

## Zur Theorie der algebraischen Flächen.

Von RUD. STURM in Darmstadt.

---

1. Es sei eine algebraische Fläche  $F$  von der Ordnung  $n$ , dem Range  $r$ , der Classe  $m$  betrachtet; die Zahl der Wendetangenten in einer Ebene sei  $\alpha$ , durch einen Punkt  $\sigma$ . Der Torsus, welcher  $F$  längs eines ebenen Schnittes  $C$  umschrieben ist, hat die Ordnung  $n + \alpha^*$ , die Classe  $r$ ; seine Polarcurve in Bezug auf den unendlich fernen imaginären Kreis  $C_\infty^2$  hat also die Classe  $n + \alpha$  und die Ordnung  $r$ ; bringen wir die Tangenten dieser unendlich fernen Curve mit den Tangentialebenen des Torsus zum Schnitt, so erhalten wir eine Curve von der Ordnung  $n + r + \alpha$ . Dieselbe wird von den unendlich fernen Punkten der Tangenten von  $F$  in den Punkten von  $C$  gebildet, die je zu der in demselben Punkte berührenden Erzeugenden des Torsus normal sind;  $(n + r + \alpha)$ -mal fällt diese Tangente in die Ebene von  $C$ , berührt also  $C$  und ist deshalb zu der Torsus-Erzeugenden conjugirt, folglich Krümmungslinien-Tangente. Es giebt deshalb in jeder Ebene  $n + r + \alpha$  Krümmungslinien-Tangenten.

2. Oder: die Fläche der Normalen in den Punkten von  $C$  hat den Grad  $n + r$ ; es sei  $x$  die Ordnung der Cuspidalcurve von  $F$ , so dass  $C$   $x$  Rückkehrpunkte besitzt; in jedem derselben berühren zwei unendlich nahe Tangentialebenen und stehen also zwei unendlich nahe Normalen auf der Fläche senkrecht. Die  $x$  Rückkehrpunkte liefern demnach Torsallinien der Normalenfläche, deren Spitzen auf  $C$  liegen. Da  $C$  und diese Fläche — deren Rang  $\varrho$  sei — gleiches Geschlecht haben, so hat man:

$$r - 2(n-1) + x = \varrho - 2(n+r-1);$$

also  $\varrho = 3r + x = 3n + \alpha$ , also gleich der Ordnung der Evolute des ebenen Schnitts.

---

\*) Man vergl. in Bezug auf mehrere im Folgenden benutzte Sätze meine Aufsätze Math. Annalen Bd. VI, S. 241, und Bd. VII, S. 567.

Die Anzahl der Torsallinien der Normalenfläche ist

$$2(3r + \alpha - \{r + n\}) = 2(2r - n + \alpha);$$

also giebt es ausser den obigen  $\alpha$  noch  $2(2r - n) + \alpha = n + r + \alpha$ , deren Spitzen nicht auf  $C$  liegen. Demnach werden die Normalen von  $n + r + \alpha$  Punkten auf  $C$  von der Normale des Nachbarpunktes auf der Curve getroffen; d. h. in der Ebene von  $C$  giebt es  $n + r + \alpha$  Tangenten von Krümmungslinien.

3. Die Normalen der Fläche  $F$  auf den durch einen Punkt  $O$  gehenden Berührungsebenen bilden eine Fläche vom Grade  $m + r$ . Die Curve der Berührungspunkte dieser Ebenen wird in den Berührungspunkten der  $\iota$  durch  $O$  gehenden stationären Tangentialebenen je von der einzigen dort osculirenden Wendetangente berührt, weil überhaupt die Tangente der Curve zur Kante des Berührungskegels, in diesem Falle aber diese einzige Wendetangente zu allen andern Tangenten conjugirt ist. Da aber in zwei consecutiven Punkten dieser Geraden und auch der Berührungcurve die Tangentialebene der  $F$  dieselbe bleibt, so erhalten wir zwei parallele benachbarte Erzeugende der obigen Normalenfläche, demnach  $\iota$  Torsallinien derselben.

Da wieder das Geschlecht der Normalenfläche, deren Rang  $\varrho'$  sei, und des Kegels aus  $O$  an  $F$  das nämliche ist, so hat man:

$$r - 2(m - 1) + \iota = \varrho' - 2(m + r - 1),$$

also

$$\varrho' = 3r + \iota = 3m + \sigma.$$

Die Gesamtzahl der Torsallinien der Normalenfläche ist

$$2(3r + \iota - (m + r)) = 2(2r - m + \iota);$$

ziehen wir von diesen die obigen  $\iota$  ab, so bleiben

$$2(2r - m) + \iota = r + m + \sigma.$$

Diese beweisen, dass sich unter den Tangenten der Berührungcurve  $r + m + \sigma$  solche befinden, welche eine Krümmungslinie berühren, folglich thut dies auch die conjugirte Tangente, das ist die Kante des Berührungskegels; es giebt also durch jeden Punkt  $m + r + \sigma$  Krümmungslinien-Tangenten. Die beiden Zahlen  $m + r + \sigma$  und  $n + r + \alpha$  sind, wie auch zu erwarten war, dual. Das System der Krümmungslinien-Tangenten einer algebraischen Fläche ist demnach von der Ordnung  $m + r + \sigma$  und der Classe  $n + r + \alpha$ ; dieses System ist also ein algebraisches, während die Krümmungslinien selbst bei den Flächen von höherer als zweiter Ordnung wahrscheinlich im Allgemeinen transcendent sind.

4. Betrachten wir zwei Flächen  $F, F'$ , welche die Ordnung  $n$ , bez.  $n'$  und den Rang  $r$ , bez.  $r'$  haben. Sei  $l$  eine beliebige Gerade.

Von einem Punkte  $X$  derselben legen wir den Tangentialkegel an  $F$ ; seine Berührungscurve  $r^{\text{ter}}$  Ordnung trifft  $F'$  in  $rn'$  Punkten, deren Berührungsebenen die  $l$  in ebensovieleen Punkten  $X'$  schneiden. Jedem  $X'$  entsprechen umgekehrt  $r'n$  Punkte  $X$ . Jeder Coincidenzpunkt dieser Correspondenz liegt auf zwei Berührungsebenen von  $F, F'$ , die denselben Contactpunkt haben, also auf einer Tangente der Schnittcurve der beiden Flächen; folglich ist die Ordnung des Tangententorsus dieser Schnittcurve  $nr' + n'r$ .

Haben die beiden Flächen einen Berührungspunkt  $P$ , so sei  $X_0$  der Schnitt der gemeinsamen Berührungsebene mit  $l$ ; die dem  $X_0$  zugehörige Berührungscurve auf  $F$  (oder  $F'$ ) geht durch  $P$  und berührt dort die andere Fläche, hat also mit ihr noch  $n'r - 2$  Punkte gemein: der Punkt  $X_0$  repräsentirt deshalb zwei Coincidenzen; es ist ja auch bekannt, dass jeder Berührungspunkt die Ordnung des Tangententorsus der Schnittcurve um 2 vermindert.

Ist die Berührung (in  $P$ ) stationär und  $X_0$  der Schnittpunkt der gemeinsamen Berührungsebene mit  $l$ , so hat die zu  $X_0$  gehörige Berührungscurve der einen Fläche mit der Schnittcurve im Rückkehrpunkte  $P$  die Rückkehrtangente gemein, also mit der andern Fläche drei consecutive Punkte;  $X_0$  stellt demnach 3 Coincidenzen dar, weil er nur noch  $n'r - 3$  von ihm verschiedene entsprechende Punkte hat.

5. Sind  $m, m'$  die Classen der beiden Flächen, so ist die Ordnung des Torsus der gemeinsamen Tangentialebenen  $mr' + m'r$ .

6. Aus dem Resultate in Nr. 4. folgt mittelst der bekannten Formeln, dass die Classe des Tangententorsus der (ohne vielfache Punkte vorausgesetzten) Schnittcurve  $3(nr' + n'r - nn')$  ist; ebenso aus dem in Nr. 5., dass die Ordnung der Rückkehrcurve des gemeinsamen umschriebenen Torsus  $3(mr' + m'r - mm')$  ist.

Darmstadt, den 21. December 1875.