Über die Nullstellen der Zetafunktion.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

I. Die von Riemann angegebene, erst 46 Jahre später durch von Mangoldt streng begründete Formel

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + R(T), \tag{1}$$

wo in üblicher Bezeichnungsweise $R(T) = O(\log T)$ ist, ist bekanntlich in sehr eleganter Weise von Backlund[1]) wieder abgeleitet worden. — $N(T)$ bezeichnet hier die Anzahl der Wurzeln von $\zeta(s) = 0$, deren Ordinaten der Beziehung $0 < t \leqq T$ genügen.

Unter Voraussetzung der Richtigkeit der Riemannschen Hypothese, daß alle diese Wurzeln den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben, ist es nun Bohr[2]) vor einigen Jahren gelungen zu beweisen, daß sogar $R(T) = o(\log T)$ ist; ein Resultat, dem für unsere Vorstellung von der asymptotischen Verteilung der Nullstellen wegen der daraus entspringenden Formel

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N(T+1) - N(T)}{\log T} = \frac{1}{2\pi}$$

eine gewisse Bedeutung zukommt. — Durch eine geeignete Abänderung der Backlundschen Beweismethode werde ich nun im folgenden dieses Resultat und sogar etwas mehr in einfacher Weise ableiten, indem ich nämlich beweisen werde: *Die Abschätzung $R(T) = o(\log T)$ bleibt richtig, wenn nur die Wahrheit der sogenannten Lindelöfschen Hypothese vorausgesetzt wird.* — Es besagt diese Hypothese, daß $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$

[1]) „Über die Nullstellen der Zetafunktion", Dissertation, Helsingfors 1916 und „Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Comptes rendus, Bd. 158 (1914), S. 1979.

[2]) Bohr, Landau, Littlewood, „Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$", Bulletin de l'Academie Royale de Belgique, Bd. 15 (1913), S. 1144 bis 1175.

ist, oder mit anderen Worten, daß gleichmäßig für $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 1$, $\zeta(s) = O(t^{\varepsilon})$ ist. Dieses Resultat enthält in der Tat dasjenige von Bohr, da nach dem bekannten Satze von Littlewood[3]) jene Vermutung eine Folge der Riemannschen ist. Der Beweis von Bohr macht in erschöpfender Weise von dem Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ Gebrauch.

Es ist schon lange bekannt, daß in (1), T wurzelfrei vorausgesetzt,

$$R(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta(\tfrac{1}{2} + iT) + O(1),$$

wenn man z. B. vom Punkte $s = 2$ mit dem Argumente 0 von $\zeta(s)$ ausgeht und zunächst geradlinig nach $s = 2 + iT$ und von hier aus geradlinig weiter nach $\frac{1}{2} + iT$ fortschreitet. Der Kern der Backlundschen Methode besteht nun in der Anwendung der leicht zu erkennenden Tatsache

$$\left|\frac{1}{\pi} \arg \zeta(\tfrac{1}{2} + iT)\right| < l + \tfrac{1}{2},$$

wo l die Anzahl der innerhalb des Kreises $|s - 2| = \frac{3}{2}$ gelegenen Nullstellen von

$$f(s) = \tfrac{1}{2}[\zeta(s + iT) + \zeta(s - iT)]$$

ist. Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Größe, und es werde die Lindelöfsche Vermutung als wahr angenommen. Alsdann gibt es bekanntlich ein t_0, so daß für $|t| > t_0$

$$|\zeta(s)| < |t|^{\varepsilon^2} \quad \text{für} \quad \sigma \geqq \tfrac{1}{2},$$
$$|\zeta(s)| < |t|^{\frac{1}{2} - \sigma + \varepsilon^2} \quad \text{für} \quad 0 < \sigma \leqq \tfrac{1}{2}$$

gilt. Ich wende nun den Jensenschen Satz auf die Funktion $f(s)$ und auf den Kreis $|s - 2| = r = \frac{3}{2}(1 + \varepsilon)$ an. Hierbei wird $\varepsilon < \frac{1}{3}$ und $T > t_0 + 2$ vorausgesetzt. Indem ich nur die l Nullstellen innerhalb $|s - 2| = \frac{3}{2}$ beibehalte, erhalte ich

$$l \cdot \log(1 + \varepsilon) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(2 + re^{i\varphi})|\, d\varphi - \log|f(2)|.$$

Da aber $|f(2)| = R[\zeta(2 + iT)] > \frac{1}{4}$ ist, so ergibt sich hieraus für ein hinreichend kleines ε

$$l < \frac{1}{2\pi \log(1 + \varepsilon)} \int_0^{2\pi} \log|f(2 + re^{i\varphi})|\, d\varphi + \frac{2}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Um nun das Integral abzuschätzen, bemerken wir, daß der aus der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ herausragende Bogen des Kreises $|s - 2| = \frac{3}{2}(1 + \varepsilon)$

[3]) Comptes rendus, Bd. 154 (1912), S. 263–266.

mit ε unendlich klein wird, und zwar von der Ordnung $\sqrt{\varepsilon}$. Für die auf diesen Bogen bezüglichen Werte von φ ist aber

$$\log|f(2+re^{i\varphi})| < \log(T+2)^{\frac{1}{2}-\sigma+\varepsilon^2} \leqq \varepsilon(\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\log(T+2).$$

Daher ist

$$l < \frac{1}{\varepsilon}[M\sqrt{\varepsilon}\cdot\varepsilon(\tfrac{3}{2}+\varepsilon)+2\pi\varepsilon^2]\log(T+2)+\frac{2}{\varepsilon},$$

was für alle hinreichend großen Werte von T kleiner als $M_1\sqrt{\varepsilon}\cdot\log T$ ist, unter M und M_1 absolute Konstanten verstanden. Der Beweis des Satzes ist hiermit für jedes wurzelfreie T geliefert; für stetig wachsendes T kann er nunmehr unmittelbar gefolgert werden.

II. Es wird sich jetzt ergeben, daß unter Voraussetzung der Riemannschen Hypothese eine noch bessere Abschätzung von $R(T)$ erhalten werden kann.

Wenn diese Hypothese wahr ist, so ist nämlich[4])

$$R(T) = O\left[\log T\left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

In der oben erwähnten Abhandlung gibt Littlewood ohne vollständige Angabe seines Beweises, der aber nicht schwer zu ergänzen ist, die Abschätzung:

$$\log\zeta(\sigma+it) = O\left[\left(\frac{\log t\log_2 t}{\log_3 t}\right)^{2(1-\sigma)}\log_3 t\right]$$

gleichmäßig für

$$\tfrac{1}{2}+\frac{\delta}{\log_2 t}\leqq\sigma\leqq 1,\quad t>0.$$

Unter Berücksichtigung bekannter Sätze schließt man hieraus: es ist für alle $\sigma\geqq\frac{1}{2}+2\frac{\log_3 t}{\log_2 t}$, $t>0$ gleichmäßig

(3) $$\log\zeta(\sigma+it) = O\left[\left(\frac{\log t\log_2 t}{\log_3 t}\right)^{1-4\frac{\log_3 t}{\log_2 t}}\cdot\log_3 t\right] =$$

$$= O\left[\log t\cdot\log_2 t\cdot e^{-\frac{4\log_3 t}{\log_2 t}\{\log_2 t+\log_3 t-\log_4 t\}}\right] = O\left[\frac{\log t}{(\log_2 t)^3}\right].$$

Speziell auf der Kurve $\sigma=\frac{1}{2}+2\,\frac{\log_3 t}{\log_2 t}$ ist also für $t>t_0$

(4) $$|\zeta(s)| < e^{K\frac{\log t}{(\log_2 t)^3}},$$

also nach der Funktionalgleichung auf der Kurve $\sigma=\frac{1}{2}-2\,\frac{\log_3 t}{\log_2 t}$, $t>t_0$

(5) $$|\zeta(s)| < K_1\cdot t^{\frac{1}{2}-\sigma}e^{K\frac{\log t}{(\log_2 t)^3}} < e^{K_2\frac{\log t\cdot\log_3 t}{\log_2 t}}.$$

[4]) Ich setze $\log_2 t=\log\log t$, $\log_3 t=\log\log_2 t$.

Betrachten wir nun die für große t_0 im Gebiete

$$\tag{6} \tfrac{1}{2} - 2\frac{\log_3 t}{\log_2 t} \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2} + 2\frac{\log_3 t}{\log_2 t}, \quad t > t_0$$

reguläre Funktion

$$\varphi(s) = \frac{\zeta(s)}{e^{K_2 \frac{\log(-is)\cdot\log_3(-is)}{\log_2(-is)}}},$$

wo bei der Definition der vieldeutigen Funktionen jedem Logarithmus sein Hauptwert zu erteilen ist. Man sieht nun ohne Schwierigkeit, daß für $t \to \infty$

$$\frac{\log(-is)\cdot\log_3(-is)}{\log_2(-is)} = \frac{\log t\cdot\log_3 t}{\log_2 t} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

gilt, und zwar in bezug auf σ in jedem endlichen Intervall gleichmäßig.

Auf dem Rande des Gebietes (6) ist also nach (4) und (5) die Funktion $\varphi(s)$ beschränkt, und da sie im Innern des Gebietes jedenfalls nicht schneller als eine endliche Potenz von t wächst, so ist sie nach einem bekannten Phragmén-Lindelöfschen Satze auch im Innern beschränkt[5]).

Es ist also im Gebiete (6)

$$\tag{7} \log|\zeta(s)| < K_3 \frac{\log t\cdot\log_3 t}{\log_2 t}.$$

Wir setzen nun in (2)

$$\varepsilon = \frac{\log_3 T}{\log_2 T}.$$

Da $f(s) = \frac{1}{2}[\zeta(s+iT) + \zeta(s-iT)]$ ist und da über den Kreis $|s-2| = \frac{3}{2}(1+\varepsilon)$ integriert wird, so kommen bei der Integration für große Werte von T nur solche Werte des Argumentes in $\zeta(s+iT)$ in Betracht, die im Gebiete (6) oder rechts davon liegen. Für $\zeta(s-iT)$ gilt natürlich Entsprechendes in der unteren Halbebene.

Zuerst wird derjenige Teil des Integrals in (2) abgeschätzt, in dem entweder bei $\zeta(s+iT)$ oder bei $\zeta(s-iT)$ ein Argumentwert auftritt, der im Gebiete (6) oder in dem hierzu symmetrischen Gebiete der unteren Halbebene liegt. Der diesbezügliche Teil des Kreisbogens wird wieder schließlich unendlich klein, und zwar von der Ordnung $\left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^{\frac{1}{2}}$; für $f(s)$ gilt aber hier nach (7)

$$\log|f| = O\left(\frac{\log T\cdot\log_3 T}{\log_2 T}\right).$$

Für den ganzen übrigbleibenden Teil des Kreises gilt nach (3)

$$\log|f| = O\left[\frac{\log T}{(\log_2 T)^3}\right],$$

[5]) Vgl. Landau, Handbuch, II, S. 849.

so daß schließlich

$$l < \frac{1}{2\pi \log(1+\varepsilon)} \int_0^{2\pi} \log|f(2+re^{i\varphi})|\, d\varphi + \frac{2}{\varepsilon} =$$

$$= O\left\{\frac{\log_2 T}{\log_3 T}\left[\left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T} + \frac{\log T}{(\log_2 T)^3} + 1\right]\right\} = O\left[\log T \left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

gilt. Hieraus kann nunmehr ähnlich wie oben die zu beweisende Abschätzung für $R(T)$ gefolgert werden.

Stockholm, den 23. Februar 1918.

(Eingegangen am 21. März 1918.)