, d. h. es ist

$$\frac{du_m}{dx} = e^{ik\omega} \left( \frac{\omega' F_{mm}}{(ik)^{m-1}} + \sum_{\nu=m}^{n} \frac{\omega' F_{m,\nu+1} + F_{m\nu}}{(ik)^{\nu}} \right)$$
$$+ e^{-ik\omega} \left( \frac{\omega' F_{mm}}{(-ik)^{m-1}} + \sum_{\nu=m}^{n} \frac{\omega' F_{m,\nu+1} + F'_{m\nu}}{(-ik)^{\nu}} \right)$$
$$+ \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_{mn}}{k^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varrho'_{mn} = 0.$$

Für $m > n + 1$ schreiben wir

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_{mn}}{k^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varrho'_{mn} = 0,$$

während

$$\frac{du_{n+1}}{dx} = e^{ik\omega} \frac{\omega' F_{n+1,n+1}}{(ik)^n} + e^{-ik\omega} \frac{\omega' F_{n+1,n+1}}{(-ik)^n}$$
$$+ \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_{n+1,n}}{k^n}$$

ist. Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = e^{ik\omega} \left( ik\omega' F_0 + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\omega' F_{\nu+1} + F'_{\nu}}{(ik)^{\nu}} \right)$$
$$+ e^{-ik\omega} \left( -ik\omega' F_0 + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\omega' F_{\nu+1} + F'_{\nu}}{(-ik)^{\nu}} \right) + \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_n}{k^n},$$

wo

$$\varrho'_n = \varrho'_{1n} + \varrho'_{2n} + \cdots$$

ist. Wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$e^{ik\omega}k^n \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{du_m}{dx} = \sum_{m=n+2}^{\infty} \varrho'_{mn}$$

nähert sich $\varrho'_n$ gleichmässig der Grenze Null, wenn $k$ mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ unendlich gross wird. Wir können schreiben:

$$\frac{dy}{dx} \sim \cos k\omega \left((\varphi_0' + \omega'\varphi_1) + \frac{\varphi_2' + \omega'\varphi_3}{k^2} + \cdots\right)$$
$$+ \sin k\omega \left(-k\omega'\varphi_0 + \frac{\varphi_1' - \omega'\varphi_2}{k} + \cdots\right).$$

Aehnlich findet man die asymptotische Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} \sim \cos k\omega \left(-k^2\omega'^2\varphi_0 + \cdots\right)$$
$$+ \sin k\omega \left(-k(2\omega'\varphi_0' + \omega''\varphi_0 + \omega'^2\varphi_0) + \cdots\right).$$

Nun lässt sich zeigen, dass die für $y$ gefundene asymptotische Reihe der Differentialgleichung $(\alpha)$ formell genügt. Durch Einsetzen der Reihe für $y$ wird die linke Seite von $(\alpha)$

$$\Delta(y) \sim \sum_{\nu=-2}^{+\infty} \frac{H_\nu}{k^\nu},$$

wo $H_\nu$ eine mit $\cos k\omega$ oder $\sin k\omega$ multiplicirte Function von $x$ ist, je nachdem $\nu$ gerade oder ungerade ist. Es ist

$$\Delta(y) = \sum_{\nu=-2}^{+n} \frac{H_\nu}{k^\nu} + \frac{\xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega}{k^n};$$

wenn $k$ als reelle positive Grösse ins Unendliche geht, ist

$$\lim \xi_n = 0, \quad \lim \eta_n = 0,$$
$$\lim (\xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega) = 0.$$

Wenn $H_{-2} = 0$, $H_{-1} = 0, \ldots H_{n-1} = 0$ ist, so erhält man durch Multiplication der Gleichung $\Delta(y) = 0$ mit $k^n$

$$H_n + \xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega = 0$$

und hieraus für $\lim k = +\infty$

$$H_n = 0.$$

Für $x = a$ bestehen die asymptotischen Gleichungen

$$\alpha_0 \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}(a)}{k^{2\nu}},$$

$$\alpha_0' \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi'_{2\nu}(a) + \omega'(a)\varphi_{2\nu+1}(a)}{k^{2\nu}}.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn

$$\varphi_0(a) = \alpha_0, \quad \varphi_{2\nu}(a) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$
$$\varphi_0'(a) + \omega'(a)\,\varphi_1(a) = \alpha_0', \qquad \varphi_{2\nu}'(a) + \omega'(a)\,\varphi_{2\nu+1}(a) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Dadurch, dass die asymptotische Reihe für $y$ der Differentialgleichung $(\alpha)$ formell genügen und dass die Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ für $x = a$ die soeben angegebenen Werthe annehmen sollen, ist diese Reihe vollständig bestimmt; sie muss also mit der in § 1 berechneten Reihe $(\beta)$ übereinstimmen.

Als Hauptergebniss der bisherigen Entwicklungen haben wir den Satz:

*Das durch die Anfangsbedingungen*

$$y = \alpha_0, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha_0' \quad \textit{für} \quad x = a$$

*bestimmte Integral der Differentialgleichung*

$$\frac{d\left(A\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + (k^2 B + C)\,y = 0$$

*wird durch die in* § 1 *berechnete, der Differentialgleichung formell genügende Reihe*

$$y = \cos k\omega\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right)$$

*für grosse Werthe des Parameters $k^2$ asymptotisch dargestellt; d. h. die Reihe, welche man erhält, wenn man $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2} \ldots$*) durch 0 ersetzt, unterscheidet sich von $y$ um*

$$\frac{e^{-ik\omega}\varrho_n}{k^n},$$

*wo sich $\varrho_n$ gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn der Parameter $k$ mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ ins Unendliche geht.*

## § 6.

Wir bezeichnen mit $y$ das Integral der Differentialgleichung $(\alpha)$ mit den Anfangsbedingungen

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = h \quad \text{für} \quad x = a,$$

wo $h$ eine positive Grösse ist. Es bestehen dann die asymptotischen Gleichungen

$$y \sim \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}}{k^{2\nu}} + \sin k\omega \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}}{k^{2\nu-1}},$$

---

*) Dabei ist $n$ irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, ....

$$\frac{dy}{dx} \sim \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}' + \omega' \varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu}}$$

$$+ \sin k\omega \left( - k\omega' \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}' - \omega' \varphi_{2\nu}}{k^{2\nu-1}} \right),$$

wenn in den in § 1 aufgestellten Formeln für $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_0' = h$$

gesetzt wird; daraus folgt, wenn unter $H$ wieder eine positive Grösse verstanden wird, die asymptotische Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Hy \sim \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}' + H\varphi_{2\nu} + \omega' \varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu}}$$

$$+ \sin k\omega \left( - k\omega' \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}' + H\varphi_{2\nu-1} - \omega' \varphi_{2\nu}}{k^{2\nu-1}} \right).$$

Der Werth, welchen die Function

$$\frac{dy}{dx} + Hy$$

für $x = b$ annimmt und welcher eine ganze transcendente Function von $k^2$ ist, werde mit $F(k^2)$ bezeichnet; es ist

$$F(k^2) \sim \cos k\varpi \left( \gamma_0 + \frac{\gamma_2}{k^2} + \cdots \right)$$

$$+ \sin k\varpi \left( \gamma_{-1} k + \frac{\gamma_1}{k} + \frac{\gamma_3}{k^3} + \cdots \right);$$

dabei ist

$$\varpi = \omega(b) = \int_a^b \sqrt{\frac{B}{A}}\, dx,$$

und $\gamma_{-1}, \gamma_0, \ldots$ sind die Werthe, welche die Functionen

$$- \omega' \varphi_0, \ \varphi_0' + H\varphi_0 + \omega' \varphi_1, \ldots,$$

in welchen $\alpha_0 = 1$, $\alpha_0' = h$ gesetzt ist, für $x = b$ annehmen.

Die Werthe von $k^2$, für welche die Differentialgleichung $(\alpha)$ ein die Bedingungen

$$\frac{dy}{dx} - hy = 0 \quad \text{für} \quad x = a,$$

$$\frac{dy}{dx} + Hy = 0 \quad \text{für} \quad x = b$$

erfüllendes Integral besitzt, sind die Wurzeln der Gleichung

$$F(k^2) = 0.$$

Wir lösen zunächst diese Gleichung, nachdem für $F(k^2)$ der asymptotische Ausdruck gesetzt ist, formal auf. Es ist

$$k\varpi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\gamma_0 + \frac{\gamma_2}{k^2} + \cdots}{\gamma_{-1}k + \frac{\gamma_1}{k} + \cdots}\right)$$

$$= \frac{\delta_1}{k} + \frac{\delta_3}{k^3} + \cdots + 2\lambda\pi,$$

wo $\delta_1 = -\frac{\gamma_0}{\gamma_{-1}}$ u. s. w. ist, während $\lambda$ eine ganze Zahl ist, welche wir positiv annehmen. Setzt man

$$k = \frac{2\pi}{\varpi(1+\varkappa)},$$

so erhält man zwischen $\varkappa$ und $\lambda$ die Gleichung

$$0 = \varkappa - \varkappa^2 + \cdots + \frac{\delta_1\varpi(1+\varkappa)}{\lambda^2\pi^2} + \frac{\delta_3\varpi^3(1+\varkappa)^3}{\lambda^4\pi^4} + \cdots,$$

aus welcher man

$$\varkappa = \frac{\varkappa_2}{\lambda^2} + \frac{\varkappa_4}{\lambda^4} + \cdots$$

berechnet, wo

$$\varkappa_2 = -\frac{\delta_1\varpi}{\pi^2}$$

ist. Demnach ist

$$k = \frac{\lambda\pi}{\pi\left(1 + \frac{\varkappa_2}{\lambda^2} + \frac{\varkappa_4}{\lambda^4} + \cdots\right)}$$

oder

$$k = \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \frac{\varepsilon_3}{\lambda^3} + \cdots.$$

Dabei ist

$$\varepsilon_1 = -\frac{\pi\varkappa_2}{\varpi} = \frac{\delta_1}{\pi} = -\frac{\gamma_0}{\pi\gamma_{-1}}.$$

Um die Bedeutung der durch formale Rechnung gefundenen Reihenentwickelung für $k$ zu erkennen, beachten wir, dass

$$F(k^2) = \cos k\varpi\left(\gamma_0 \quad + \frac{\gamma_2}{k^2} + \cdots + \frac{\gamma_{2n-2}}{k^{2n-2}} + \frac{\xi}{k^{2n-1}}\right)$$

$$= \sin k\varpi\left(\gamma_{-1}k + \frac{\gamma_1}{k} + \cdots + \frac{\gamma_{2n-1}}{k^{2n-1}} + \frac{\eta}{k^{2n-1}}\right)$$

ist, wo

$$\lim \xi = 0, \quad \lim \eta = 0$$

ist, wenn $k$ als reelle positive Grösse ins Unendliche geht*). Nun schreibt sich die Gleichung $F(k^2) = 0$ in der Form

$$f(k) = -k\varpi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\gamma_0 + \cdots + \frac{\gamma_{2n-2}}{k^{2n-2}} + \frac{\xi}{k^{2n-1}}}{\gamma_{-1}k + \cdots + \frac{\gamma_{2n-1}}{k^{2n-1}} + \frac{\eta}{k^{2n-1}}}\right)$$

$$= -k\varpi + \lambda\pi + \frac{\delta_1}{k} + \cdots + \frac{\delta_{2n-1}}{k^{2n-1}} + \frac{\tau}{k^{2n-1}} = 0,$$

*) Vgl. den Schluss von § 4.

wo

$$\lim_{k=+\infty} \tau = 0$$

ist. Die Gleichung

$$f_n(k) = -k\varpi + \lambda\pi + \frac{\delta_1}{k} + \cdots + \frac{\delta_{2n-1}}{k^{2n-1}} = 0$$

kann auf dem vorhin eingeschlagenen Wege gelöst werden, da jetzt nur convergente Reihen auftreten. Ersetzt man in der oben ausgeführten formalen Rechnung $\delta_{2n+1}, \delta_{2n+3}, \ldots$ durch 0, so bleiben die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{2n-1}$ ungeändert, und man erhält die für hinreichend grosse Werthe von $\lambda$ convergente Reihe

$$K_\lambda = \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \cdots + \frac{\varepsilon_{2n-1}}{\lambda^{2n-1}} + \frac{\varepsilon'_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}} + \cdots,$$

welche, jedem grossen ganzen positiven $\lambda$ entsprechend, eine Wurzel der Gleichung $f_n(k) = 0$ darstellt. Wir bezeichnen mit $\delta$ eine beliebig kleine positive Zahl und zeigen, dass, wenn man $\lambda$ hinreichend gross nimmt, zwischen $K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}$ und $K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}$ eine Wurzel $k_\lambda$ der Gleichung $f(k) = 0$ liegt. Es ist nämlich

$$f\left(K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right) = f(K_\lambda) + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}} f'\left(K_\lambda + \Theta \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right),$$

$$f\left(K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right) = f(K_\lambda) - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}} f'\left(K_\lambda - \Theta_1 \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right),$$

wo $\Theta$ und $\Theta_1$ zwischen 0 und 1 liegen; wir haben

$$f(K_\lambda) = \frac{\tau(K_\lambda)}{K_\lambda^{2n-1}}, \qquad \lim_{\lambda=\infty} \tau(K_\lambda) = 0,$$

während sich

$$f'\left(K_\lambda + \Theta \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right)$$

und

$$f'\left(K_\lambda - \Theta_1 \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right)$$

mit unendlich wachsendem $\lambda$ dem Grenzwerth $-\varpi$ nähern. Daraus folgt, dass

$$f\left(K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right), \quad f\left(K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right)$$

für hinreichend grosse Werthe von $\lambda$ verschiedene Vorzeichen besitzen. Die Gleichung $f(k) = 0$ hat also eine Wurzel $k_\lambda$, welche die Bedingung

$$K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}} < k_\lambda < K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}$$

oder

$$|\lambda^{2n-1}(k_\lambda - K_\lambda)| < \delta$$

erfüllt. Setzt man

$$k_\lambda = \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \cdots + \frac{\varepsilon_{2n-1}}{\lambda^{2n-1}} + \frac{\varrho_{2n-1}}{\lambda^{2n-1}},$$

so ist

$$\lim_{\lambda=\infty} \varrho_{2n-1} = 0,$$

womit die asymptotische Gleichung

$$k_\lambda \sim \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \frac{\varepsilon_3}{\lambda^3} + \cdots$$

bewiesen ist*).

Das am Anfang des gegenwärtigen Paragraphen eingeführte Integral $y$ stellt für $k = k_\lambda$ eine ausgezeichnete Lösung $Y_\lambda$ unserer Differentialgleichung dar, für welche die asymptotische Darstellung gilt:

$$Y_\lambda \sim \cos k_\lambda\omega \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k_\lambda^2} + \cdots\right)$$
$$+ \sin k_\lambda\omega \left(\frac{\varphi_1}{k_\lambda} + \frac{\varphi_3}{k_\lambda^3} + \cdots\right),$$

welche durch Einsetzen der asymptotischen Reihe für $k_\lambda$ übergeht in

$$Y_\lambda \sim \cos\frac{\lambda\pi\omega}{\varpi}\left(\Phi_0 + \frac{\Phi_2}{\lambda^2} + \cdots\right)$$
$$+ \sin\frac{\lambda\pi\omega}{\varpi}\left(\frac{\Phi_1}{\lambda} + \frac{\Phi_3}{\lambda^3} + \cdots\right).$$

Dabei ist

$$\Phi_0 = \varphi_0, \quad \Phi_1 = \frac{\varpi\varphi_1}{\pi} - \varepsilon_1\omega\varphi_0.$$

Die Reihe, welche man erhält, wenn man $\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \ldots$ durch Null ersetzt, unterscheidet sich von $Y_\lambda$ um

$$\frac{1}{\lambda^n}\left(\xi_n \cos\frac{\lambda\pi\omega}{\varpi} + \eta_n \sin\frac{\lambda\pi\omega}{\varpi}\right),$$

wo

$$\lim_{\lambda=\infty} \xi_n = 0, \quad \lim_{\lambda=\infty} \eta_n = 0$$

ist.

Die Aenderungen, welche die bisherigen Entwicklungen erfahren, wenn $h = \infty$, $H = \infty$ ist, wenn es sich also um ausgezeichnete Lösungen handelt, welche für $x = a$ und für $x = b$ verschwinden, sind leicht ersichtlich.

Aus der asymptotischen Darstellung der ganzen transcendenten Function $F(k^2)$ lässt sich deren Geschlecht in ähnlicher Weise ermitteln, wie ich im 49. Bd. der Math. Ann. (S. 485 ff.) das Geschlecht der

*) Man weiss, dass sämmtliche Wurzeln $k^2$ der Gleichung $F(k^2) = 0$ reell sind und dass sich darunter negative entweder gar nicht oder nur in endlicher Anzahl befinden. Vgl. Sturm, Liouv. Journ. Bd. I.

ganzen transcendenten Functionen bestimmt habe, welche bei der Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten auftreten. Zunächst sieht man aus der asymptotischen Darstellung von $k_\lambda$, dass die Reihe

$$\sum_\lambda \frac{1}{|k_\lambda^2|}$$

convergent ist. Daraus folgt die Convergenz des unendlichen Productes

$$P(k^2) = \prod_\lambda \left(1 - \frac{k^2}{k_\lambda^2}\right),$$

welches dieselben Nullstellen besitzt wie die Function $F(k^2)$. Demnach ist

$$F(k^2) = e^{g(k^2)} P(k^2),$$

wo $g(k^2)$ eine ganze rationale oder transcendente Function ist. Es ist

$$\frac{F(k^2)}{k} = \gamma_{-1} \sin k\varpi + \varrho e^{-ik\varpi},$$

wo sich $\varrho$ gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn $k$ mit

$$0 \leqq \arg k \leqq \pi$$

ins Unendliche geht. Wenn unter $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Grösse verstanden wird, ist auf Grund der letzten Formel

$$|F(k^2)| < e^{|k|^{1+\varepsilon}},$$

wenn $|k|$ hinreichend gross genommen wird, während $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ ist; da es sich aber um eine eindeutige Function von $k^2$ handelt, so gilt diese Ungleichung für alle Werthe von $\arg k$. Um den Nullpunkt der $k$-Ebene lassen sich (Hadamard, Liouv. Journ. 1893, S. 204) Kreise mit beliebig grossen Radien beschreiben, auf welchen

$$|P(k^2)| > e^{-|k|^{1+\varepsilon}}$$

ist. Demnach ist auf diesen Kreisen

$$|e^{g(k^2)}| = \left|\frac{F(k^2)}{P(k^2)}\right| < e^{2|k|^{1+\varepsilon}},$$

weshalb (Hadamard, Liouv. Journ. 1893, S. 187) $g(k^2)$ von $k$ unabhängig sein muss. Die Productentwicklung von $F(k^2)$ ist demnach

$$F(k^2) = F(0) \prod_\lambda \left(1 - \frac{k^2}{k_\lambda^2}\right),$$

so dass $F(k^2)$ als Function von $k^2$ vom Geschlecht 0 ist.

Charlottenburg, 12. August 1898.