

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2515-16.

Ueber die säcularen Störungen in dem Problem der drei Körper.

Von der Behauptung ausgehend, dass die säcularen Störungen der Planetenbahnen durch Quadraturen nicht darstellbar seien, unternimmt Herr Gylden die anderweitige Bestimmung der säcularen Störungen und theilt in Nr. 2452 dieser Zeitschrift die allgemeine Form der Resultate mit, zu welchen er gelangt ist. Ueber die Methode selbst giebt Herr Gylden an dem erwähnten Orte nur einige Andeutungen; aber in Nr. 23 der Zeitschrift Copernicus hat Herr Backlund einen mit lebhaften Farben gezeichneten Bericht erstattet, welcher einen weiter gehenden Einblick in die von Herrn Gylden unternommenen Arbeiten ermöglicht. Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, zu zeigen, dass es zum Behuf der Bestimmung der säcularen Störungen derartiger Anstrengungen, wie sie Herr Gylden gemacht hat, nicht bedarf; dass die Rechnungen, welche dazu führen, durchaus einfach und elementarer Art sind.

Wenn Herr Weierstrass, wie in dem Aufsatz Nr. 2452 bemerkt wird, in seinen Vorlesungen über Störungstheorie zeigt, dass die Integration der Störungsgleichungen vermittelt Quadraturen nicht immer zu einem brauchbaren Resultat führe, so zweifle ich nicht, dass das lehrreich ist. Vorausgesetzt, es wird darin auf die Klippen, an welchen die allgemeine Integration eines Systems von Störungsgleichungen zu scheitern pflegt, hingewiesen, so sind auch die Forderungen bekannt, welche das System der Störungsgleichungen zu erfüllen hat, damit es zur Darstellung des allgemeinen Integrals brauchbar ist. Es ist leicht zu sagen, ein System von Störungsgleichungen sei dazu überhaupt nicht brauchbar. Aber auf den blossen Verdacht hin kann man Niemand verurtheilen. Hätte Herr Gylden einen ernstlichen Versuch gemacht, nachzuweisen, dass das von mir aufgestellte System von Störungsgleichungen zur Aufstellung der allgemeinen Störungsausdrücke untauglich sei, so würde er gefunden haben, dass es tauglich ist. Die folgenden Mittheilungen, die Bestimmung der säcularen Störungen betreffend, beschränken sich darauf, nachzuweisen, dass dieselben anstandslos durch Quadraturen aus den Störungsgleichungen hergeleitet werden.

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften der Störungsglieder.

Ich erwähne zunächst, dass die Störungsgleichungen von zweierlei Art sind. In den Gleichungen der ersten Art, welche ich Sinus-Gleichungen nenne, haben alle Glieder die Form $a \sin \alpha$, in den Gleichungen der zweiten Art, oder den Cosinus-Gleichungen, haben dieselben die Form $a \cos \alpha$. Die Grösse a ist eine Beständige, in welcher die störende

Masse als Factor vorkommt, und α eine lineare Function der vier Veränderlichen $u u_1 v v_1$ mit ganzzahligen Coefficienten. Es ist also:

$$\alpha = c u + c_1 u_1 + b v + b_1 v_1,$$

wo $c c_1 b b_1$ positive oder negative ganze Zahlen sind.

Wenn man die Veränderlichen $u u_1 v v_1$ durch die Zeit ausdrückt, so ändert sich Nichts an dieser Beschaffenheit der Störungsgleichungen. Alle Glieder der Sinus-Gleichungen behalten die Form $a \sin \alpha$, und alle Glieder der Cosinus-Gleichungen die Form $a \cos \alpha$. Aber es ist dann:

$$\alpha = c(k + \gamma t) + c_1(k_1 + \gamma_1 t) + b(h + \beta t) + b_1(h_1 + \beta_1 t),$$

wo die Beständigen γ und γ_1 die mittleren Bewegungen der Apsidenlinien, die Beständigen β und β_1 die mittleren Bewegungen der Leitstrahlen in den von den gestörten Massen beschriebenen Ellipsen bezeichnen, ferner $k k_1 h h_1$ Integrationsbeständige sind*). Man kann daher einfacher schreiben:

$$\alpha = A + Bt,$$

worin A und B beständige Grössen sind. Es ist:

$$\begin{aligned} A &= c k + c_1 k_1 + b h + b_1 h_1 \\ B &= c \gamma + c_1 \gamma_1 + b \beta + b_1 \beta_1 \end{aligned}$$

Ich habe dies in Nr. 2317 § 5 bewiesen.

Es haben also alle Störungsglieder entweder die Form $a \sin(A + Bt)$ oder $a \cos(A + Bt)$. Wenn man dieselben nach der Zeit integrirt, so erhält man die entsprechenden Störungen:

$$-\frac{a}{B} \cos(A + Bt), \text{ und } \frac{a}{B} \sin(A + Bt).$$

Man erhält säculare Störungen, wenn der Nenner B ein sehr kleiner Bruchwerth ist. Insbesondere erhält man säculare Störungen immer dann, wenn die Coefficienten b und b_1 gleich Null sind. Denn es ist dann $B = c \gamma + c_1 \gamma_1$. Die mittleren Bewegungen der Apsidenlinien γ und γ_1 sind aber sehr kleine Bruchwerthe, weil sie die störende Masse als Factor enthalten. Hiernach ist der Coefficient $\frac{a}{B}$ der säcularen Störungen in der Regel unabhängig von der störenden Masse, weil sich dieselbe in dem Zähler und in

*) Diese thatsächlichen Verhältnisse hat Herr Lindstedt in seinem Aufsätze in Nr. 2503 verkannt.

dem Nenner des Bruches $\frac{a}{B}$ streicht. Demungeachtet ist der Coefficient $\frac{a}{B}$ in allen Fällen ein kleiner Bruchwerth.

Denn man kann leicht zeigen, dass der Coefficient a derjenigen Störungsglieder in welchen b und b_1 gleich Null sind, fast immer die beiden Excentricitäten e und e_1 als Factoren enthält, jedenfalls aber mit der Excentricität der von der störenden Masse beschriebenen Ellipse multiplicirt ist. Der Nenner B aber enthält diese Factoren nicht.

Zu den säcularen müssen auch die der Zeit proportionalen Störungen gerechnet werden. Dieselben entsprechen dem Falle $B = 0$ oder den Störungsgliedern $a \sin A$ und $a \cos A$. Nach dem Obigen ist:

$$\begin{aligned} A &= ck + c_1 k_1 + bh + b_1 h_1 \\ B &= c\gamma + c_1 \gamma_1 + b\beta + b_1 \beta_1 \end{aligned}$$

aber es ist noch hinzuzufügen, dass sich die mittleren Bewegungen $\gamma \gamma_1 \beta \beta_1$ als incommensurable Grössen darstellen. Bei geeigneter Wahl der ganzzahligen Coefficienten $c c_1 b b_1$ kann der Coefficient B in einen sehr kleinen Bruchwerth übergeführt werden. Der Fall $B = 0$ aber kann nur dann eintreten, wenn die vier Coefficienten $c c_1 b b_1$ gleichzeitig gleich Null sind. In diesem Falle ist nicht bloss $B = 0$, sondern auch $A = 0$; daher $a \sin A = 0$

und $a \cos A = a$. Nur diejenigen Störungsglieder, welche sich als beständige Grössen darstellen, führen zu den der Zeit proportionalen Störungen. Beständige Störungsglieder können aber, wie hier gezeigt worden ist, nur in den Cosinus-Gleichungen, niemals in den Sinus-Gleichungen entstehen. Es folgt daraus, dass die Sinus-Gleichungen ausschliesslich periodische Störungen geben. Ich habe dies ebenso in Nr. 2317 § 5 bewiesen.

Die weitere Untersuchung darf sich auf die Störungen der dem Centalkörper näher liegenden Masse beschränken, weil sie für die ferner liegende Masse nicht wesentlich anders ausfällt. Ferner habe ich den in den Störungsaufgaben sehr gewöhnlichen Fall vorausgesetzt, dass die störende Masse m_1 eine ungestörte Ellipse beschreibe. Eine weitere Vereinfachung der Untersuchung ergibt sich daraus, dass man die partielle Bestimmung der Veränderlichen q unbeachtet lässt. Ich darf mich daher auf die in dem zweiten Abschnitt der Publ. XII d. A. G. gegebenen Gleichungen beziehen, und habe zur Bestimmung des Parameters die Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v) + \frac{2}{1-e^2} \frac{q}{m p_0^2}.$$

Die Veränderlichen q, τ, σ ergeben sich aus den Störungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{1}{2} q' &= \frac{d\Omega}{dr} r' + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du} \frac{n}{r^2} \\ 2. \quad -m p_0^2 \tau' &= \frac{r}{p} \sin v \left(r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) + \frac{1/2 q'}{1-e^2} \frac{r^2}{p^2} \left[\left(\frac{p}{r} + 1 \right) \cos v + e \right] \\ 3. \quad m p_0^2 \sigma' &= \frac{r}{p} \cos v \left(r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) - \frac{1/2 q'}{1-e^2} \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p}{r} + 1 \right) \sin v - \frac{3/2 e q}{1-e^2}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Perihels ist ferner die Gleichung gegeben:

$$w + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (\tau \sin v - \sigma \cos v) - \sigma e = \omega,$$

mit welcher die folgende Störungsgleichung in Verbindung zu bringen ist:

$$4. \quad -m p_0^2 (\omega' + \cos i \vartheta') = 2r \frac{d\Omega}{dr} + \frac{3}{2} q + P + N$$

Die gefürchteten Schwierigkeiten in der Bestimmung der säcularen Störungen erledigen sich bei der Untersuchung dieser vier Störungsgleichungen.

Es versteht sich, dass die Integration jeder der Störungsgleichungen eine willkürliche Beständige im Gefolge hat. Ich muss aber darauf hinweisen, dass unter gewissen Beschränkungen, die Gültigkeit der Integrale betreffend, die Integrationsbeständigen der Gleichungen 1., 2., 3. als überzählig zu betrachten sind, dass man also über die Beständigen q_0, τ_0, σ_0 frei verfügen kann. In der That lässt sich die Beständige q_0 durch eine Variation der mittleren Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse ersetzen. Ferner kann die Beständige τ_0 durch eine Variation der Excentricität

der Ellipse, und die Beständige σ_0 durch eine Variation der Epoche ausgeglichen werden. Der Beweis dieser Sätze ist in Nr. 2313 § 2 gegeben. Wenn aber die Forderung in Erfüllung gebracht wird, dass das Integral des Systems für den unbegrenzten Zeitraum richtig bleibe, dann ist den Beständigen q_0 und σ_0 eine bestimmte Verwendung gegeben. Zur freien Verfügung bleibt dann nur die Beständige τ_0 übrig.

Es ist zu beachten, dass die Gleichungen 1. und 2. nur Sinus-Glieder, die Gleichungen 3. und 4. nur Cosinus-

Glieder haben. Die Integrale der Gleichungen 1. und 2. enthalten daher keine der Zeit proportionalen Glieder, sie sind durch Aggregate von Cosinus-Gliedern ausgedrückt. Dagegen enthalten die Integrale der Gleichungen 3. und 4. neben Aggregaten von Sinus-Gliedern auch die der Zeit proportionalen Glieder. Die Veränderliche ω , welche sich aus der Gleichung 4. bestimmt, ist ein Kreisbogen und wächst daher mit der Zeit in das Unendliche. Die Veränderliche σ dagegen, welche sich aus der Gleichung 3. bestimmt, ist ein Bestandtheil des Parameters. Die Veränderliche σ darf nicht unendlich gross werden, sie kann nur periodische Glieder enthalten. Das der Zeit proportionale Glied von σ muss daher verschwinden. Durch die passende Wahl der überzähligen Integrationsbeständigen q_0 kann dies leicht erreicht werden. Die Gleichung 3. enthält das beständige Glied $-\frac{3}{2} \frac{e q_0}{1-e^2}$. Bezeichnet man die Summe aller übrigen beständigen Glieder der Gleichung 3. mit C , so braucht man nur die Gleichung anzuschreiben:

$$\frac{3}{2} \frac{e q_0}{1-e^2} = C,$$

um das der Zeit proportionale Glied von σ zum Verschwinden zu bringen. In dieser Bestimmung von q_0 liegt die überaus einfache Lösung des bekannten, in der bisherigen Störungstheorie so schwierigen Problems, die mit Potenzen der Zeit multiplicirten Glieder von dem Werthe der grossen Achse der Ellipse fern zu halten.

Es ist erwähnt worden, dass die Gleichungen 1. und 2. nur Sinus-Glieder, die Gleichungen 3. und 4. nur Cosinus-Glieder haben. Diese Eigenschaften der Störungsgleichungen dürfen nicht auf die Glieder der ersten Ordnung beschränkt sein, sie müssen sich auch auf die Glieder der höheren Ordnungen erstrecken. Man erhält aber die Störungsglieder der zweiten Ordnung, indem man die ersten Näherungen des Parameters und des Perihels anstatt p und w in die Störungsgleichungen einsetzt. Es ist nicht schwierig zu sehen, dass die erste Näherung von p nur Cosinus-Glieder, die erste Näherung von w nur Sinus-Glieder enthalten darf, wenn verlangt ist, dass die Störungsglieder der zweiten Ordnung in den Gleichungen 1. und 2. Sinus-Glieder, in den Gleichungen 3. und 4. Cosinus-Glieder sein sollen. Die ersten Näherungen von p und w ergeben sich aus den Gleichungen:

$$m p_0^2 \sigma' = \frac{r}{p} \cos v \left(r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) - \frac{1/2 q'}{1-e^2} \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p}{r} + 1 \right) \sin v - \frac{3/2 e q}{1-e^2}.$$

Setzt man den Werth q hier ein, so ergeben sich säculare Störungen von σ , welche die Form $\frac{a}{B^2} \sin(A+Bt)$ haben, also mit $\frac{a}{B^2}$ multiplicirt sind. Die störende Masse ist ein Factor der Grösse a . Dieselbe ist auch ein Factor von $B = c\gamma + c_1\gamma_1$. Man könnte nun sagen, der Quotient $\frac{a}{B}$

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v) + \frac{2}{1-e^2} \frac{q}{m p_0^2} \\ w + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (\tau \sin v - \sigma \cos v) - \sigma e = \omega.$$

Hiernach sind dieselben von der erforderlichen Beschaffenheit, sobald man in der ersten Näherung von σ die dem Aggregat von Sinus-Gliedern beigefügte Integrationsbeständige σ_0 gleich Null setzt.

Bei dieser Verwendung der überzähligen Integrationsbeständigen q_0 und σ_0 ist der oben gestellten Forderung, die Gültigkeit der Integrale betreffend, Genüge geschehen; die Beständige τ_0 bleibt zur freien Verfügung übrig. Ich habe dies auch in Nr. 2317 § 5 eingehend erörtert, und im Wesentlichen ebenso in der Publ. XII. Die in diesen Feststellungen gegebenen Vorschriften zur Integration der Störungsgleichungen bewirken in der That, dass die Integrale durch Quadraturen ausgedrückt werden können, welche in ein und derselben Gestalt für den unbegrenzten Zeitraum gültig sind.

Es wird eingewendet, der Einfluss der säcularen Störungen sei derartig, dass nicht bloss die erste Näherung des gestörten Elementes aufhöre, ein kleiner Bruchwerth zu sein, auch die Correction der ersten Näherung sei nicht mehr ein kleiner Bruchtheil dieser Näherung. Einer eingehenden Prüfung dieser Einwände sind die nun folgenden Untersuchungen gewidmet, und der Leser kann sich aus denselben überzeugen, dass die auf das System der Störungsgleichungen unternommenen Angriffe einer realen Grundlage entbehren.

§ 2.

Die säcularen Störungen der Veränderlichen q .

Zur Bestimmung der Veränderlichen q ist die Gleichung 1. gegeben:

$$\frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dr} r' + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du} \frac{n}{r^2}.$$

Dem § 1 zufolge haben die säcularen Störungen von q die Form $\frac{a}{B} \cos(A+Bt)$, wo $A = ck + c_1k_1$ und $B = c\gamma + c_1\gamma_1$ ist. Die Veränderliche σ bestimmt sich aus der Gleichung 3.:

sei unabhängig von der störenden Masse. Wäre der Coefficient $\frac{a}{B}$ der säcularen Störungen von q von dieser Beschaffenheit, so hätte die Veränderliche σ und in Folge dessen auch der Parameter säculare Störungen, welche nicht mehr kleine Bruchtheile des Parameters sind, sondern unzweifelhaft grosse Zahlen ausdrücken. Die Integration wäre dann für den unbegrenzten Zeitraum allerdings unzulässig.

In Wirklichkeit aber verhält sich die Sache anders, weil die Grösse a in den säcularen Störungen von q nicht die erste Potenz, sondern das Quadrat der störenden Masse zum Factor hat. Die folgende Untersuchung führt zu diesem Resultat.

Wenn die störende Masse verschwindet, so geht die Gleichung 1. über in $q' = 0$. Daraus folgt $q = Q$, wo Q eine Beständige ist. Ich werde zunächst zeigen, dass in dem erwähnten Falle $q = 0$ ist, dass also die Beständige Q verschwindet. Das Element der Störung, welches ich an die Stelle der Veränderlichen n in die Störungsgleichungen eingeführt habe, ist:

$$q = m \left(r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2p_0^3}{r} + p_0^2(1-e^2) \right).$$

Man nennt bekanntlich das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit die lebendige Kraft. Die lebendige Kraft der gestörten Masse ist:

$$\frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m}{2} \left(r'^2 + \frac{n^2}{r^2} \right),$$

aber es fragt sich, welchen Werth die lebendige Kraft der ungestörten Masse hat.

Wenn die störende Masse verschwindet, so beschreibt die Masse m eine ungestörte Ellipse. Diese ungestörte Ellipse, deren Parameter eine Beständige ist, kann aber durch eine Variation der elliptischen Elemente in eine andere Ellipse umgewandelt werden, welche einen veränderlichen Parameter hat. Wollte man die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der ungestörten Ellipse variiren, so würde der veränderliche Parameter ein der Zeit proportionales Glied enthalten. Lässt man die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse ungeändert, setzt aber an die Stelle der Excentricität und der Epoche andere beständige Werthe, so ist $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$ die Gleichung der neuen Ellipse, und der veränderliche Parameter enthält ausschliesslich periodische Glieder. Wenn ferner $\frac{p_2}{r} = 1 + e_2 \cos v_2$ die Gleichung der ungestörten Ellipse in ihrer ursprünglichen Gestalt ist, so hat man die identische Gleichung:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos v_2}.$$

Aus der obigen Gleichung zur Bestimmung von q folgt nun, dass die identische Gleichung $q = 0$ besteht, wenn die störende Masse $m_1 = 0$ gesetzt wird.

Es ist wiederholt erwähnt worden, dass in der gestörten Bewegung die Veränderliche q durch eine Reihe Cosinus-Glieder ausgedrückt ist, welcher Reihe eine Integrations-

Zur Bestimmung der wahren Anomalie v ist die Gleichung gegeben $v' = (1 + e \cos v)^2$. Daraus folgt die mittlere Bewegung $(1 - e^2)^{3/2}$. Zur Bestimmung der wahren Anomalie v_2 schreibe ich die Gleichung $v'_2 = l_2 (1 + e_2 \cos v_2)^2$, und daraus folgt die mittlere Bewegung $l_2 (1 - e_2^2)^{3/2}$. In den beiden Ellipsen soll die mittlere Bewegung übereinstimmen, es soll also:

$$l_2 (1 - e_2^2)^{3/2} = (1 - e^2)^{3/2}$$

sein. Aus dieser Gleichung bestimmt sich der Coefficient l_2 . Aus der ursprünglichen Gleichung der ungestörten Ellipse $\frac{p_2}{r} = 1 + e_2 \cos v_2$ ergeben sich die Derivirten:

$$r' = l_2 p_2 e_2 \sin v_2, \quad r'' = l_2^2 p_2 e_2 \cos v_2 \frac{p_2^2}{r^2}.$$

Die Derivirte r'' muss identisch sein mit derjenigen, welche aus der Gleichung des Leitstrahls:

$$r r'' = \frac{n^2}{r^2} - \frac{p_0^3}{r} + r \frac{d\Omega}{dr}$$

für den Fall $m_1 = 0$ gefunden wird. Es besteht also die identische Gleichung:

$$l_2^2 p_2 \left(\frac{p_2}{r} - 1 \right) \frac{p_2^2}{r^2} = \frac{n^2}{r^3} - \frac{p_0^3}{r^2}.$$

Für den Fall $m_1 = 0$, geht auch die Veränderliche n in eine Beständige über und es ergeben sich die weiteren Gleichungen:

$$l_2^2 p_2^4 = n^2, \quad l_2^2 p_2^3 = p_0^3,$$

aus welchen, da l_2 bekannt ist, die Beständigen p_2 und n folgen. Man findet:

$$\frac{1 - e_2^2}{p_2} = \frac{1 - e^2}{p_0}, \quad n^2 = p_0^4 \frac{1 - e_2^2}{1 - e^2}.$$

Setzt man die Werthe $l_2^2 = \frac{p_0^3}{p_2^3}$ und $n^2 = p_0^3 p_2$ ein, so erhält man die lebendige Kraft der ungestörten Masse:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left(l_2^2 p_2^2 e_2^2 \sin^2 v_2 + \frac{n^2}{p_2^2} (1 + e_2 \cos v_2)^2 \right) &= \frac{m}{2} \frac{p_0^3}{p_2} \left(2 \frac{p_2}{r} - 1 + e_2^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} p_0^2 \left(2 \frac{p_0}{r} - 1 + e^2 \right). \end{aligned}$$

beständige q_0 beigefügt ist. Die Integrationsbeständige q_0 ist im § 1 so bestimmt worden, dass die beständigen Glieder der Gleichung 3., welche zur Bestimmung der Veränderlichen σ gegeben ist, verschwinden. Daraus folgt, dass die Integrationsbeständige q_0 die störende Masse zum Factor hat, dass dieselbe daher verschwindet, wenn $m_1 = 0$ ge-

setzt wird. Die säcularen Störungen von q haben die Form $\frac{a}{B} \cos(A+Bt)$, worin $A = ck + c_1 k_1$ und $B = c\gamma + c_1 \gamma_1$ ist. Wäre der Coefficient $\frac{a}{B}$ der säcularen Störungen von q unabhängig von der störenden Masse, so würde die Veränderliche q für den Fall, dass die störende Masse verschwindet, in eine unbestimmte Beständige übergehen. Es ist gezeigt worden, dass für diesen Fall $q = 0$ ist. Wir ziehen daraus den Schluss, dass der Coefficient $\frac{a}{B}$ der säcularen Störungen von q mit m_1 multiplicirt ist, dass also in den säcularen Störungen von q die Grösse a das Quadrat von m_1 als Factor enthält. Es folgt weiter, dass diejenigen säcularen Störungen der Elemente, welche aus der zweifachen Quadratur $\int (q - q_0) dt$ hervorgehen, jederzeit als kleine Bruchwerthe angesehen werden können.

Durch eine sehr einfache Rechnung ergeben sich die säcularen Störungen der ersten Ordnung von q . Aus dem Integral der lebendigen Kraft folgt:

$$q = 2\Omega - 2a - q_1.$$

Zur Bestimmung von q_1 aber besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{2} q'_1 = \frac{d\Omega}{dr_1} r'_1 + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du_1} \frac{n_1}{r_1^2}.$$

Um die Untersuchung zu vereinfachen, haben wir angenommen, die störende Masse m_1 beschreibe eine ungestörte Ellipse. Es ist dann $n_1 = \lambda p_1^2$ und $\frac{n_1}{r_1^2} = v'_1$. Ferner ist $u_1 = v_1 + w_1$ und daraus folgt $\frac{ds}{du_1} = \frac{ds}{dv_1}$. Die obige Gleichung geht daher über in:

$$\frac{1}{2} q'_1 = \frac{d\Omega}{dr_1} r'_1 + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{dv_1} v'_1.$$

Denkt man sich die Veränderliche q_1 als Function von v_1 dargestellt, so ist:

$$\begin{aligned} -m p_0^2 \tau' &= \frac{r}{p} \sin v \left(r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) + \frac{1/2 q'_1}{1-e^2} \frac{r^2}{p^2} \left[\left(\frac{p}{r} + 1 \right) \cos v + e \right] \\ m p_0^2 \sigma' &= \frac{r}{p} \cos v \left(r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) - \frac{1/2 q'_1}{1-e^2} \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p}{r} + 1 \right) \sin v - \frac{3/2 e q}{1-e^2}, \end{aligned}$$

in welchen P ein Glied der zweiten Ordnung ist. Man erhält:

$$P = m p_0^2 \frac{p}{r} \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{63}{8} \eta^5 + \dots \right)$$

und $2\eta = \frac{p^2}{p_0^2} - 1$. Die säcularen Störungen von τ und σ bewirken, dass die Grösse P ein Aggregat von Gliedern enthält, welche, von Herrn Gylden elementare Glieder genannt, mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind. Man könnte sagen, dass sich unter den elementaren Gliedern der Gleichungen 2. und 3. auch säculare Glieder finden. Durch deren Integration gelange man zu säcularen Störungen von τ und σ , welche nicht mehr kleine Bruchwerthe sind,

$$\frac{1}{2} \frac{dq_1}{dv_1} = \frac{d\Omega}{dr_1} \frac{dr_1}{dv_1} + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{dv_1} = \frac{d\Omega}{dv_1}.$$

Es versteht sich, dass bei der Differentiation von Ω nach v_1 die Veränderlichen r und w_1 als Beständige zu betrachten sind. Aus der vorliegenden Gleichung folgt, dass in der Veränderlichen q_1 säculare Störungen der ersten Ordnung nicht vorhanden sind. Die säcularen Glieder von Ω sind mit der störenden Masse multiplicirt. Für die säcularen Störungen der ersten Ordnung von q erhält man hiermit die Bestätigung, dass dieselben die störende Masse als Factor enthalten.

§ 3.

Die säcularen Störungen des Parameters.

Die Störungen der aufeinander folgenden Ordnungen sind in ihrer numerischen Bedeutung im Allgemeinen nicht mit den Potenzen der Störungsfuction vergleichbar, sondern selbstverständlich immer nur mit den Potenzen der ersten Näherungen. Wenn sich die Störungen über den unbegrenzten Zeitraum erstrecken, so sind die ersten Näherungen der gestörten Elemente in den säcularen Gliedern nicht mit der störenden Masse multiplicirt; sie sind demungeachtet kleine Bruchwerthe, weil die säcularen Störungen jedenfalls die Excentricität der von der störenden Masse beschriebenen Ellipse zum Factor haben. Die hinlängliche Genauigkeit des Resultats kann bei einer solchen Ausdehnung der Rechnung nur durch mehrere Ordnungen erreicht werden. Die Verwickelungen dieser Rechnung geben Anlass zu einem weiteren Einwurf gegen das System der Störungsgleichungen.

Man erhält den Parameter der gestörten Bahn aus der Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v) + \frac{2}{1-e^2} \frac{q}{m p_0^2},$$

und zur Bestimmung der Veränderlichen τ und σ sind die Gleichungen 2. und 3. gegeben:

sondern unzweifelhaft grosse Zahlen ausdrücken. Man müsse daraus schliessen, dass die Integrale der Gleichungen 2. und 3. für den unbegrenzten Zeitraum untauglich seien.

In der That liegt die Berechtigung der Methode in der Voraussetzung, dass die Variationen des Parameters kleine Bruchwerthe sind. Der erwähnte Einwurf aber beruht auf einer falschen Vermuthung. Man kann sich, ohne irgend eine Rechnung zu machen, davon überzeugen, dass unter den elementaren Gliedern der Gleichungen 2. und 3.

säculare Glieder nicht vorhanden sind. Im § 1 ist gezeigt worden, dass sich die Veränderlichen τ und σ als rein periodische Functionen der Zeit darstellen. Lässt man die störende Masse m_1 verschwinden, so gehen die säcularen Störungen von τ und σ in beständige Grössen über; im Uebrigen bleiben die Veränderlichen τ und σ periodische Functionen der Zeit. Setzt man aber $m_1 = 0$ in die Störungsgleichungen ein, so ist $\Omega = 0$ und $q = 0$, und die Störungsgleichungen 2. und 3., aus welchen sich die Veränderlichen τ und σ bestimmen, gehen über in:

$$\begin{aligned} 2' \quad & -mp_0^2 \tau' = \frac{r}{p} \sin v P \\ 3' \quad & mp_0^2 \sigma' = \frac{r}{p} \cos v P, \end{aligned}$$

worin $\eta = \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v)$ ist. Bestimmt man die Veränderlichen τ und σ aus den Gleichungen 2' und 3', so ergeben sich als erste Näherungen die beständigen Werthe $\tau = \tau_0$ und $\sigma = \sigma_0$, weil P ein Störungsglied der zweiten Ordnung ist. Kämen unter den elementaren Gliedern der Gleichungen 2. und 3. säculare Glieder vor, so fänden sich auf der rechten Seite der Gleichungen 2' und 3' beständige Glieder. Durch die Integration der Gleichungen 2' und 3' würde man der Zeit proportionale Glieder erhalten. Es ist gezeigt worden, dass die Werthe der Veränderlichen τ und σ der Zeit proportionale Glieder nicht enthalten. Man muss daraus schliessen, dass unter den elementaren Gliedern der Gleichungen 2. und 3. säculare Glieder nicht vorhanden sind.

Einem Zweifel lässt dieser Beweis eigentlich keinen Raum. Vielleicht ist es aber doch verständlicher und überzeugender, wenn ich die Rechnung verfolge, und thatsächlich nachweise, dass unter den elementaren Gliedern der Gleichungen 2. und 3. die säcularen verschwinden. Indem man in den Werthen τ und σ nur die elementaren Glieder berücksichtigt, kann man sich zu deren Bestimmung jener einfachen Gleichungen 2' und 3' bedienen, in welchen $\eta = \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v)$ zu setzen ist. Man muss dann aber als erste Näherungen von τ und σ nicht beständige Grössen, sondern die als bekannt vorausgesetzten säcularen Störungen von τ und σ annehmen.

Ich erwähne ferner, dass die elementaren Glieder von τ und σ ihre einfachste Darstellung erhalten, wenn sie als Functionen der wahren Anomalie v gedacht werden. Führt man anstatt t die unabhängige Veränderliche v in die Gleichungen 2' und 3' ein, so gehen dieselben über in:

$$\begin{aligned} -\frac{d\tau}{dv} &= \frac{r^2}{p^2} \sin v \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{63}{8} \eta^5 + \dots \right) \\ \frac{d\sigma}{dv} &= \frac{r^2}{p^2} \cos v \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{63}{8} \eta^5 + \dots \right). \end{aligned}$$

Ich schreibe jetzt abkürzend:

$$H = \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{63}{8} \eta^5 + \dots \right),$$

und die Gleichungen 2' und 3' sind einfacher:

$$\begin{aligned} 2' \quad & -\frac{d\tau}{dv} = H \sin v \\ 3' \quad & \frac{d\sigma}{dv} = H \cos v. \end{aligned}$$

Ferner mache ich die Unterscheidung zwischen den elementaren Gliedern von quadratischer, cubischer, biquadratischer Form, welche als Störungsglieder der zweiten, dritten, vierten Ordnung zu betrachten sind, und setze demgemäss noch:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$$

Bezeichnet man die säcularen Störungen von τ und σ mit c und b , so erhält man die elementaren Glieder quadratischer Form, indem man $\eta = \frac{p}{r} (c \cos v + b \sin v)$ in die Gleichungen 2' und 3' einsetzt. Man findet dann:

$$H_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{c^2 + b^2}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2} \cos 2v + bc \sin 2v \right),$$

und es ist sofort ersichtlich, dass in den Gleichungen 2' und 3' die elementaren Glieder quadratischer Form frei von säcularen Gliedern sind. Denn nur diejenigen Glieder der Gleichungen 2' und 3' sind als säculare zu betrachten, welche in den nach sinus und cosinus der Vielfachen von v entwickelten Ausdrücken unabhängig von v sich als Functionen von c und b allein darstellen. In den Gleichungen 2' und 3' giebt es aber unter den elementaren Gliedern quadratischer Form keine derartigen Glieder.

Um die elementaren Glieder cubischer Form zu erhalten, welche als Störungsglieder der dritten Ordnung zu betrachten sind, muss man in die Gleichungen 2' und 3' diejenigen Werthe τ und σ einsetzen, welche die Störungen der ersten und zweiten Ordnung umfassen. Man hat daher die folgenden Gleichungen zu integrieren:

$$\begin{aligned} -\frac{d\tau}{dv} &= \frac{3}{2} \sin v (c \cos v + b \sin v)^2 \\ \frac{d\sigma}{dv} &= \frac{3}{2} \cos v (c \cos v + b \sin v)^2. \end{aligned}$$

Die Grössen c und b sind als Aggregate von säcularen Störungen bestimmt worden. Man darf aber bei der Integration der vorliegenden Gleichungen die Grössen c und b als beständig betrachten. Denn das genaue Integral ist von dem so erhaltenen einfacheren Integral nur um solche Glieder verschieden, welche mit der störenden Masse multiplicirt sind. Solche Glieder können aber vernachlässigt werden, weil hier nur die elementaren Glieder verlangt sind. Durch die Integration findet man:

$$\tau = c + \frac{1}{2} \cos v (c \cos v + b \sin v)^2 - b (c \sin v - b \cos v)$$

$$\sigma = b + \frac{1}{2} \sin v (c \cos v + b \sin v)^2 + c (c \sin v - b \cos v) .$$

Um die elementaren Glieder cubischer Form zu erhalten, muss man daher in die Gleichungen 2' und 3' den folgenden Werth einsetzen:

$$\eta = \frac{p}{r} \left(c \cos v + b \sin v + \frac{1}{2} (c \cos v + b \sin v)^2 + (c \sin v - b \cos v)^2 \right)$$

oder $\eta = \frac{p}{r} \left(c \cos v + b \sin v + c^2 + b^2 - \frac{1}{2} (c \cos v + b \sin v)^2 \right) .$

Es ist förderlich, in dem Werthe η die Glieder der ersten, zweiten, dritten Ordnung zu unterscheiden, und ich schreibe demgemäss:

$$\eta = \frac{p}{r} (R_1 + R_2 + R_3 + \dots) .$$

Man findet alsdann:

$$H_3 = 3R_1 R_2 - \frac{5}{2} \frac{p}{r} R_1^3 .$$

Nach dem Obigen ist:

$$R_1 = c \cos v + b \sin v , \quad R_2 = c^2 + b^2 - \frac{1}{2} (c \cos v + b \sin v)^2$$

und man erhält den Werth:

$$H_3 = 3(c^2 + b^2)(c \cos v + b \sin v) - \left(4 + \frac{5}{2} e \cos v\right)(c \cos v + b \sin v)^3 .$$

Ferner findet man:

$$(c \cos v + b \sin v)^3 = \frac{3}{4} (c^2 + b^2)(c \cos v + b \sin v) + \frac{1}{4} c (c^2 - 3b^2) \cos 3v + \frac{1}{4} b (3c^2 - b^2) \sin 3v .$$

Die vorige Gleichung geht daher über in:

$$H_3 = -c(c^2 - 3b^2) \cos 3v - b(3c^2 - b^2) \sin 3v$$

$$- \frac{5}{8} e \cos v [3(c^2 + b^2)(c \cos v + b \sin v) + c(c^2 - 3b^2) \cos 3v + b(3c^2 - b^2) \sin 3v] .$$

Setzt man dies in die Gleichungen 2' und 3' ein, so ist ersichtlich, dass unter den elementaren Gliedern cubischer Form säculare Glieder nicht vorkommen.

Man darf erwarten, dass auch unter den elementaren Gliedern höherer Ordnungen säculare Glieder nicht vorkommen. Wenn daran doch gezweifelt werden sollte, so möchte der Nachweis für die biquadratischen Glieder willkommen sein, welcher hier noch gegeben wird. Die bi-quadratischen elementaren Glieder der Gleichungen 2' und 3' sind als Störungsglieder der vierten Ordnung zu betrachten, und können leicht hergestellt werden, nachdem man in den Werth η die Störungen der ersten, zweiten, dritten Ordnung aufgenommen hat. Aus den Gleichungen 2' und 3' folgt, dass:

$$R_3 = \cos v \int -H_3 \sin v dv + \sin v \int H_3 \cos v dv$$

ist. Die Bestimmung von R_3 wird aber etwas abgekürzt, wenn man sich nicht der vorliegenden Gleichung, sondern der folgenden Differentialgleichung der zweiten Ordnung bedient:

$$\frac{d^2 R_3}{dv^2} + R_3 = H_3 ,$$

deren Richtigkeit leicht nachgewiesen werden kann. Den oben erhaltenen Werth H_3 führen wir zunächst über in:

$$-H_3 = c(c^2 - 3b^2) \cos 3v + b(3c^2 - b^2) \sin 3v$$

$$+ \frac{5}{16} e [3c(c^2 + b^2) + 4c^3 \cos 2v + 2b(3c^2 + b^2) \sin 2v + c(c^2 - 3b^2) \cos 4v + b(3c^2 - b^2) \sin 4v] ,$$

und aus der Differentialgleichung der zweiten Ordnung folgt:

$$R_3 = \frac{1}{8} c(c^2 - 3b^2) \cos 3v + \frac{1}{8} b(3c^2 - b^2) \sin 3v \\ + \frac{5}{16} e \left(-3c(c^2 + b^2) + \frac{4}{3} c^3 \cos 2v + \frac{2}{3} b(3c^2 + b^2) \sin 2v + \frac{1}{15} c(c^2 - 3b^2) \cos 4v + \frac{1}{15} b(3c^2 - b^2) \sin 4v \right).$$

Ferner findet man:

$$H_4 = \frac{3}{2} (R_2^2 + 2R_1 R_3) - \frac{15}{2} \frac{p}{r} R_1^2 R_2 + \frac{35}{8} \frac{p^2}{r^2} R_1^4.$$

Es kommt hier nicht darauf an, den vollständigen Werth H_4 herzustellen. Es soll nur gezeigt werden, dass in dem nach sinus und cosinus der Vielfachen von v entwickelten Werthe H_4 diejenigen Glieder verschwinden, welche die Form $k \cos v + h \sin v$ haben. Vernachlässigt man diejenigen Glieder, in welchen 0, $2v$, $4v$ die Argumente von sinus und cosinus sind, so erhält man:

$$H_4 = 3R_1 R_3 - \frac{15}{2} e \cos v R_1^2 R_2 + \frac{35}{4} e \cos v R_1^4 \\ = 3R_1 R_3 - \frac{15}{2} (c^2 + b^2) e \cos v R_1^2 + \frac{25}{2} e \cos v R_1^4.$$

Ferner darf man sich der folgenden vereinfachten Werthe bedienen:

$$2R_1^2 = c^2 + b^2 + (c^2 - b^2) \cos 2v + 2bc \sin 2v \\ 2R_1^4 = (c^2 + b^2) \left(\frac{3}{4} (c^2 + b^2) + (c^2 - b^2) \cos 2v + 2bc \sin 2v \right) \\ 3R_3 = \frac{5}{16} e [-9c(c^2 + b^2) + 4c^3 \cos 2v + 2b(3c^2 + b^2) \sin 2v].$$

Wenn dies eingesetzt wird, so findet man, dass die erwähnten Glieder von H_4 verschwinden.

§ 4. Die säcularen Störungen des Perihels.

Man erhält die Bewegung des Perihels aus der Gleichung:

$$w + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (\tau \sin v - \sigma \cos v) - \sigma e = \omega,$$

und zur Bestimmung der Veränderlichen ω besteht die Gleichung 4:

$$-mp_0^2(\omega' + \cos i \vartheta') = 2r \frac{dQ}{dr} + \frac{3}{2} q + P + N,$$

in welcher P und N Glieder der zweiten Ordnung sind. Es ist bekanntlich:

$$\frac{P}{mp_0^2} = \frac{p}{r} \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{63}{8} \eta^5 + \dots \right)$$

wo $\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)$ zu setzen ist. Setzt man ferner:

$$\xi = \frac{p^2}{p_0^2} \left(e\tau + \frac{1}{1-e^2} \frac{1}{2} q + \frac{r^2}{p^2} \frac{P}{mp_0^2} - \frac{1}{2} \frac{r^4 p'^2}{p^4 p_0^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)^2,$$

so hat man den Werth:

$$\frac{N}{mp_0^2} = \frac{1}{2} \frac{r^2}{p^2} \frac{p'^2}{p_0^2} - \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{r^2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{r^2} \left(\xi^2 - \xi^3 + \frac{5}{4} \xi^4 - \frac{7}{4} \xi^5 + \dots \right).$$

Die säcularen Störungen von τ und σ bewirken, dass die Werthe P und N elementare Glieder enthalten. Wenn unter diesen elementaren auch säculare Glieder vorkommen, so führt die Gleichung 4. zu säcularen Störungen von w , welche nicht mehr kleine Bruchwerthe sind, sondern grosse Zahlen ausdrücken. Man findet $w = k + \gamma t + W$, wo W ein Aggregat von Sinus-Gliedern ist, und die Integration der Störungsglieder zweiter Ordnung wird nur dadurch ermöglicht, dass man die Grössen $\sin w$ und $\cos w$ nach Potenzen von W entwickelt. Fänden sich unter den Sinus-Gliedern von W auch solche, deren Coefficienten grosse Zahlen sind, so würde die Entwicklung von $\sin w$ und $\cos w$ nach Potenzen von W zu divergenten Reihen führen. Eine Integration der Störungsgleichungen, welche für den unbegrenzten Zeitraum in ein und derselben Form richtig bleibt, wäre dann nicht möglich.

Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass unter den elementaren Gliedern der Gleichung 4. säculare Glieder nicht vorhanden sind. Denkt man sich die störende Masse m_1 als verschwindend, so ist $\Omega = 0$, $q = 0$ und $\vartheta' = 0$, und zur Bestimmung von ω behält man die einfachere Gleichung:

$$4' \quad -mp_0^2 \omega' = P + N.$$

In dem gedachten Falle ist aber die Veränderliche w nichts anders, als die Variation, welche der Ort des Perihels er-

leidet, wenn man die ungestörte Bewegung in einer Ellipse darstellt, in welcher zwar die mittlere Bewegung des Leitstrahls dem wahren Werthe entspricht, die Excentricität der Ellipse aber und die Epoche ungenau angenommen sind. Es ist einleuchtend, dass diese Variation des Perihels nur periodische Glieder enthält, dass der Zeit proportionale Glieder darin nicht vorkommen. Wenn die störende Masse m_1 verschwindet, so gehen die säcularen Störungen von τ und σ in beständige Grössen über. Kämen unter den elementaren Gliedern der Gleichung 4. säculare Glieder vor, so fänden sich auf der rechten Seite der Gleichung 4' beständige Glieder. Die Integration der Gleichung 4' würde dann Glieder geben, welche der Zeit proportional sind. Die so beschaffenen Glieder sind unzulässig, und man gelangt zu dem Schlusse, dass unter den elementaren Gliedern der Gleichung 4 säculare nicht vorhanden sind.

Es ist kein Grund vorhanden, einen Mangel an Convergenz in der Entwicklung der Integrale zu befürchten. Es könnte aber sein, dass die folgenden Rechnungen, aus welchen sich die zu erwartenden Resultate als analytische Thatsachen ergeben, dem Leser doch willkommen sind. Ich erwähne, dass man die elementaren Glieder von ω aus der Gleichung 4' erhält, nachdem man in derselben die Beständigen τ_0 und σ_0 durch die säcularen Störungen c und b von τ und σ ersetzt hat. Wir betrachten auch hier die elementaren Glieder als Functionen der wahren Anomalie, und führen die Gleichung 4' über in:

$$-\frac{d\omega}{dv} = \frac{1}{2} \frac{r^4 p'^2}{p^4 p_0^2} - \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{p^2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{p^2} (\xi^2 - \xi^3 + \dots) + \frac{r}{p} \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \dots \right).$$

Wegen $q = 0$ ist hier einzusetzen:

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right) = \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v)$$

$$\xi = \frac{p^2}{p_0^2} \left(e \tau + \frac{r^2}{p^2 m p_0^2} - \frac{1}{2} \frac{r^4 p'^2}{p^4 p_0^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)^2.$$

Entwickelt man Alles nach sinus und cosinus der Vielfachen von v , so müssen sich die säcularen oder die von v unabhängigen Glieder der Gleichung 4' gegenseitig aufheben.

Ich gehe von der bekannten Gleichung aus:

$$\left(\frac{r}{p} \right)^2 \frac{pp'}{p_0^2} = \frac{p}{r} (\tau \sin v - \sigma \cos v) + e \sin v (\tau \cos v + \sigma \sin v),$$

und finde durch Quadriren den Werth:

$$\left(\frac{r}{p} \right)^4 \frac{p^2 p'^2}{p_0^4} = \frac{p^2}{r^2} (\tau^2 + \sigma^2) + 2e\tau \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v) - \left(4 \frac{p^2}{r^2} - 4 \frac{p}{r} + 1 - e^2 \right) (\tau \cos v + \sigma \sin v)^2.$$

Ferner erhalte ich:

$$\frac{p^2}{p_0^2} \frac{P}{m p_0^2} = \frac{1}{2} \frac{p}{r} \left(3\eta^2 + \eta^3 - \frac{5}{4} \eta^4 + \frac{7}{4} \eta^5 - \dots \right),$$

und die Substitution dieser Werthe giebt:

$$2\xi = 2e\tau (1 + \eta) - \frac{p^2}{r^2} (\tau^2 + \sigma^2) - \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p}{r} - 1 + e^2 \right) \eta^2 + \frac{r}{p} \left(\eta^3 - \frac{5}{4} \eta^4 + \frac{7}{4} \eta^5 - \dots \right).$$

Die Gleichung 4' wird nun übergeführt in:

$$-\frac{d\omega}{dv} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{p^2} \left(\frac{p^2}{r^2} (\tau^2 + \sigma^2) + 2e\tau\eta - \frac{r^2}{p^2} \left(8\frac{p^2}{r^2} - 4\frac{p}{r} + 1 - e^2 \right) \eta^2 + \xi^2 - \xi^3 + \dots \right) + \frac{r}{p} \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \dots \right).$$

Ich schreibe dieselbe einfacher:

$$-\frac{d\omega}{dv} = \frac{1}{2} (\chi_2 + \chi_3 + \dots),$$

indem ich elementare Glieder der zweiten, dritten Ordnung unterscheide. Berücksichtigt man zunächst nur die Glieder der zweiten Ordnung, so ist $\xi^2 = e^2 \tau^2$. Ferner ist $\tau = c$ und $\sigma = b$ zu setzen, wo c und b die säcularen Störungen von τ und σ sind. Man erhält dann:

$$\chi_2 = \frac{p^2}{r^2} (c^2 + b^2) + 2ec \frac{p}{r} (c \cos v + b \sin v) - \left(8\frac{p^2}{r^2} - 7\frac{p}{r} + 1 - e^2 \right) (c \cos v + b \sin v)^2 + e^2 c^2.$$

Entwickelt man nach sinus und cosinus der Vielfachen von v , streicht alsdann die von v abhängigen Glieder weg, so findet man $\chi_2 = 0$.

Um die elementaren Glieder χ_3 herzustellen, setze man:

$$\xi^2 + \xi^3 = e^2 \tau^2 (1 + 2\eta) - e\tau \left[\frac{p^2}{r^2} (\tau^2 + \sigma^2) + \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p}{r} - 1 + e^2 \right) \eta^2 \right] - e^3 \tau^3.$$

Die elementaren Glieder quadratischer und cubischer Form in ihrer Vereinigung sind:

$$\begin{aligned} \chi_2 + \chi_3 &= \frac{p^2}{r^2} (\tau^2 + \sigma^2) + 2e\tau\eta - \frac{r^2}{p^2} \left(8\frac{p^2}{r^2} - 7\frac{p}{r} + 1 - e^2 \right) \eta^2 + e^2 \tau^2 \\ &- 2\frac{p^2}{r^2} (\tau^2 + \sigma^2) \eta - 4e\tau\eta^2 + \frac{r^2}{p^2} \left(16\frac{p^2}{r^2} - 13\frac{p}{r} + 2 - 2e^2 \right) \eta^3 \\ &- e\tau \left[\frac{p^2}{r^2} (\tau^2 + \sigma^2) + \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p}{r} - 1 + e^2 \right) \eta^2 \right] - e^3 \tau^3. \end{aligned}$$

In die zweite und dritte Zeile, welche nur cubische Glieder enthalten, ist $\tau = c$ und $\sigma = b$ zu setzen. In die erste Zeile müssen diejenigen Werthe τ und σ eingesetzt werden, in welchen die Störungen der ersten und zweiten Ordnung ausgedrückt sind. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \tau &= c + \frac{1}{2} \cos v (c \cos v + b \sin v)^2 - b (c \sin v - b \cos v) \\ \sigma &= b + \frac{1}{2} \sin v (c \cos v + b \sin v)^2 + c (c \sin v - b \cos v). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\tau^2 + \sigma^2 = c^2 + b^2 + (c \cos v + b \sin v)^3.$$

Unter Hinweglassung einiger von v abhängigen Glieder ist man ferner berechtigt zu schreiben:

$$\begin{aligned} 2\tau\eta &= \frac{p}{r} \left(2c(c \cos v + b \sin v) + \frac{3}{2} c(c^2 + b^2) + \cos v (c \cos v + b \sin v)^3 \right) \\ \eta^2 &= \frac{p^2}{r^2} \left((c \cos v + b \sin v)^2 + 2(c^2 + b^2)(c \cos v + b \sin v) - (c \cos v + b \sin v)^3 \right). \end{aligned}$$

Setzt man auch den obigen Werth χ_2 ein, ordnet zugleich nach Potenzen von $c \cos v + b \sin v$, so ist:

$$\begin{aligned}\chi_3 = & \left(16\frac{p^3}{r^3} - 3\frac{p^2}{r^2} - 2\frac{p}{r}(3+e^2) + 1-e^2\right)(c \cos v + b \sin v)^3 \\ & - \left(4\frac{p^2}{r^2} + \frac{p}{r} - 1+e^2\right)ec(c \cos v + b \sin v)^2 - e^3 c^3 \\ & - 2\left(\frac{p^3}{r^3} + 8\frac{p^2}{r^2} - 7\frac{p}{r} + 1-e^2\right)(c^2+b^2)(c \cos v + b \sin v) - \left(\frac{p^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{p}{r}\right)ec(c^2+b^2).\end{aligned}$$

Entwickelt man nach sinus und cosinus der Vielfachen von v , streicht alsdann die von v abhängigen Glieder weg, so findet man $\chi_3 = 0$.

§ 5. Ueber die Bestimmung der säcularen Störungen.

Die Störungsfunktion ist bekanntlich:

$$\Omega = \lambda^2 m m_0 r^2 \frac{p_{01}^3}{r^3} \left(\frac{1}{2} (-1+3s^2) + \frac{1-m}{2} \frac{r}{r_1} (3s-5s^3) + \frac{1-m+m^2}{8} \frac{r^2}{r_1^2} (3-3os^2+35s^4) + \dots \right).$$

Darin bezeichnet s den cosinus des Winkels, welchen die Leitstrahlen miteinander bilden, und man findet:

$$-s = \cos^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(u-u_1) + \sin^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(u+u_1).$$

Wir haben $u-v = w$ und $u_1-v_1 = w_1$ gesetzt, und erhalten:

$$-s = \cos^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(w-w_1+v-v_1) + \sin^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(w+w_1+v+v_1).$$

Setzt man in die Störungsfunktion noch:

$$\frac{p}{r} = 1+e \cos v, \quad \frac{p_1}{r_1} = 1+e_1 \cos v_1,$$

so sind alle Störungsglieder als Functionen von w, w_1, v, v_1 gegeben. Säculäre Glieder sind aber diejenigen, welche sich als Functionen von w und w_1 allein darstellen.

In den Gleichungen 1. und 2., durch welche die Derivirten q' und k' gegeben sind, giebt es nur Sinus-Glieder. Dieselben schreiben sich:

$$C \sin(cw + c_1 w_1) \quad \text{oder} \quad S \cos(cw + c_1 w_1)$$

wo C als eine Reihe von Cosinus-Gliedern der Form $a \cos(bv + b_1 v_1)$, S als eine Reihe von Sinus-Gliedern der Form $a \sin(bv + b_1 v_1)$ anzusehen ist, ferner c, c_1, b, b_1 positive oder negative ganze Zahlen sind. In den Gleichungen 3. und 4. dagegen, durch welche die Derivirten h' und ω' gegeben sind, kommen nur Cosinus-Glieder vor, welche in einer der beiden Formen:

$$C \cos(cw + c_1 w_1), \quad S \sin(cw + c_1 w_1)$$

enthalten sind. Es ist aber einleuchtend, dass nur die mit C multiplicirten Formen zu säcularen Gliedern führen, weil nur in C , niemals in S beständige Glieder vorhanden sind. Nachdem man in C die Veränderlichen v und v_1 durch die Zeit oder auch durch eine Function der Zeit ausgedrückt

hat, gelangt man zu den beständigen Gliedern von C . Dies ist Alles, was ich meinen bisherigen Publicationen hinzuzufügen habe, um den Leser in den Stand zu setzen, die säcularen Störungen vermittelst Quadraturen aus den Störungsgleichungen herzuleiten.

In diesem Aufsatze habe ich gezeigt, dass die auf dem vorgezeichneten Wege erlangten säcularen Störungen jederzeit kleine Bruchwerthe sind. Die Integrale der Störungsgleichungen sind durch Quadraturen ausgedrückt und sind für den Zeitraum einer vollen Umdrehung der Apsiden- und der Knotenlinie, und demzufolge auch für den unbegrenzten Zeitraum gültig. Die gestörte Bahn aber ist in der That eine Ellipse, deren Parameter und Perihel veränderlich sind, während die Excentricität der Ellipse, die Epoche und die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse beständige Grössen sind. Diese drei Grössen können als die Integrationsbeständigen der Störungsgleichungen 1., 2., 3. angesehen werden.

Was ich hier über die numerische Bedeutung der säcularen Störungen gesagt habe, ist für die Planetenbahnen unzweifelhaft richtig. Für die Cometenbahnen freilich könnte man zu einem andern Resultat kommen, wegen des Nenners $1-e^2$, welcher in die Störungsglieder hereingeht. In den Cometenbahnen ist dieser Nenner ein kleiner Bruchwerth, weil die Excentricität nahe bei der Einheit liegt. Uebrigens kann die Bestimmung der allgemeinen Störungen einer Cometenbahn nur dann in Aussicht gestellt werden, wenn dieselbe vollständig eingeschlossen ist von der Bahn des störenden Planeten, wie etwa die Bahn des Encke'schen

Cometen von der des Jupiter. Sollten dann wegen des vorher erwähnten Umstandes die Störungen in dem unbegrenzten Zeitraum ihre Gültigkeit verlieren, so können sie doch für einen sehr ausgedehnten Zeitraum richtig bleiben, weil sich für einen solchen die Variationen der gestörten Elemente immer noch als kleine Bruchwerthe darstellen.

In der Theorie des Mondes sind die säcularen Störungen von untergeordneter Bedeutung. In den hier untersuchten Störungsaufgaben haben die Störungsglieder den

Factor $\lambda^2 m_0$, wo $m_0 = \frac{m_1}{1+m+m_1}$ ist, und dieser Factor

fällt in den säcularen Störungen weg. In den Störungen der Planetenbahnen ist m_0 ein sehr kleiner Bruch; in der Theorie des Mondes aber ist der Factor $m_0 = 1$, und daher $\lambda^2 m_0 = \lambda^2$. Es bleibt also hier den Störungsgliedern

nur der Factor $\lambda^2 = \frac{1}{170}$, welcher in den säcularen Störungen wieder wegfällt. Wegen der Kleinheit der Excentricitäten $e = \frac{1}{18}$ und $e_1 = \frac{1}{60}$, hauptsächlich aber wegen

der Kleinheit des Verhältnisses $\frac{r}{r_1} = \frac{1}{400}$ sind in der Theo-

rie des Mondes die Coefficienten der säcularen Störungen beträchtlich kleiner als λ^2 . In der Theorie der Planetenstörungen erleidet die Convergenz der Reihen, durch welche die Störungen ausgedrückt werden können, eine grosse Ein-

busse, wenn sich die Störungen über den unbegrenzten Zeitraum erstrecken sollen. In der Theorie des Mondes dagegen wird die Convergenz der Reihen mit dieser Forderung in keinerlei Art geschwächt, sie ist für den unbegrenzten Zeitraum ebenso gross als für einen verhältnissmässig kurzen Zeitraum.

Bei der Bestimmung der säcularen Störungen verwirft Hr. Gylden, wie schon im Eingange dieses Aufsatzes erwähnt worden ist, die Anwendung von Störungsgleichungen und geht von dem bekannten System Differentialgleichungen der vierten Ordnung aus, welches Hansen zur Bestimmung der Veränderlichen p und w aufgestellt hat. Hr. Gylden giebt dem System der vierten Ordnung die Gestalt zweier Differentialgleichungen der zweiten Ordnung und zeigt, wie die säcularen Störungen bestimmt werden sollen, damit den beiden Differentialgleichungen Genüge geschehe. Hr. Gylden gründet seine Analysis auf die Hypothese, dass die mittlere Bewegung des Perihels eine Beständige sei, welche sich so bestimmen lässt, dass die der Zeit proportionalen Glieder des Parameters verschwinden. Aber Hr. Gylden hat der Thatsache nicht Erwähnung gethan, dass diese Principien der Publication XII d. A. G., »Grundzüge einer neuen Störungstheorie« und den neueren Publicationen desselben Verfassers entnommen sind. Es ist also lediglich seine mathematische Theorie zum Behuf der Integration des von Hansen aufgestellten Systems der vierten Ordnung, welcher ich die von mir gegebenen Quadraturen gegenüberstelle.

Karlsruhe im Februar 1883.

August Weiler.

Spectroscopische Beobachtungen des grossen September-Cometen 1882 II

auf dem astro-physicalischen Observatorium in Herény (Ungarn).

Ein Theil der am hiesigen Observatorium angestellten Beobachtungen des September-Cometen wurde in den Astr. Nachr. Band 103 Nr. 2472 veröffentlicht. Ich muss die damals angegebenen, auf Wellenlängen reducirten Werthe, wegen Irrthums bei der Reduction, den ich erst bei der Reduction der späteren Beobachtungen bemerkt habe, als falsche be-

zeichnen und in dem Nachstehenden verbessern. Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit auch die weiteren Beobachtungen mitzutheilen.

Die in Nr. 2472 falsch angegebenen Werthe sollen heissen:

Am 1. November:		
I	II	III
560.0	515.0	474.5
561.0	515.0	468.5
563.0	514.5	472.0
562.5	515.0	471.0
Mittel 561.6	514.9	471.5 ^{mmm}

Am 3. November:		
I	II	III
564.0	515.0	470.0
560.0	515.0	470.5
563.0	517.0	469.5
560.5	510.5	471.0
560.0	515.0	472.5
Mittel 561.5	514.5	470.7 ^{mmm}

Die späteren Beobachtungen sind die folgenden:

Nov. 6 16^h30^m M. Z. H.

Der Kern erschien bei ziemlich günstigen atmosphärischen Verhältnissen, länglich, spindelförmig, mit excentrischer Verdichtung in der südlichen Hälfte. Mit dem endgültig fertig gestellten Spectroscop wurden die drei

Banden, welche gegen das rothe Ende schärfer begrenzt und gegen das violette mehr verwaschen waren, acht Mal gemessen.

Das Resultat der Abmessungen ist auf Wellenlängen reducirt: