Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene.

Von

A. Wiman in Lund.

Das Forschungsgebiet, welches wir hier betreten wollen, ist in neuerer Zeit durch mehrere wichtige Abhandlungen von Hrn. S. Kantor bereichert worden. Dabei gedenken wir zuerst seiner von der Academie zu Neapel gekrönten Preisschrift*), in welcher er alle existirenden Typen von eindeutigen *periodischen* Transformationen in der Ebene bestimmt hat. Wurde hier die geometrische Construction der Typen erst durch die Lösung eines rein arithmetischen Problems vorbereitet, welches sich in die Untersuchungen der Herren Hermite und Frobenius über quadratische Formen einreiht, so skizzirte Hr. Kantor in einer späteren Arbeit**) eine neue von jenen arithmetischen Entwicklungen unabhängige geometrische Theorie. Durch diese letztere Abhandlung wurde ich veranlasst, die allgemeinere Aufgabe der *endlichen Gruppen* von birationalen Transformationen in der Ebene in Angriff zu nehmen. Inzwischen erschien vor Kurzem eine Arbeit von Hrn. Kantor über diesen Gegenstand***), als deren Schlussergebniss eine *Aufzählung der sämmtlichen Typen vollständiger endlicher Gruppen birationaler Transformationen* gegeben wird. Diese Aufzählung stimmt aber nicht mit den von mir erhaltenen Resultaten überein. In der That hat Hr. Kantor sowohl verschiedene Typen übersehen als auch andere mit fehlerhafter Ordnungszahl gegeben. In den folgenden Entwicklungen beabsichtige ich eine richtige Aufzählung der endlichen birationalen Transformationsgruppen in der Ebene zu liefern.

---

*) „*Premiers fondaments pour une théorie des transformations périodiques univoques*“, Nâples 1891. Ein Auszug ist im Journal für Mathematik, Bd. 114, S. 50 erschienen unter dem Titel: „*Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene*“.

**) „*Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene*“, Acta Mathematica, Bd. 19, S. 115.

***) „*Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*“ (Berlin, Mayer & Müller, 1895).

§ 1.

Die Aequivalenztheoreme.

In diesem Paragraphen stellen wir einige Theoreme zusammen, welche sämmtlich aus Hrn. Kantor's Arbeiten entlehnt sind. Als Ausgangspunkt wählen wir den folgenden Satz*):

1. *Jede endliche Gruppe von Transformationen besitzt eine invariante Curve, deren Geschlecht jede willkürliche Grenze überschreiten kann, aber sicher* > 2 *ist.*

Nun werden bekanntlich bei einer birationalen Transformation die adjungirten Curven in die adjungirten Curven der entsprechenden Curve übergeführt. Daraus folgt, dass bei einer endlichen Gruppe auch das System der adjungirten Curven einer invarianten Curve in sich übergeht. In derselben Weise muss auch das System der Curven reproducirt werden, welche sich zu einem bei der Gruppe invarianten Curvensystem adjungirt verhalten. Wir können folglich den Satz aussprechen**):

Wenn eine endliche Gruppe birationaler Transformationen eine Curve reproducirt, reproducirt sie auch das System der adjungirten Curven, sowie jedes der successiven Systeme.

2. Man kann also in der Reihe der successiven adjungirten Systeme fortgehen, bis man zu Curven vom Geschlechte $p = 1$ oder $p = 0$ gelangt. Dabei ist jedoch noch die Möglichkeit zu beachten, dass alle Curven des Endsystems zerfallen. Hr. Kantor hat aber bewiesen***), dass dies nur auf zwei Arten geschehen kann: entweder ist allen Curven des Systems eine feste Fundamentalcurve gemein, wobei man aber die übrigen Bestandtheile wie früher behandeln kann, oder es zerfällt jede Curve des Systems in $p_1 - 1$ rationale Curven, welche sämmtlich demselben Büschel angehören müssen, wobei p_1 das zum vorangehenden System gehörige Geschlecht bezeichnet. Dieser Büschel lässt sich birational in einen Geradenbüschel überführen.

Dergleichen Gruppen, bei denen ein Geradenbüschel invariant bleibt, nennt Hr. Kantor *orthanallagmatische Gruppen* oder *Gruppen von Jonquières.* Zu solchen Gruppen gelangt man, falls in der Reihe der successiven adjungirten Systeme ein System hyperelliptischer Curven auftritt, welches birational in C_n mit $(n-2)$-fachem Punkte übergeführt werden kann.

Wir nehmen nun an, die Curven des Endsystems seien vom Geschlechte $p = 1$. Die vorkommenden linearen Systeme elliptischer

---

*) Man sehe S. 40 der letzterwähnten Arbeit.

**) S. 41 der citirten Arbeit.

***) Acta Mathematica, Bd. 19, S. 119.

Curven sind nun nach einem Theorem von Bertini-Martinetti*) entweder einem $\infty^2, \infty^3, \cdots, \infty^9$ Systeme von C_3 oder einem Systeme von C_4 mit zwei festen Doppelpunkten oder endlich, falls die Dimension $= 1$, einem Büschel von Curven C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten birational äquivalent. Weil die einzigen bestimmenden Elemente bei vollständigen Systemen von adjungirten Curven feste Basispunkte sind, müssen die obigen Systeme von $\infty^2, \infty^3, \cdots, \infty^9$ C_3 beziehungsweise $7, 6, \ldots, 0$ feste Punkte besitzen; die C_4-Systeme dagegen keinen festen Punkt ausser den beiden δ, weil sie sonst C_3-Systemen äquivalent wären.

Wenn die Gruppe ein System von ∞^9, ∞^8 oder ∞^7 C_3 mit bez. 0, 1, 2 Basispunkten in sich transformirt, kann sie nur eine Collineationsgruppe sein. Unter den C_3 treten nämlich in diesen Fällen stets ausgezeichnete Systeme auf, welche aus lauter Geraden gebildet sind: im ersten Falle das System der dreifach gezählten Geraden, im zweiten und dritten das System der doppelten Geraden mit je einer Geraden durch den Basispunkt bez. mit der Verbindungsgeraden der Basispunkte.

Wenn die Gruppe das System der C_4 mit 2δ reproducirt, kann dieselbe nur aus Collineationen und quadratischen Transformationen bestehen. Unter den C_4 befindet sich nämlich das ausgezeichnete System der doppelten Kegelschnitte durch die beiden δ. Da ein solcher Kegelschnitt in eine beliebige Gerade und die Verbindungsgerade der beiden δ zerfallen kann, so ersieht man hieraus, dass bei der Gruppe gerade Linien nur in Kegelschnitte übergeführt werden können. Andere zerfallende Kegelschnitte erhält man aus je einer Geraden durch jeden δ; man erschliesst hieraus, dass die Strahlbüschel durch die beiden δ gegenüber der Gruppe zusammen ein invariantes System bilden.

Es bleibt noch übrig zu entscheiden, in welchen Fällen ein Büschel C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten das vollständige System der adjungirten Curven eines Curvensystems mit $p = 2$ darstellen kann. Das ist jedenfalls für $s = 1$ möglich, und zwar in der Weise dass 8 Basispunkte des C_3-Büschels Doppelpunkte von C_6 sind, der neunte aber vernachlässigt wird; geht man so weiter hinauf, so gelangt man zu C_9 mit 8 dreifachen Punkten, mithin vom Geschlechte $p = 4$. Allein auch für $s = 2$ existirt das gesuchte System mit $p = 2$; wir werden nämlich in § 6 zeigen, dass in diesem Falle 8 Basispunkte dreifache Punkte und der neunte einen Berührungsknoten (mit bestimmter Tangente) eines Büschels von C_9 liefern. Hier kann man aber nicht zu einer invarianten Curve, deren Geschlecht $p > 2$, gelangen. Letzterer

*) Rendiconti Ist. Lomb. 1886.

Büschel erweist sich nämlich als adjungirt zu einer einzigen C_{12} mit $p=2$, welche 8 vierfache und einen dreifachen Punkt, in welchem 2 Zweige einander osculiren, besitzt. Für $s>2$ lässt sich das fragliche System mit $p=2$ nicht construiren.

Es erübrigt noch den Fall zu behandeln, dass die Curven des Endsystems rational sind. Ist das betreffende System ein Büschel oder ein Netz, so kann man dasselbe birational in einen Geradenbüschel oder das Netz aller Geraden überführen, und die Gruppe ist folglich eine orthanallagmatische oder eine Collineationsgruppe. Ist die Dimension des Systems >2, so kann man dasselbe birational entweder in das System aller Kegelschnitte (ohne Basispunkte) oder in ein System von Curven C_n mit einem $(n-1)$-fachen Punkte überführen*); in letzterem Falle braucht man ersichtlich höchstens einen weiteren einfachen Basispunkt zuzulassen. Das System aller Kegelschnitte bleibt nur bei Collineationsgruppen invariant; dasselbe enthält ja das System der doppelten Geraden ausgezeichnet. Ebenfalls geht das System aller C_n mit einem $(n-1)$-fachen Punkte δ_{n-1} nur bei einer Collineationsgruppe, welche den Punkt δ_{n-1} invariant lässt, in sich über; unter den C_n hat man nämlich das ausgezeichnete System, welches aus je einer beliebigen Geraden und je einer $(n-1)$-fach gezählten Geraden durch δ_{n-1} besteht. Besitzt aber das System ausser δ_{n-1} noch einen einfachen Basispunkt, so erhält man ein ausgezeichnetes System von Curven C_n, welches aus je einer Geraden durch den einfachen Basispunkt und je einer $(n-1)$-fach gezählten Geraden durch δ_{n-1} besteht. Die Strahlbüschel durch diese beiden Punkte bleiben also bei der Gruppe invariant; doch können dieselben, falls $n=2$, mit einander vertauscht werden. Die Gruppe besteht nur aus Collineationen und quadratischen Transformationen.

3. Fassen wir die vorangehenden Resultate zusammen, so erhalten wir das folgende Endtheorem:

Jede endliche Gruppe von birationalen Transformationen ist äquivalent entweder

1) *einer Gruppe von Collineationen oder*

2) *einer orthanallagmatischen Gruppe oder*

3) *einer Gruppe quadratischer Transformationen, bei welcher zwei Strahlbüschel zusammen ein invariantes System bilden, oder*

4), 5), 6), 7), 8) *einer Gruppe, bei welcher ein System von Curven 3. Ordnung mit beziehungsweise* 3, 4, 5, 6, 7 *festen Punkten in sich übergeht, oder*

*) Vergl. G. Jung, „*Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche*", Annali di Matematica XVI.

9) *einer Gruppe, bei welcher ein System von Curven* C_6 *mit* 8 *festen Doppelpunkten und mithin auch der adjungirte Büschel* 3. *Ordnung invariant bleiben.*

Die hier aufgezählten Classen 4, 5, . . ., 9 bezeichnet man kurz als *Gruppen mit bez.* 3, 4, . . ., 8 *Punkten.*

Handelt es sich nur um die einzelnen periodischen Transformationen, so lassen sich die Classen 3, 4, 5 auf Collineationen und die Classe 6 auf orthanallagmatische Transformationen reduciren. Durch die Gleichungen der bezüglichen Transformationen werden nämlich feste Punkte bestimmt. Im Falle 6 erhält man einen invarianten Büschel von rationalen C_3 durch die 4 Basispunkte mit δ in einem solchen festen Punkte, und diesen Büschel kann man in einen Geradenbüschel überführen. In gleicher Weise ermittelt man in den anderen erwähnten Fällen invariante Netze, welche birational auf das Netz aller Geraden bezogen werden können. Als wesentlich verschiedene Fälle der periodischen birationalen Transformationen haben wir also nur *die Collineationen, die orthanallagmatischen Transformationen und die Transformationen mit* 6, 7, 8 Punkten.

In den folgenden Entwicklungen wollen wir nun die soeben ermittelten 9 Hauptclassen näher untersuchen.

§ 2.

Die endlichen Gruppen von Collineationen und orthanallagmatischen Transformationen.

1. Ueber die endlichen *Collineationsgruppen* können wir uns hier kurz fassen; dieselben sind ja in längeren Abhandlungen von den Herren C. Jordan und Valentiner untersucht. Nur das möchten wir hier wiederholen, dass die gewöhnliche Auffassung*), dass Hr. Jordan die betreffende Aufgabe vollständig erledigt habe, nicht richtig ist, da ja Hr. Valentiner eine neue Gruppe von der Ordnung 360 entdeckt hat. Letztere Gruppe ist in der That eine sehr wichtige, weil dieselbe, wie wir neuerdings bewiesen haben**), mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen holoedrisch isomorph ist.

Wollen wir nun der Vollständigkeit halber eine Aufzählung der endlichen Collineationsgruppen geben, so möge von vornherein die folgende Verabredung getroffen werden, dass *solche Gruppen, welche, wo immer sie auftreten, als Untergruppen innerhalb höherer Gruppen*

---

*) Auch Hr. Kantor kennt nur die von Hrn. Jordan bahandelten Gruppen. Man sehe seine „*Theorie der endlichen Gruppen*“, S. 44.

**) Man sehe meinen in den Mathematischen Annalen Bd. 47 veröffentlichten Aufsatz mit dem Titel „*Ueber eine einfache Gruppe von* 360 *ebenen Collineationen*“.

enthalten sind, nicht als Haupttypen betrachtet werden sollen. Wir erhalten dann:

1) *Eine Classe von trivialen Gruppen, bei denen entweder drei Punkte unter einander vertauscht werden, oder ein Punkt und eine nicht incidente Gerade invariant bleiben.*

Sodann haben wir drei isolirte Gruppen:

2) *Die Hesse'sche Gruppe von der Ordnung* 216, *welche das System der* 9 *Wendepunkte einer ebenen* C_3 *in sich transformirt.*

3) *Die Gruppe von der Ordnung* 168, *welche die*

$$C_4, \quad x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 = 0,$$

in sich überführt;

4) *Die Gruppe von der Ordnung* 360, *durch welche die*

$$C_6, \quad 10 x_1^3 x_2^3 + 9 x_3 (x_1^5 + x_2^5) - 45 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 135 x_3^4 x_1 x_2 + 27 x_3^6 = 0,$$

in sich transformirt wird.

Hierzu kommen noch drei Gruppen, welche nicht der Classe 1 angehören. Dieselben sind:

1) Die Collineationsgruppe der harmonischen C_3. Diese Gruppe von der Ordnung 36 ist Untergruppe sowohl der Hesse'schen Gruppe als der G_{360};

2) Die mehr umfassende Gruppe von der Ordnung 72, bei welcher die harmonische C_3 auch mit ihrer Hesse'schen Curve vertauscht werden kann. Dieselbe ist Untergruppe der Hesse'schen Gruppe;

3) Die ternäre Ikosaedergruppe, welche einen Kegelschnitt in sich überführt. Diese G_{60} ist Untergruppe der G_{360}.

2. Wir schreiten jetzt zur Behandlung der *orthanallagmatischen Gruppen.* Zuerst ist es einleuchtend, dass die Strahlen des fundamentalen invarianten Geradenbüschels sich nach irgend einer linearen Gruppe vertauschen müssen. Die Gesammtgruppe entsteht durch Combination dieser Gruppe mit einer anderen linearen Gruppe, bei welcher jede Gerade des Büschels invariant bleibt.

Bei einer zur letzteren Gruppe gehörigen Transformation müssen zwei Punkte auf jeder Geraden des Büschels fest bleiben. Man hat hier zwei Möglichkeiten: entweder erfüllen diese Punkte *zwei* rationale Curven oder *eine* hyperelliptische Curve.

Wir nehmen zuerst an, die fraglichen Doppelpunktsörter zerlegen sich bei jeder bezüglichen Transformation in je zwei rationale Curven. Hr. Kantor hat dann hervorgehoben, dass man drei beliebige Curven C_M mit $(M-1)$-fachem Punkte im Fundamentalpunkte: D_1, D_1', D_2 herausnehmen kann, und sodann auf jeder Geraden des Büschels eine bestimmte binäre Gruppe ergänzen kann, bei welcher D_1, D_1' die Doppelpunkte einer Transformation und D_2 einen Doppelpunkt einer bestimmten anderen Transformation ausschneiden, wonach die weiteren Doppelpunktsörter sich leicht bestimmen lassen*).

Diesen Ansatz wollen wir hier weiter verfolgen. Zunächst ist es einleuchtend, dass man keineswegs drei Curven mit gleicher Ordnung zu nehmen braucht. Es seien n_1, n_1', n_2 die Ordnungen der bezüglichen Curven D_1, D_1', D_2. Wir nehmen an, dass ausser dem Fundamentalpunkte ϱ Schnittpunkte allen drei Curven gemein sind. Man ergänzt nun jede Curve durch diejenigen Geraden des fundamentalen Büschels, welche durch die Schnittpunkte der beiden anderen gehen. In dieser Weise gehören die drei Curven zu einem Büschel von der Ordnung $n_1 + n_1' + n_2 - 1 - \varrho$, welchen wir durch successive quadratischen Transformationen in einen Geradenbüschel überführen können. Die weiteren Doppelpunktsörter gehören ersichtlich zu demselben Büschel. *Wir erhalten demnach zwei invariante Geradenbüschel, und die fragliche orthanallagmatische Gruppe entsteht durch die Combination der beiden Gruppen, nach welchen die Geraden dieser Büschel permutirt werden.*

3. Man kann somit einen zweiten invarianten Geradenbüschel herstellen, falls jede Gerade durch den fundamentalen Punkt O bei einer Diedergruppe, Tetraedergruppe, Oktaedergruppe oder Ikosaedergruppe in sich übergeht. Wir müssen hier fragen, ob dieser Satz noch gültig bleibt, falls jede Gerade des erwähnten Büschels nur bei der Identität oder bei einer cyklischen Gruppe mit *zwei* rationalen Doppelpunktscurven in sich übergeführt wird. Um das zu entscheiden, brauchen wir nur den Inbegriff derjenigen Punkte zu betrachten, denen bei einer oder mehreren Transformationen nicht nur einzelne Punkte, sondern ganze Geraden durch O entsprechen. Es sei A ein solcher Punkt und a seine Verbindungsgerade mit O. Wir nehmen an, dass die Gerade a durch die Transformationsgruppe in die Geraden $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$ übergeführt werden kann. Dabei mögen dem Punkte A die Gesammtheit der Punkte der r Geraden $a_1, \ldots, a_r$, aber nur einzelne Punkte $A_{r+1}, \ldots, A_{n-1}$ auf den Geraden $a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$ entsprechen, wobei freilich zunächst vorausgesetzt wird, dass *eine beliebige Gerade des Büschels nur bei der Identität invariant bleibt.* In dieser Weise entsprechen den Punkten der Geraden $a_1, \ldots, a_r$ die Ausgangsrichtungen von den Punkten $A, A_{r+1}, \ldots, A_{n-1}$; man erschliesst aber auch, dass andererseits den Punkten der Geraden $a, a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$ die Ausgangsrichtungen gewisser Punkte $A_1', \ldots, A_r'$ auf den bezüglichen Geraden $a_1, \ldots, a_r$ entsprechen. Wir haben also auf n bei der Gruppe sich geschlossen permutirenden Geraden zwei Systeme von *einfachen Fundamentalpunkten* erhalten: $A, A_{r+1}, \ldots, A_{n-1}$

*) Man sehe Kantor, „Theorie der endlichen Gruppen", S. 46.

und $A_1', \ldots, A_r'$. Solcherweise sind wir zu dem Resultate gekommen, dass einfache Fundamentalpunkte immer gleichzeitig auf allen Geraden eines Systems auftreten, welches sich bei der Gruppe geschlossen permutirt, dass aber dieselben stets in zwei zu einander conjugirte Systeme zerlegt werden, welche in dem betrachteten Beispiel durch die A und die A' geliefert werden. Die Gesammtheit der einfachen Fundamentalpunkte können wir also in eine Zahl von je zwei solchen conjugirten Systemen zusammenstellen. Es eröffnet sich aber hier eine Methode, um die Zahl der einfachen Fundamentalpunkte zu vermindern. Legt man nämlich die drei Hauptpunkte einer quadratischen Transformation:

$$x_1'x_1 = x_2'x_2 = x_3'x_3,$$

in die Punkte O, A_1', A_2', so gehen ersichtlich die Punkte A_1', A_2' nach der Transformation in Fundamentalpunkte von derselben Art wie der Punkt A über. Allgemeiner gilt es, dass, falls man die drei Hauptpunkte der Transformation in O und in irgend zwei einfachen Fundamentalpunkten wählt, letztere Punkte in Fundamentalpunkte der jedesmal conjugirten Art übergehen. Hat man also auf diese Weise in dem gewählten Beispiel alle Punkte A' in Punkte A übergeführt, so entsprechen einem Punkte A nur die anderen Punkte A, aber keine ganze Gerade; die Punkte A haben somit ihre Eigenschaft als Fundamentalpunkte eingebüsst. Nun scheint es einleuchtend, dass man in dieser Weise durch successive quadratische Transformationen jede bei der Gruppe zusammengehörige Reihe von Fundamentalpunkten mit einer Ausnahme in solche derselben Art überführen kann. Man würde also am Ende nur zwei Hauptfälle zu untersuchen haben:

1) Alle einfachen Fundamentalpunkte sind verschwunden. Die Gruppe muss eine Collineationsgruppe sein, welche den Punkt O invariant lässt.

2) Eine einzige Reihe von einfachen Fundamentalpunkten ist übrig geblieben, und ein einziger Punkt A dieser Reihe ist zu den übrigen conjugirt. Bei einer Transformation der Gruppe können hier nur drei Hauptpunkte auftreten: O, A und der Punkt, welcher in die Gerade OA übergeführt wird. Hieraus folgt, dass die Transformationen der Gruppe aus lauter quadratischen Transformationen bestehen, und dass der Geradenbüschel durch A invariant bleibt.

Um einen etwaigen Einwand zu beseitigen, sollen hier noch die folgenden Erörterungen eingeschaltet werden. Jede Reihe von einfachen Fundamentalpunkten besteht aus zwei zu einander conjugirten Systemen. In der angewandten Methode nahmen wir aus jeder Reihe das eine System heraus, und die so erhaltenen Punkte benutzten wir als Hauptpunkte bei den successiven quadratischen Transformationen. War die Zahl dieser Punkte gerade $= 2n$, so hatte man n Transformationen nöthig, um den obigen Hauptfall 1 zu erreichen; war dagegen ihre Zahl ungerade $= 2n + 1$, so konnte man durch n Transformationen zum Falle 2 gelangen. Der Inbegriff jener quadratischen Transformationen besitzt aber im Falle 1 die Bedeutung, dass man das Curvennetz C_{n+1}, welches durch die $2n$ Fundamentalpunkte und einen n-fachen Punkt δ_n in O bestimmt wird, in das Netz der Geraden überführt; im Falle 2 wird dagegen der Curvenbüschel C_{n+1} durch die $2n + 1$ Fundamentalpunkte mit δ_n in O in einen Geradenbüschel transformirt. Man kann aber noch andere gegenüber der Gruppe invarianten Netze oder Büschel erhalten, indem man ausser den erwähnten Fundamentalpunkten als Basispunkte noch irgend welche bei der Gruppe sich geschlossen permutirende Reihen hinzunimmt. Die Invarianz der fraglichen Netze bez. Büschel erschliesst man leicht daraus, dass dieselben bei jeder Transformation der Gruppe in Netze bez. Büschel mit *denselben aber keinen anderen* Basispunkten und (im Falle eines Netzes) einem freien Schnittpunkte transformirt werden müssen, was, wie eine leichte Abzählung lehrt, bei keinem anderen Netze oder Büschel zutrifft. *Man kann also auf unendlich viele Weisen die Gruppe in eine Collineationsgruppe oder in eine Gruppe mit einem zweiten invarianten Geradenbüschel überführen.*

Es giebt natürlich auch Fälle, wo die Basispunkte eines Netzes oder Büschels in so specieller Lage sich befinden, dass durch dieselben kein eigentliches Netz bez. Büschel bestimmt wird, sondern *nur eine einzige Curve*, welche vermittelst beliebiger Geraden durch O ergänzt wird; dies trifft z. B. zu, wenn dieselben auf einer Geraden liegen, und die Zahl der einfachen Basispunkte grösser als die Ordnung der Curven ist. Jene einzige Curve ist natürlich gegenüber der Gruppe invariant. Hat man drei solche invariante Curven erhalten, so bestimmen diese, wie in der 2. Nummer dieses Paragraphen beschrieben wird, *einen Büschel, von welchem jede Curve bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt.* Diesen Büschel kann man selbstverständlich in einen Geradenbüschel überführen.

4. Wir wollen jetzt besonders den Fall behandeln, dass *jede Gerade des fundamentalen Büschels durch eine cyklische Gruppe in sich übergeht*, wobei die Doppelpunkte *zwei rationale Curven* erfüllen. Diese beiden Doppelpunktscurven sind bei der Gruppe invariant, und man kann dieselben durch successive quadratische Transformationen, bei denen stets O einen Hauptpunkt abgiebt, in zwei Gerade, L_1 und L_2, überführen, deren Schnittpunkt wir mit P bezeichnen wollen. Im Allgemeinen ist hier der durch L_1 und L_2 bestimmte Büschel gegenüber der Gruppe *nicht* invariant. In der That brauchen wir auch in diesem Falle nur die einfachen Fundamentalpunkte zu betrachten, um invariante Büschel oder Netze herstellen zu können. Als solche sind

zuerst einerseits P und andererseits die der Geraden OP entsprechenden Punkte zu nennen; letztere Punkte liegen zu je μ auf jeder dem Punkte P entsprechenden Geraden, wenn μ die Ordnung der Gruppe bezeichnet, bei welcher jeder Punkt der Geraden L_1 und L_2 fest bleibt. Alle anderen Fundamentalpunkte müssen auf L_1 oder L_2 liegen. Punkte auf einer von diesen Geraden werden ja immer in Punkte derselben Geraden transformirt; soll dann eine durch O gehende Gerade in einen Fundamentalpunkt übergeführt werden, so muss ersichtlich dieser Punkt entweder auf L_1 oder L_2 belegen sein. Sagen wir auf L_1, dann folgern wir sofort, dass den anderen Punkten auf der Verbindungsgeraden des Fundamentalpunktes mit O ein einzelner Punkt, der Schnittpunkt der ersterwähnten Geraden mit L_2, entspricht. Man gelangt so zu dem Resultate, dass die Fundamentalpunkte auf einer Reihe bei der Gruppe sich geschlossen permutirender Geraden in zwei zu einander conjugirten Systemen auftreten, welche auf L_1 bez. L_2 liegen, Wir können aber in vorhin beschriebener Weise diese Reihen von Fundamentalpunkten mit einer Ausnahme durch quadratische Transformationen zerstören. Man braucht also nur eine einzige Reihe zu betrachten, deren Punkte auf L_1 und L_2 beliebig vertheilt sein mögen.

Es erwächst nun die Aufgabe, invariante Büschel oder Netze C_{n+1} mit δ_n in O auch in diesem Falle zu bestimmen. Als Basispunkte müssen hier vor allem P und entweder die Fundamentalpunkte auf L_1 oder diejenigen auf L_2 gewählt werden. Die weiteren Basispunkte müssen bei der Gruppe zusammengehörige Punktsysteme auf L_1 und L_2 bilden. Punktgruppen ausserhalb dieser Geraden, welche sich geschlossen permutiren, können nicht als Basispunkte benutzt werden, weil von denselben jedesmal μ auf derselben Geraden durch O auftreten, was der Bedingung eines Systems C_{n+1} mit δ_n in O widerstreitet. Man erhält nun einen Büschel der gesuchten Art, falls ausser P n Basispunkte auf jeder der erwähnten Geraden genommen werden können, ein Netz dagegen, falls n Basispunkte auf der einen und nur $n-1$ auf der anderen gewählt werden. Es fragt sich nun, ob man auch bei jeder Vertheilung der einfachen Fundamentalpunkte entweder die gleiche oder nur um eine Einheit verschiedene Zahl von Basispunkten auf L_1 und L_2 nehmen kann. Auf diese Frage können wir sofort eine bejahende Antwort geben. In der That brauchen wir hier nur einen von Hrn. Klein aufgestellten Satz zu benutzen, nach welchem man aus den bei einer beliebigen binären Gruppe invarianten Formen immer einen rationalen Ausdruck vom *zweiten* Grade aufbauen kann*). Man kann ja den Curven des gesuchten Systems die Bedingung einer Berührung mit L_1 bez. L_2 von beliebig hoher Ordnung

*) Man sehe „*Vorlesungen über das Ikosaeder*", S. 64.

in den Verschwindungspunkten des Zählers bez. Nenners des betreffenden Ausdrucks auferlegen. Also schliessen wir, dass auch in diesem Falle *die Gruppe auf unendlich viele Weisen in eine Collineationsgruppe oder in eine Gruppe mit einem zweiten invarianten Geradenbüschel übergeführt werden kann.* Als allgemeines Resultat der vorangehenden Nummern 2—4 haben wir somit das folgende erhalten:

Giebt es innerhalb einer orthanallagmatischen Gruppe keine Transformation, bei der jede Gerade des fundamentalen Büschels in der Weise in sich übergeht, dass der Ort der fest bleibenden Punkte nicht zerfällt, so lässt sich dieselbe birational entweder in eine Collineationsgruppe oder in eine Gruppe mit einem zweiten invarianten Strahlenbüschel transformiren.

5. Wir wollen jetzt noch diejenigen orthanallagmatischen Gruppen betrachten, bei denen *nicht zerfallende Doppelpunktscurven* auftreten. Den Strahlen des fundamentalen Büschels denken wir uns einen Parameter x eindeutig zugeordnet. Immer können wir die Gleichung *einer* Doppelpunktscurve in die Gestalt

$$y^2 = F(x) \tag{1}$$

bringen, wo $F(x)$ eine ganze Function ohne doppelte Factoren bezeichnet. Soll nun jeder Punkt dieser Curve bei einer Transformation von der Periode n fest bleiben, so muss diese Transformation durch die Gleichung

$$\frac{y' - \sqrt{F(x)}}{y' + \sqrt{F(x)}} = \varepsilon \cdot \frac{y - \sqrt{F(x)}}{y + \sqrt{F(x)}} \tag{2}$$

definirt werden können, wo $\varepsilon^n = 1$. Nur für $\varepsilon = -1$ wird aber hier y' *rational* durch x und y ausgedrückt, und zwar in der Form

$$y' = \frac{F(x)}{y}. \tag{3}$$

Dem widerspricht nicht, dass es auch, wie schon Hr. Kantor hervorgehoben hat, *aperiodische* eindeutige Transformationen giebt, bei denen alle Punkte einer hyperelliptischen Curve fest bleiben. Es ist ja für beliebiges $R(x)$ die Curve (1) Doppelpunktscurve bei jeder Transformation

$$y' = \frac{y R(x) + F(x)}{y + R(x)}. \tag{4}$$

Wir sind soeben zum Resultate gekommen, dass *nicht zerfallende Doppelpunktscurven nur bei involutorischen orthanallagmatischen Transformationen auftreten.* Aus der 2. Nummer dieses Paragraphen leuchtet aber hervor, dass, falls die Doppelpunktsörter bei mehr als einer Transformation zerfallen, das bei allen die Geraden des Hauptbüschels nicht permutirenden Transformationen der Fall sein muss. Man ersieht hieraus, dass die hier zu behandelnden Transformationen auf den

Geraden des fraglichen Büschels keine andere Gruppen als *Diedergruppen* G_{2n} hervorbringen können, wobei, falls $n > 2$, die zur ausgezeichneten cyklischen Untergruppe gehörigen Doppelpunkte zwei rationale Curven erfüllen.

Permutiren sich die Punkte jener Geraden nach einer *Vierergruppe*, so können also alle drei Doppelpunktscurven hyperelliptische Curven sein. Jede von diesen Curven muss bekanntermassen gegenüber allen Operationen der Vierergruppe invariant sein. Wir suchen also die bei der Operation (3) unverändert bleibenden hyperelliptischen Curven, deren Specialschaar g_2' durch den fundamentalen Strahlenbüschel ausgeschnitten wird. Wir erhalten unmittelbar

$$(5) \qquad F_1(x)\,y^2 + 2F_2(x)\,y + F_1(x)\,F(x) = 0,$$

wobei die ganzen Functionen F_1 und F_2 beliebig gewählt werden können. Jeder Punkt einer Curve (5) bleibt bei einer Operation

$$(6) \qquad F_1(x)\,y' + F_2(x) = \frac{\{F_2(x)\}^2 - F(x)\{F_1(x)\}^2}{F_1(x)y + F_2(x)}$$

invariant. Die dritte Operation der Vierergruppe erhält man durch Combination von (3) und (6), und zwar in der Normalgestalt

$$(7) \qquad F_2(x)\,y' + F(x)\,F_1(x) = \frac{F(x)\,[F(x)\{F_1(x)\}^2 - \{F_2(x)\}^2]}{F_2(x)y + F(x)\{F_1(x)\}^2}.$$

Die zugehörige Doppelpunktscurve besitzt die Gleichung

$$(8) \qquad F_2(x)y^2 + 2F(x)\,F_1(x)y + F_2(x)\,F(x) = 0\ ^{*)}.$$

Die drei Doppelpunktscurven (1), (5) und (8) stehen mit einander in einem leicht angebbaren Zusammenhange. *Jeder Verzweigungspunkt der einen muss nämlich auch Verzweigungspunkt einer anderen sein, und durch denselben muss die dritte Curve gehen.* Kein Punkt kann aber *als Verzweigungspunkt* allen drei Curven gemein sein. Man kann umgekehrt auch drei beliebige hyperelliptische Curven als Doppelpunktsörter wählen, wenn nur die obige Bedingung befriedigt wird**).

Möge jetzt die Gruppe auf den Geraden des fundamentalen Büschels eine *Diedergruppe* G_{2n} ($n > 2$) erzeugen. Die beiden Doppelpunktscurven bei der zugehörigen cyklischen G_n können wir in die Gerade $y = 0$ und in den Basispunkt des Büschels überführen, so dass dieselbe G_n durch die Operation

$$(9) \qquad y' = \varepsilon y$$

erzeugt wird, wo ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel bezeichnet. Die anderen Operationen innerhalb der Diedergruppe müssen diese beiden Oerter vertauschen. Dieselben sind folglich von der Gestalt

---

*) Man muss annehmen, dass im Allgemeinen F_2 und F gemeinschaftliche Factoren enthalten.

**) Man vergleiche Kantor „Theorie der endlichen Gruppen", S. 46.

$$(10) \qquad y' = \frac{\varepsilon^i R(x)}{y}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

womit auch die weiteren Doppelpunktscurven

$$(11) \qquad y^2 = \varepsilon^i R(x)$$

gegeben sind.

Bisher haben wir in dieser Nummer nur diejenigen Untergruppen der bezüglichen orthanallagmatischen Gruppen betrachtet, bei denen jede Gerade des fundamentalen Büschels fest bleibt. Man ersieht aber leicht, wie die binären Gruppen, nach welchen die Geraden des Büschels permutirt werden, aus den Gruppen, welche beziehungsweise die Functionen F und R zulassen, bestimmt werden können.

§ 3.

Die folgenden vier Classen.

1. Die Gruppen, bei denen die Kegelschnitte durch zwei feste Punkte A und B ein invariantes System bilden, oder, wie Hr. Kantor sie nennt, *die Gruppen* M_2 *und* M_2' lassen sich leicht bestimmen. Diese Kegelschnitte liefern ja die Bilder der ebenen Schnittcurven einer Fläche zweiten Grades bei der bekannten eindeutigen Abbildung der Fläche auf eine Ebene, welche vermittelst stereographischer Projection bewirkt werden kann. *Die fraglichen Transformationsgruppen der Ebene müssen also den Collineationsgruppen einer Fläche 2. Grades* F_2 *entsprechen.* Letztere Gruppen sind aber theils die Gruppen M_2, bei denen jedes System von erzeugenden Geraden invariant bleibt, theils die Gruppen M_2', bei denen die Systeme vertauscht werden; doch muss ersichtlich die Hälfte der Operationen einer Gruppe M_2' eine ausgezeichnete Untergruppe M_2 bilden. Die Gruppen M_2 erzeugt man durch die Combination zweier binären Gruppen, nach welchen die Geraden der Erzeugenden-Systeme sich permutiren, wobei die einzelnen Operationen der beiden Gruppen auf irgend eine isomorphe Art combinirt werden müssen. Soll die M_2 Untergruppe einer M_2' bilden, so müssen jene binären Gruppen holoedrisch isomorph sein.

Da die Erzeugenden-Systeme der F_2 bei der Abbildung in die Strahlenbüschel durch A und B übergehen, so bilden die Gruppen M_2 die im vorigen Paragraphen betrachteten Gruppen mit zwei invarianten Strahlenbüscheln. Nur die Gruppen M_2' liefern also neue Typen.

2. Wir wollen jetzt diejenigen Gruppen untersuchen, bei denen ein System von C_3 mit bez. 3, 4, 5 festen Basispunkten invariant bleibt, oder, nach Hrn. Kantor's Terminologie, *die Gruppen* M_3, M_4 *und* M_5. Im ersten Falle erhält man zwei Netze, das Netz der Geraden und das Netz der Kegelschnitte durch die drei Basispunkte,

welche die Eigenschaft besitzen, dass man aus jedem Netze eine beliebige Curve herausnehmen kann, welche zusammen eine C_3 des Systems bilden. *Die Hälfte der Operationen einer Gruppe M_3, welche keine Collineationsgruppe ist, besteht aus quadratischen Transformationen, welche jene beiden Netze vertauschen, die andere und ausgezeichnete Hälfte aus Collineationen, welche dieselben invariant lassen.*

3. *Die Gruppe M_4.* Man hat hier 5 Netze: das Netz der Geraden und 4 Netze von Kegelschnitten durch je drei Basispunkte; desgleichen 5 Büschel: 4 Büschel von Geraden durch je einen Basispunkt und den Büschel der Kegelschnitte durch alle 4 Basispunkte. Diese Netze und Büschel sind in der Weise mit einander verbunden, dass eine beliebige Curve eines Netzes und eine beliebige Curve eines zugeordneten Büschels eine C_3 des invarianten Systems zusammensetzen. *Die Gruppe M_4 erhält man nun durch den Inbegriff aller* 120 *Vertauschungen dieser* 5 *Netze bez. Büschel.* Diese G_{120} besteht nur aus Collineationen und quadratischen Transformationen, da ja das Netz der Geraden nur in sich selbst und in vier Netze von Kegelschnitten übergeführt werden kann *).

Die 5 erwähnten Büschel schneiden die Specialschaaren g_4' einer bestimmten bei der G_{120} invarianten C_6 vom Geschlechte $p=6$ aus. Wählt man die Doppelpunkte in den Coordinatenecken und im Punkte $x_1=x_2=x_3$, so lautet die Gleichung dieser Curve:

$$2\Sigma(x_1^4x_2x_3+x_2^3x_3^3)-2\Sigma x_1^4x_2^2+\Sigma x_1^3x_2^2x_3-6x_1^2x_2^2x_3^2=0.$$

4. *Die Gruppen M_5.* Unter den C_3 des invarianten Systems treten hier 16 *Netze* auf, welche etwa noch durch einen festen Kegelschnitt oder Gerade ergänzt werden. Dieselben sind: das Netz der Geraden, 10 Netze von Kegelschnitten durch je 3 Basispunkte und 5 Netze von C_3 mit δ in je einem Basispunkte. Nun hat Hr. Kantor gefunden, dass es bei einer allgemeinen Lage der Basispunkte stets *eine* Transformation giebt, welche das Netz der Geraden in ein beliebiges der anderen 15 Netze transformirt, und dass diese 15 Transformationen involutorisch sind. So gehen z. B. das Netz der Geraden und ein Netz von Kegelschnitten bei einer quadratischen Transformation in einander über, bei welcher jede Ecke eines von drei Basispunkten gebildeten Dreiecks mit der gegenüberliegenden Seite vertauscht wird, und ausserdem die 2 übrigen Basispunkte permutirt werden.

*) Die obigen Resultate bezüglich der Gruppen M_2, M_2', M_3 und M_4 sind schon von Hrn. Kantor gegeben. Indess ist der Gegenstand dieses Paragraphen auch von Hrn. Autonne behandelt. Hr. Kantor hat das Verhältniss seiner Theorie zu den von diesem Forscher publicirten Noten in seiner „Theorie der endlichen Gruppen“, S. 52 besprochen.

Soll die Gruppe M_5 andere Transformationen als die G_{16} enthalten, so muss es ersichtlich innerhalb derselben andere Operationen als die Identität geben, bei denen das Geradennetz invariant bleibt. Damit die Gruppe M_5 auf keine der früheren Classen reducibel sei, dürfen von den Basispunkten nicht zwei zusammenfallen oder drei in gerader Linie liegen. Berücksichtigt man diese Beschränkung, so findet man mit Hrn. Kantor, dass die einzigen Collineationsgruppen, welche die 5 Basispunkte als geschlossenes System permutiren können, die folgenden sind:

1) *Die Identität.*

2) *Eine* G_2.

3) *Eine cyklische* G_4. Hier kann man die 5 Basispunkte als die 4 Ecken eines Rechtecks und einen unendlich entfernten Kreispunkt betrachten.

4) *Diedrische* G_6. Als Basispunktè kann man hier die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und die beiden unendlich entfernten Kreispunkte wählen.

5) *Diedrische* G_{10}. Die Basispunkte kann man aus den Ecken eines regulären Fünfecks erhalten.

Die Gesammtgruppen M_5 *erhält man durch Combination der in jedem Falle auftretenden ausgezeichneten* G_{16} *mit diesen Collineationsgruppen. Die Ordnungen der Gruppen in den erwähnten* 5 *Fällen sind somit:* 16, 32, 64, 96, 160*).

Wir wollen indessen das Problem der Gruppen M_5 noch von einer anderen Seite angreifen. Wir wählen aus den C_3 des invarianten Systems irgend 5 linear-unabhängige Curven:

$$X_i = 0. \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

Sodann betrachten wir die Relationen 2. Grades:

$$\Sigma a_{ik} X_i X_k = 0,$$

welche Curven 6. Ordnung mit δ in den 5 Basispunkten definiren. Nun lehrt eine leichte Abzählung, dass eine solche C_6 durch 12 neue Bedingungen bestimmt wird. Die obige Gleichung ist aber erst durch Festlegung der Verhältnisse der 15 Constanten a_{ik} bestimmt. Hiernach erschliessen wir, dass zwei Relationen:

$$(1) \qquad F_1 = \Sigma \alpha_{ik} X_i X_k = 0, \quad F_2 = \Sigma \beta_{ik} X_i X_k = 0,$$

identisch für die ganze Ebene gelten müssen. Man kann also die Ebene als das Bild der Schnittfläche zweier dreidimensionalen Gebilde zweiter Ordnung im vierdimensionalen Raume betrachten. Es ist auch bekannt, dass, beim Gebrauche von pentasphärischen Coordinaten, die

*) Hr. Kantor hat (S. 52 und 105 seiner citirten Arbeit) für die Ordnungen der betreffenden Gruppen die unrichtigen Zahlen: 15, 30, 60, 90, 150, gegeben.

Gleichungen (1) *eine Cyklide* bestimmen. Man erkennt auch leicht, dass jene Fläche im vierdimensionalen Raume von einem beliebigen Punkte in eine Fläche F_4 im dreidimensionalen Raume mit einem doppelten Kegelschnitte projicirt werden kann. Es wäre hier möglich die bekannten Eigenschaften der Cykliden auf die Flächen (1) zu übertragen. Indess begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass auch eine Fläche (1) *sechzehn Gerade enthält.* Diese Geraden werden bei der Abbildung der Fläche auf die Ebene in die 5 Basispunkte, die 10 Verbindungsgeraden dieser Punkte und den dieselben enthaltenden Kegelschnitt übergeführt. Den im Anfang dieser Nummer erwähnten 16 Netzen entsprechen im vierdimensionalen Raume 16 Netze von dreidimensionalen Räumen, welche je eine der 16 Geraden enthalten. Die Abbildung auf die Ebene kann als Projection von einer der 16 Geraden aufgefasst werden, und zwar von derjenigen, welche in einen Kegelschnitt transformirt wird; dabei entsprechen den Basispunkten 5 Gerade, welche jene Gerade schneiden.

Nach der Bestimmung derjenigen λ-Werthe, für welche die Discriminante $\Delta_5(\lambda)$ von $F_1 + \lambda F_2$ verschwindet, können wir bekanntlich die Gleichungen (1) im Allgemeinen auf die folgende Normalgestalt bringen:

$$\Sigma a_i X_i^2 = 0, \qquad \Sigma b_i X_i^2 = 0. \tag{2}$$

Es wäre hier eine grosse Menge Fälle zu discutiren, wo die Gleichung $\Delta_5 = 0$ zusammenfallende Wurzeln besitzt. Ohne aber in weitere Einzelheiten eingehen zu wollen, begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass beim Auftreten von doppelten Wurzeln entweder zwei Basispunkte zusammenfallen, oder deren drei in gerader Linie liegen, welche Fälle übrigens äquivalent sind. Wir brauchen also die fraglichen Specialfälle weiterhin nicht zu berücksichtigen.

Den Transformationsgruppen M_5 in der Ebene müssen nun die Collineationsgruppen entsprechen, welche die Fläche (2) in sich selbst überführen. Durch Combination der Zeichenwechsel der X_i erhält man sofort eine G_{16}, welche aus lauter involutorischen Transformationen besteht. Damit noch weitere Transformationen vorkommen, müssen die X_i in irgend einer Weise mit einander vertauscht werden können. Man erlangt so jene 5 Gruppen wieder, welche oben durch geometrische Betrachtungen in der Ebene gefunden wurden.

1) G_{16} im allgemeinen Falle.

2) G_{32}. Die Gleichungen (2) lassen sich schreiben:

$$X_1^2 + X_3^2 + a(X_2^2 + X_4^2) + X_5^2 = 0;$$
$$X_1^2 - X_3^2 + b(X_2^2 - X_4^2) = 0.$$

Hier können gleichzeitig X_1 mit X_3 und X_2 mit X_4 vertauscht werden.

3) G_{64}.

$$X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 = 0;$$
$$X_1^2 + iX_2^2 - X_3^2 - iX_4^2 = 0.$$

Hier ist die cyklische Vertauschung $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ möglich.

4) G_{96}.

$$X_1^2 + jX_2^2 + j^2 X_3^2 + X_4^2 = 0; \quad \left(j = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right).$$
$$X_1^2 + j^2 X_2^2 + jX_3^2 + X_5^2 = 0.$$

Die Reihe $(X_1 X_2 X_3)$ kann hier sowohl cyklisch verschoben werden als auch in die inverse Reihe $(X_3 X_2 X_1)$ übergehen; in letzterem Falle müssen aber X_4 und X_5 vertauscht werden.

5) G_{160}.

$$X_1^2 + \varepsilon X_2^2 + \varepsilon^2 X_3^2 + \varepsilon^3 X_4^2 + \varepsilon^4 X_5^2 = 0: \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right).$$
$$\varepsilon^4 X_1^2 + \varepsilon^3 X_2^2 + \varepsilon^2 X_3^2 + \varepsilon X_4^2 + X_5^2 = 0.$$

Hier kann offenbar die Reihe $(X_1 X_2 X_3 X_4 X_5)$ sowohl cyklisch in sich selbst verschoben als auch in die inverse Reihe $(X_5 X_4 X_3 X_2 X_1)$ übergeführt werden.

Es leuchtet ein, dass die Gruppe der Vertauschungen der 5 Grössen X_i und diejenige der 5 Basispunkte in den entsprechenden Fällen isomorph sind. Dies erklärt sich durch die Thatsache, dass auf Grund der Symmetrie die bei der Projection der Fläche (2) auf die Ebene benutzte Gerade in jedem Raume $X_i = 0$ je eine der 5 Geraden schneidet, welche in die Basispunkte projicirt werden.

Bei jeder Gruppe M_5 existirt wenigstens eine invariante algebraische Curve vom Geschlechte $p = 5$; bei der G_{16} giebt es aber deren ∞^2 und bei der G_{32} ∞^1. In der That, fügen wir den Relationen (2) eine dritte

$$\Sigma c_i X_i^2 = 0 \tag{3}$$

hinzu, so liefert ersichtlich die Schnittcurve ein gegenüber der G_{16} invariantes Gebilde, und man kann durch Benutzung der Relationen (2) zwei Constante aus (3) hinwegschaffen, so dass nur zwei Verhältnisse der c_i unbestimmt bleiben. Nach einem Satze von Herrn Weber*) wird nun durch drei Relationen 2. Grades im vierdimensionalen Raume ein Gebilde vom Geschlechte $p = 5$ definirt, es sei denn, dass die bezügliche Schnittcurve Doppelpunkte besitze, was aber hier keineswegs im Allgemeinen zutrifft.

In den Fällen von G_{32}, G_{64}, G_{96} und G_{160} können wir zweckmässig der Relation (3) die folgende bezügliche Gestalt geben:

*) Math. Ann. Bd. 13, S. 35.

$$X_1^2 + X_3^2 + cX_5^2 = 0;$$
$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0;$$
$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0,$$
$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0.$$

Die Formen links sind nämlich bei den bezüglichen Gruppen invariant.

Bei den durch die Relationen (2) *und* (3) *definirten Gebilden existiren* 10 *Systeme von unendlich vielen Abel'schen Wurzelformen*, welche den leicht zu ermittelnden 10 Relationen zwischen nur 3 Veränderlichen entsprechen. Hiermit berichtigen wir einen Satz von Hrn. Kraus*), nach welchem bei nicht-hyperelliptischen Gebilden vom Geschlechte $p = 5$ höchstens drei solche Systeme vorkommen können.

§ 4.

Die Gruppen M_6.

Die noch zu behandelnden drei Classen, bei denen ein System von C_3 mit bez. 6, 7 oder 8 festen Punkten invariant bleibt, oder die Gruppen M_6, M_7 und M_8, wie wir dieselben nach Hrn. Kantor bezeichnen wollen, liefern nach diesem Verfasser den schwierigeren Theil des Problems der Aufzählung der Typen. Auch ist, wie wir weiterhin zeigen wollen, eine endgültige Erledigung der betreffenden Aufgabe keineswegs von Hrn. Kantor gegeben. Hierbei seien jedoch mit voller Anerkennung Hrn. Kantor's Verdienste um die *einzelnen* periodischen Transformationen erwähnt.

1. Bekanntlich bildet man eine Fläche 3. Ordnung F_3 in der Weise eindeutig auf eine Ebene ab, dass den ∞^3 Querschnitten der Fläche die $\infty^3 C_3$ durch 6 feste Fundamentalpunkte entsprechen. Bei einer Transformation M_6 werden also die Querschnitte der zugehörigen F_3 geschlossen permutirt, was ersichtlich durch eine Collineation bewirkt werden kann. Hierauf beruht die Methode des Hrn. Kantor: er sucht nämlich zuerst die Collineationsgruppen der Flächen F_3 zu bestimmen und erhält sodann durch Abbildung die zugehörige Gruppe M_6.

Wir erinnern hier an die folgenden Eigenschaften der soeben erwähnten Abbildung. Den sechs Fundamentalpunkten $a_1, a_2, \ldots, a_6$ entsprechen auf der F_3 sechs Gerade, von denen keine zwei sich schneiden; den sechs Kegelschnitten $a_1', a_2', \ldots, a_6'$ durch je 5 Fundamentalpunkte entspricht eine ähnliche Gruppe von 6 Geraden auf der Fläche, wobei jede a_i von allen a_j', ausgenommen a_i' geschnitten wird;

*) Math. Ann. Bd. 16. Man vergleiche hierzu meine Schrift, „Ueber die algebraischen Curven von den Geschlechtern $p = 4$, 5 und 6, welche eindeutige Transformationen in sich besitzen", Anh. d. Abh. der Königl. Schw. Akad. der Wissenschaften, Bd, 21, Abth. I, Nr. 3.

beide Gruppen bilden somit die Hälften einer Schäffli'schen *Doppelsechs*. Die 15 übrigen Geraden der Fläche sind die Bilder der 15 Verbindungsgeraden je zweier Fundamentalpunkte; dieselben bezeichnen wir in entsprechender Weise durch $(a_i a_k)$ oder $(a_i' a_k')$,

Dem System der Geraden entspricht auf der F_3 ein System gewundener C_3, deren jede keiner Geraden a_i begegnet, aber jeder Geraden a_i' zweimal und jeder $(a_i a_k)$ einmal. Zu jeder der 36 Schäffli'schen Doppelsechse gehören zwei solche Netze, je nachdem die zugehörigen Curven die eine oder andere Hälfte von je 6 Geraden nicht schneiden, und wir können leicht die Bilder dieser Netze in der Ebene angeben. So geht das System der C_3, welche keine Gerade a_i' schneiden, in ein Netz von C_5 mit δ in den 6 Fundamentalpunkten über. Von den anderen 35 Doppelsechsen ergeben sich 20 auf analoge Weise mit der folgenden:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, & (a_4 a_5), & (a_4 a_6), & (a_5 a_6); \\ (a_2 a_3), & (a_1 a_3), & (a_1 a_2), & a_6', & a_5', & a_4' \,. \end{array}$$

Die Bilder der zugehörigen C_3-Systeme liefern das Netz der Kegelschnitte durch a_4, a_5, und a_6 und das Netz der C_4, welche δ in a_1, a_2 und a_3 besitzen und einfach durch a_4, a_5 und a_6 laufen. Die übrigen 15 Doppelsechse sind von folgendem Typus:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_1', & (a_2 a_3), & (a_2 a_4), & (a_2 a_5), & (a_2 a_6); \\ a_2, & a_2', & (a_1 a_3), & (a_1 a_4), & (a_1 a_5), & (a_1 a_6). \end{array}$$

Die zugehörigen C_3-Systeme auf der F_3 gehen bei der Abbildung in zwei Netze von C_3 über, welche in a_2 bez. a_1 Doppelpunkte besitzen und durch a_3, a_4, a_5 und a_6 einfach hindurchgehen.

Jede Collineation der F_3 in sich bewirkt nun eine Vertauschung der Systeme von je 6 einander nicht schneidenden Geraden; dem entsprechend werden auch die 72 zugehörigen C_3-Systeme permutirt. Die Ordnung der entsprechenden Transformation M_6 hängt nun im Allgemeinen davon ab, welches System man bei der Abbildung in die 6 Fundamentalpunkte übergeführt hat, und man kann oft durch geeignete Wahl desselben diese Transformation bedeutend vereinfachen; jedenfalls ersieht man leicht nach dem Obigen, dass die Ordnung höchstens 5 sein kann, wobei dann die beiden Hälften der zu Grunde gelegten Doppelsechsgeraden vertauscht werden. Da aber Hr. Kantor auf die typische Darstellung der verschiedenen Transformationen ausgedehnte Aufmerksamkeit gerichtet hat, wollen wir diesen Gedankengang nicht weiter verfolgen. Wir erinnern nur noch an die bekannte Gruppe G_{51840} der Gleichung 27. Grades, von der die 27 Geraden einer F_3 abhängen; jede Gruppe M_6 muss ja mit einer Untergruppe dieser Gruppe holoedrisch isomorph sein.

Hr. Kantor hat auch bewiesen*), dass die Transformationsgruppen der Ebene, welche man aus den Collineationsgruppen einer F_3 mit Doppelpunkten herleitet, stets auf eine der 6 schon behandelten Classen reducibel sind.

2. Die wesentlich verschiedenen Typen der Collineationen, welche eine F_3 ohne Doppelpunkte in sich überführen können, hat Hr. Kantor auch aufgestellt**). Dabei wählt er bei der fraglichen Collineation invariante Ebenen als Coordinatenebenen und schreibt die Collineation

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2 : \lambda_3 x_3 : \lambda_1 x_4$$

ganz einfach $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Doch ist die Collineation von der Periode 5 oder der folgende Fall 8 von Hrn. Kantor unbeachtet gelassen. Wir geben hier die Functionen, welche, gleich Null gesetzt, die bei den bezüglichen Collineationen anallagmatischen F_3 darstellen, jedoch ohne die Coefficienten aufzuschreiben:

1.	$f_3(x_1, x_2, x_3) + x_4^2 f_1(x_1, x_2, x_3)$,	$1, 1, 1, -1$.
2.	$f_3(x_1, x_2) + x_1 f_2(x_3, x_4) + x_2 \varphi_2(x_3, x_4)$,	$1, 1, -1, -1$.
3.	$f_3(x_1, x_2, x_3) + x_4^3$,	$1, 1, 1, j$. $(j^3 = 1)$
4.	$f_3(x_1, x_2) + \varphi_3(x_3, x_4)$,	$1, 1, j, j$.
5.	$f_3(x_1, x_2) + x_3 x_4 f_1(x_1, x_2) + x_3^3 + x_4^3$,	$1, 1, j, j^2$.
6.	$f_3(x_1, x_2) + x_3^2 f_1(x_1, x_2) + x_4^2 x_3$,	$1, 1, -1, i$.
7.	$x_1^3 + x_2^2 x_1 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2$,	$1, -1, i, -i$.
8.	$x_1^2 x_3 + x_3^2 x_4 + x_4^2 x_2 + x_2^2 x_1$,	$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$. $(\varepsilon^5 = 1)$
9.	$f_3(x_1, x_2) + x_3^2 f_1(x_1, x_2) + x_4^3$,	$1, 1, -1, j$.
10.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3 x_4 + x_3^3 + x_4^3$,	$1, -1, j, j^2$.
11.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + f_3(x_3, x_4)$,	$1, -1, j, j$.
12.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_3^3 + x_3 x_4^2$,	$1, -1, j, -j$.
13.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_4^2$,	$1, -1, i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
14.	$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_4^3$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_1^7, \varepsilon_1^4, 1$. $(\varepsilon_1^9 = 1)$
15.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_3^2 x_2 + x_4^3$,	$1, -1, i, j$.

Hr. Kantor hat die Eigenschaften der aus diesen Collineationen bei der Abbildung hervorgehenden Transformationen der Ebene näher besprochen. Bei einigen Collineationen existiren feste Gerade, bei anderen Systeme windschiefer Geraden, welche sich geschlossen permutiren. Eine solche feste Gerade bez. Gruppe von windschiefen Geraden kann man dann in das in die Fundamentalpunkte abzubildende Sextupel nehmen. Die Transformation ist, wie Hr. Kantor sich ausdrückt,

---

*) „Theorie der endlichen Gruppen", S. 68.

**) Acta Mathematica Bd. 19, S. 148 oder die oben citirte Arbeit, S. 94.

äquivalent einem Typus mit weniger als 6 Punkten in der Charakteristik*) und lässt sich dem zufolge auf eine der früheren Classen reduciren. Nur die Fälle 3, 9, 10, 14, 15 liefern also neue Typen. Hr. Kantor identificirt dieselben der Reihe nach mit den Typen Δ_3, B_6, Γ_6, B_9, B_{12}**), welche er in seiner Preisschrift auf andere Weise abgeleitet und ausführlich untersucht hat. Die charakterisirende Eigenschaft der Transformation Δ_3, welche Untergruppe von B_6, B_9 und B_{12} ist, ergiebt sich hier sehr leicht; bei der Collineation 3 bleiben ja auf der F_3 alle Punkte einer Curve vom Geschlechte $p = 1$ fest, welche durch die Ebene $x_4 = 0$ ausgeschnitten wird.

3. Wir wollen jetzt die vollständigen Gruppen M_6 bestimmen. Hier erledigen sich nach Hrn. Kantor***) die Fälle 3, 4, 9, 11, 12, 14, 15 der vorigen Nummer besonders leicht, weil in denselben die Gleichung der F_3 in der Form:

$$(1) \qquad x_4^3 + f_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

geschrieben werden kann. Als die Hesse'sche Fläche der Fläche (1) erhält man

$$x_4 \, , h_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wobei h_3 die Hesse'sche Form von f_3 bedeutet. Die Ebene $x_4 = 0$ kann also mit keiner anderen Ebene bei der Collineationsgruppe der F_3 vertauscht werden, es sei denn, dass $h_3 = 0$ zerfällt, d. h. $f_3 = 0$ eine äquianharmonische Curve bedeutet. In letzterem Falle, welcher immer bei den Formen 4, 11, 12, 14 eintritt, lässt sich die Gleichung (1) auf die Gestalt:

$$(2) \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

bringen. Die Collineationsgruppe dieser Fläche ist von der Ordnung **648.** Dieselbe erhält man durch Combination der Gruppe der 24 Vertauschungen der x_i mit einer G_{27}, welche durch Substitutionen von der Form $x_i' = jx_i$, $j^2 x_i$ erzeugt wird. Ist $f_3 = 0$ nicht äquianharmonisch, so erhält man die Gruppe durch Combination der perspectivischen G_3, bei welcher jeder Punkt der Ebene $x_4 = 0$ fest bleibt, mit der Collineationsgruppe der Curve $f_3 = 0$. Dieselbe ist also im Allgemeinen von der Ordnung **54**, jedoch von der Ordnung **108**, falls $f_3 = 0$ eine harmonische C_3 definirt, wie z. B. im Falle 15. Drückt man die Collineationsgruppe einer allgemeinen bez. harmonischen ebenen C_3 durch eine homogene Substitutionsgruppe mit der Deter-

---

*) Als Charakteristik einer Transformation bezeichnet Hr. Kantor den Inbegriff der Verkettungen der bei ihr auftretenden Fundamentalpunkte.

**) Die Reihe der Griechischen Buchstaben B, Γ, Δ bezeichnet bei Hrn. Kantor die Ordnung der erzeugenden Transformation. Somit lässt sich B_6 aus einer quadratischen, Γ_6 aus einer cubischen und Δ_3 aus einer biquadratischen Transformation herleiten.

***) „Theorie der endlichen Gruppen", S. 65.

minante 1 aus, so erhält man eine G_{54} bez. G_{108}, welche ersichtlich auf die obige G_{54} bez. G_{108} holoedrisch isomorph bezogen werden kann.

Im allgemeinen Falle können wir bekanntlich die Gleichung einer F_3 auf eine einzige Weise in der Form

$$(3) \qquad a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 + a_5 x_5^3 = 0$$

darstellen, wobei die identische Relation, welche die 5 Ebenen $x_i = 0$ mit einander verbindet, in der Gestalt

$$(4) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

geschrieben werden kann. Kann man die F_3 in dieser Weise auf ein eigentliches *Pentaeder* beziehen, so lässt sich ihre Collineationsgruppe sehr leicht bestimmen. Es bildet ja in der That das Pentaeder ein gegenüber der F_3 invariantes Gebilde, und die zu ermittelnde Collineationsgruppe muss durch irgend eine Gruppe von Vertauschungen der 5 Pentaederebenen erzeugt werden. Damit die Gleichungen (3) und (4) bei einer solchen Gruppe invariant bleiben, müssen entweder einige a_i einander gleich sein, oder auch muss die Gleichung (3) die Form:

$$x_1^3 + \varepsilon x_2^3 + \varepsilon^2 x_3^3 + \varepsilon^3 x_4^3 + \varepsilon^4 x_5^3 = 0, \qquad (\varepsilon^5 = 1)$$

besitzen. Letzteren Fall brauchen wir aber nicht zu berücksichtigen, weil die Fläche dort Doppelpunkte enthält; die Discriminante der durch die Gleichungen (3) und (4) definirten Fläche ist nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}} + \frac{1}{\sqrt{a_5}}$$

und verschwindet folglich in dem fraglichen Falle.

Es seien nun $2 a_i$ einander gleich, etwa $a_4 = a_5$. Die Collineation, welche die F_3 hier zulässt:

$$x_1' = x_1, \; x_2' = x_2, \; x_3' = x_3, \; x_4' = x_5, \; x_5' = x_4,$$

ist eine perspectivische; die Perspectivitätsebene ist $x_4 - x_5 = 0$, und das Centrum $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Man ersieht sogleich, dass dieser Fall mit der Form 1 der 2. Nummer übereinstimmt. Durch das Perspectivitätscentrum gehen drei gerade Linien der F_3, welche bei der Collineation invariant bleiben. Der Ebenenbüschel durch eine von diesen Geraden schneidet ein System von Kegelschnitten aus, welches man bei der Abbildung in einen Geradenbüschel überführen kann; die Transformation ist also vom orthanallagmatischen Typus. Jede der übrigen 24 Geraden der F_3 stösst in der Perspectivitätsebene mit der ihr entsprechenden zusammen.

Wir nehmen nun an, es seien $a_2 = a_3$ und $a_4 = a_5$. Die Collineationsgruppe ist in diesem Falle eine *Vierergruppe*. Dieselbe besteht aus zwei perspectivischen G_2 und einer G_2 „mit Axen“:

$$x_1' = x_1, \; x_2' = x_3, \; x_3' = x_2, \; x_4' = x_5, \; x_5' = x_4.$$

Die Verbindungsgerade der beiden Perspectivitätscentra liegt auf der

F_3 und bleibt ersichtlich bei der ganzen G_4 invariant. Folglich liefert auch dieser Fall eine orthanallagmatische Gruppe in der Ebene. Man erweist leicht die Identität dieses Falles mit dem Falle 2 der 2. Nummer.

Es seien $a_3 = a_4 = a_5$. Die Collineationsgruppe ist eine *diedrische* G_6, welche aus den Permutationen von x_3, x_4 und x_6 resultirt. Die Untergruppen sind drei perspectivische G_2 und eine G_3 vom Typus 5 der 2. Nummer. Hr. Kantor behauptet, dass diese G_6 immer als Untergruppe einer höheren Gruppe enthalten sei*), was ersichtlich nicht richtig sein kann, da ja im Allgemeinen die Fläche bei keiner anderen Permutation der Pentaederebenen in sich übergehen kann. Keine Gerade bleibt bei dieser G_6 invariant, da die Verbindungsgerade der Perspectivitätscentra nicht auf der F_3 liegt, auch kein System von windschiefen Geraden, da die bei jeder Untergruppe G_2 einander entsprechenden Geraden zusammentreffen. Die M_6 lässt sich also auf keinen früheren Typus zurückführen.

Es mögen jetzt die Bedingungen $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4 = a_5$ gelten. Die Gruppe ist eine *diedrische* G_{12}. Die ausgezeichnete cyklische Untergruppe erzeugt man durch die Collineation:

$$x_1' = x_2, \; x_2' = x_1, \; x_3' = x_4, \; x_4' = x_5, \; x_5' = x_3.$$

Dieselbe ist von dem Typus Γ_6 oder der Form 10 der 2. Nummer.

Wir behandeln jetzt den Fall, dass $a_2 = a_3 = a_4 = a_5$. Die Gruppe ist hier eine *Oktaedergruppe*, welche durch die Vertauschungen von x_2, x_3, x_4 und x_5 entsteht. Die drei cyklischen Untergruppen G_4 sind vom Typus 7 der 2. Nummer. Hr. Kantor betrachtet die diedrischen Untergruppen G_8 als besondere Typen M_8**) aber mit Unrecht; dieselben treten ja einerseits immer als Untergruppen der Oktaedergruppe auf, anderseits existirt bei ihnen eine feste Gerade auf der F_3, was für die ausgezeichnete cyklische Untergruppe G_4 unmittelbar hervorleuchtet, so dass man diese G_8 auf den orthanallagmatischen Typus zurückführen kann.

Endlich seien $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$. Die so definirte F_3 ist unter dem Namen der *Diagonalfläche* bekannt. Hier führen alle 120 Vertauschungen der Pentaederebenen die Fläche in sich über. Die cyklischen Untergruppen G_5 sind vom Typus 8 der vorigen Nummer.

Unter den in der 2. Nummer aufgezählten cyklischen Gruppen treten somit nur 1, 2, 5, 7, 8, 10 in denjenigen Fällen auf, wo das fundamentale Pentaeder der Fläche eigentlich ist. Wir haben auch gefunden, dass die cyklischen Gruppen 2, 5, 7, 10 und 8 immer als

---

*) Man sehe seine „Theorie der endlichen Gruppen", S. 55, Theorem VII und S. 70, Theorem LIV.

**) Man sehe die citirte Arbeit S. 68, Theorem XLIX und S. 70, Theorem LV.

Untergruppen innerhalb höherer Gruppen auftreten, nämlich bez. einer Vierergruppe, diedrischen G_6, Oktaedergruppe, diedrischen G_{12}, G_{120}.

Nehmen wir die in der 2. Nummer mit 6 und 13 bezeichneten cyklischen G_4 und G_8 hinzu, so haben wir nun sämmtliche Collineationsgruppen, welche eine F_3 ohne Doppelpunkte in sich überführen können, bestimmt. Die Vollständigkeit dieser Aufzählung wollen wir in der nächsten Nummer bestätigen.

4. Die einzigen Fälle, in denen man noch die Möglichkeit anderer Collineationsgruppen annehmen könnte, sind diejenigen mit einem uneigentlichen fundamentalen Pentaeder. Jedenfalls kommen aber die verschiedenen cyklischen Gruppen nicht anders als innerhalb derjenigen Gruppen vor, welche in der vorigen Nummer angegeben sind. Daraus folgt, dass bei keiner Gruppe eine perspectivische G_2 fehlt, und dass mehrere solche G_2 auftreten müssen, falls andere cyklische Gruppen als G_8 oder ihre Untergruppen G_4 und G_2 vorkommen.

Wir nehmen zuerst an, die soeben erwähnten G_4 und G_8 treten nicht auf. Man kann von einem bestimmten Perspectivitätscentrum O einer G_2 ausgehen. Sollen andere Perspectivitätscentra vorkommen, so müssen dieselben entweder zu je zweien in gerader Linie durch O liegen oder auch in der Perspectivitätsebene belegen sein. Nun stossen in jedem Centrum drei Gerade zusammen, welche bei der G_2 unvertauscht bleiben; die Paare der sich vertauschenden Geraden treffen aber einander in der Perspectivitätsebene. Die einzigen Punkte dieser Ebene, in denen drei Gerade zusammenstossen können, sind somit die Schnittpunkte mit den 3 durch O gehenden Geraden. Von diesen drei Punkten können keiner, einer oder auch alle drei neue Perspectivitätscentren sein; nicht aber zwei, weil der dritte Punkt schon durch diese 2 perspectivische G_2 mit den beiden anderen vertauscht wird und somit dieselbe geometrische Bedeutung besitzen muss. Wir wollen diese drei Fälle in Reihe behandeln.

a) *Kein neues Perspectivitätscentrum in der zum Centrum O gehörigen Perspectivitätsebene.* Giebt es hier auch kein anderes Centrum, so haben wir die einzelne *perspectivische* G_2. Liegen aber zwei Centren in gerader Linie von O aus, so erhalten wir die *diedrische* G_6. Sollen mehrere solche Paare vorkommen, so müssen auch von jedem dieser Centra die übrigen zu je zwei in gerader Linie liegen. Man ermittelt leicht die Bedingung, dass 9 Perspectivitätscentra die Wendepunktsconfiguration einer ebenen C_3 bilden sollen. Hier erhält man die G_{54}.

b) *In der Perspectivitätsebene liegt ein einziges Perspectivitätscentrum.* Wenn keine anderen Centra vorkommen, haben wir die *Vierergruppe.* Liegt aber ein einziges Paar in gerader Linie durch O, so erlangen wir die *diedrische* G_{12}; das Centrum in der erwähnten Ebene bleibt hier überhaupt unvertauscht. Wenn mehrere solche Paare vorkommen, so muss, da drei in gerader Linie liegende Centra nothwendig bei der Gruppe mit einander vertauscht werden, auch jedes dieser Centra durch eine auf der Fläche liegende Gerade mit einem anderen verbunden sein, die übrigen Perspectivitätscentra aber müssen von demselben aus zu je zwei in gerader Linie liegen. Diesen Bedingungen genügen wir nur in der Weise, dass insgesammt 6 Centra vorkommen, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, wobei die drei Diagonalen der F_3 angehören. Wir gelangen also hier zur *Oktaedergruppe.*

c) *Drei Perspectivitätscentra in der Perspectivitätsebene von O.* Giebt es keine anderen Centra, so erhalten wir hier abermals die *diedrische* G_{12}. Sollen wir aber zu neuen Gruppen gelangen, so müssen ersichtlich in der Perspectivitätsebene *jedes* Centrums drei Centra belegen sein; wir können ja irgend welches Centrum als O wählen. Hier giebt es nun zwei Möglichkeiten: entweder enthalten die Perspectivitätsebenen der drei in derselben Perspectivitätsebene liegenden Centren *dieselben* drei Centra oder nicht. Man erschliesst ohne Mühe, dass in ersterem Falle die Geraden durch je drei Centra die 6 Kanten eines Tetraeders bilden; in letzterem Falle aber die 10 Kanten eines Pentaeders. Dieser Fall giebt die G_{120}, jener die G_{648}.

Wir betrachten nun die *cyklische* G_4, deren Untergruppe G_2 perspectivisch ist. Die vom Centrum O dieser G_2 ausgehenden Geraden der F_3 können aus der zugehörigen Perspectivitätsebene keine neue Perspectivitätscentren ausschneiden. Durch die fraglichen Schnittpunkte können nämlich keine anderen Geraden der Fläche gehen, weil solche bei der G_4 zu je vier vertauscht werden. Sollen also andere Centra existiren, in welche O bei der Gruppe übergeführt werden kann, so müssen dieselben zu je 2 in Geraden durch O liegen. Wir finden, wie vorhin, die Möglichkeit, dass 9 solche Centra die Configuration der Wendepunkte einer ebenen C_3 bilden. Die zugehörige Gruppe ist die G_{108}.

In gleicher Weise beweisen wir, dass die *cyklische* G_8 in keiner höheren Collineationsgruppe der F_3 enthalten sein kann.

5. Aus den vorigen Entwicklungen erhalten wir das Resultat, dass die typischen Gruppen M_6 die folgenden 7 sind:

1) *Diedrische* G_6;
2) *Diedrische* G_{12};
3) *Oktaedergruppe* G_{24};
4) *Die* G_{120}, *welche durch die Vertauschungen der* 5 *Pentaederebenen entsteht*;
5) G_{54};
6) G_{108};
7) G_{648}.

Wie schon in der 3. Nummer angedeutet wurde, weicht Hrn. Kantor's

Aufzählung*) von der obigen in zwei Hinsichten ab, indem er nämlich für den Fall 1 die Ordnung 12 statt 6 giebt und eine reductible Gruppe von der Ordnung 8 hinzunimmt, welche ohnehin immer als Untergruppe der Oktaedergruppe auftritt.

Bei den ersten 4 Typen kann die Abbildung in der Weise bewirkt werden, dass eine ausgezeichnete Hälfte der ebenen Transformationsgruppe aus Collineationen besteht. Das fundamentale Sextupel bildet dann, wie schon von Hrn. Kantor bemerkt, in den Fällen 1 und 2 zwei dreifach bez. vierfach perspective Dreiecke, in den Fällen 3 und 4 ein sechsfach bez. zehnfach Brianchon'sches Sechseck. Hr. Kantor hat auch die charakteristischen Eigenschaften des fundamentalen Sextupels bei den drei übrigen Typen angegeben. So kann man z. B. im Falle der G_{648} als Fundamentalpunkte die Ecken zweier Wendepunktsdreiecke einer C_3 also zweier sechsfach perspectiven Dreiecke erhalten.

Die diedrische G_6 tritt als Untergruppe bei den übrigen 6 Gruppen auf. Desgleichen sind diedrische G_{12} und Oktaedergruppen Untergruppen der G_{108} und G_{648}. Bei den weiteren innerhalb der verschiedenen Gruppen auftretenden Untergruppen wollen wir uns nicht aufhalten.

§ 5.

Die Gruppen M_7.

1. Bei der im vorigen Paragraphen besprochenen eindeutigen Abbildung einer Fläche F_3 auf eine Ebene wurde das System der Querschnitte in das System der durch die 6 Fundamentalpunkte hindurchgehenden C_3 übergeführt. Hier betrachten wir das Netz der C_3, welche durch noch einen 7. Basispunkt bestimmt sind. Diesem Netze entspricht auf der F_3 das System der Querschnitte durch den Bildpunkt. Den Gruppen von birationalen Transformationen, welche ein System von C_3 durch 7 Punkte invariant lassen, entsprechen also Gruppen von birationalen Transformationen auf den Flächen F_3, bei denen das Netz der Querschnitte durch einen bestimmten Punkt der bezüglichen F_3 invariant bleibt.

Die Berührungscurve des Tangentenkegels der F_3 von diesem Punkte P liefert ersichtlich eine bei der Gruppe invariante Curve. Dieser Curve entspricht in der Ebene die Jakobi'sche Curve des Netzes der C_3. Projicirt man die F_3 vom Punkte P auf eine Ebene E, so ist diese Ebene zweideutig auf die F_3, also auch auf die Ebene E' des Netzes der C_3 bezogen. Dabei ist die Projection jener Berührungscurve eine Uebergangscurve, deren Punkten zusammenfallende Punkte entsprechen.

*) „Theorie der endlichen Gruppen", S. 79.

Die Berührungscurve ist die Schnittcurve der F_3 mit der ersten Polare von P; dieselbe ist somit von der 6. Ordnung und besitzt einen Doppelpunkt in P. Ihre projicirte Curve auf die Ebene E ist folglich eine C_4. Die 28 Doppeltangenten dieser C_4 sind die Spuren der 27 Geraden der F_3 und der Berührungsebene in P. Die Jakobi'sche Curve des C_3-Netzes in der Ebene E' ist eine C_6 mit Doppelpunkten in den 7 Fundamentalpunkten; dieses Resultat erhält man entweder direct oder auch durch die Abbildung der Uebergangscurve.

Den 28 Doppeltangenten entsprechend, kann eine ebene C_4 auf 28 verschiedene Weisen aus dem Tangentenkegel von einem Punkte einer F_3 erzeugt werden. In der That, sei

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichung einer Doppeltangente, dann kann die Gleichung der C_4 in der Form

$$4 f_1 f_3 - f_2^2 = 0$$

geschrieben werden, und man erhält sogleich als Gleichung der fraglichen F_3:

$$x_4^2 f_1 + x_4 f_2 + f_3 = 0 \text{*)}.$$

Letztere Gleichung kann nur in der Weise geändert werden, dass $a x_4 + b x_3 + c x_2 + d x_1$ statt x_4 gesetzt wird, also ist dieselbe in projectiver Hinsicht eine bestimmte. Man hat bekanntlich auch ∞^6 projectivisch verschiedene C_4 und nur ∞^4 F_3, aber von den ∞^2 Punkten einer F_3 erzeugt man in der obigen Weise ∞^2 C_4. Man darf also schon aus diesem Grunde erwarten, dass jeder C_4 nur eine endliche Zahl von F_3 zugeordnet ist.

Den geraden Linien der Doppelebene E oder den durch P gehenden Querschnitten der F_3 entsprechen, wie bemerkt, in der Ebene E' die C_3 durch die 7 Fundamentalpunkte. Dabei entsprechen aber den Geraden, welche die C_4 berühren, C_3 mit δ, und insbesondere den 28 Doppeltangenten zerfallende C_3. Von den Doppeltangenten sind ja 27 sowohl die Bilder der 27 Geraden der F_3 als auch der Kegelschnitte, welche in den durch diese Geraden und P bestimmten Ebenen liegen, und die 28. das Bild des Punktes P und der in dessen Tangentenebene liegenden Curve. Man hat also in der Ebene E' 28 Paare zusammengehöriger Fundamentalcurven, welche man unmittelbar aus der Abbildung der F_3 aufzählen kann. Dieselben sind: die 7 *Fundamentalpunkte* a_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ und *die* $7\, C_3$ a_i', welche je im zugehörigen Punkt a_i einen Doppelpunkt besitzen und durch die 6 übrigen gehen; *die* 21 *Geraden* $(a_i a_k)$, welche je 2 Fundamentalpunkte a_i und a_k verbinden, und die 21 zugehörigen *Kegelschnitte* $(a_i a_k)'$, welche jedesmal durch die 5 übrigen Fundamentalpunkte hindurchlaufen.

---

*) Vgl. Kantor, Acta Mathematica XIX, S. 182.

Das System der 7 Doppeltangenten, welches in die a_i und a_i' abgebildet worden ist, nennt man ein *Aronhold'sches Septupel*. Es giebt 288 solche Septupel; jede Doppeltangente gehört nämlich zu 72, da man ja die 6 übrigen auf eben so viele Weisen wählen kann, wie es auf der F_3 Gruppen von je 6 sich nicht schneidenden Geraden giebt.

Wir betrachten jetzt diejenige involutorische Transformation Θ_2 der Ebene E', welche aus der Vertauschung der beiden Blätter der Doppelebene E herrührt. Dabei bleibt ersichtlich jeder Punkt der Jakobi'schen C_6 invariant, und jede C_3 des fundamentalen Netzes erleidet eine involutorische Transformation in sich, bei welcher ihre 4 ausserhalb der Fundamentalpunkte belegenen Schnittpunkte mit jener C_6 fest bleiben. Jede zwei Fundamentalcurven, welche die Bilder derselben Doppeltangente sind, werden mit einander vertauscht. Folglich gehen die Punhte a_i und die C_3 a_i' in einander über; dieselben liefern somit die Hauptpunkte und Hauptcurven der fraglichen Cremona-Transformation, welche von der 8. Ordnung sein muss.

Man kann natürlich bei der Abbildung der Doppelebene E auf die einfache Ebene E' ein beliebiges der 288 Aronhold'schen Septupel als den 7 Fundamentalpunkten a_i entsprechend herauswählen; doch ändert sich freilich die gegenseitige Lage dieser Punkte nach dem zu Grunde gelegten Septupel. Dem Uebergange von einem Hauptseptupel zu einem anderen entsprechen in E' zwei birationale Transformationen, welche vermittelst der Transformation Θ_2 aus einander hervorgehen; die Summe der Ordnungen dieser beiden Transformationen ist immer 9*).

2. Bei den Transformationsgruppen M_7, welche ein durch 7 Punkte bestimmtes Netz von C_3 in sich überführen, bleibt ersichtlich die Jakobi'sche C_6 invariant. Wir brauchen also nur diejenigen Gruppen aufzusuchen, welche diese Curve gestatten kann. Dieses Problem erledigen wir durch die Aufsuchung der möglichen Collineationsgruppen der Uebergangscurve C_4 in der Doppelebene. In letzterem Falle handelt es nur von Collineationen, weil hier das System der adjungirten φ-Curven aus den Geraden besteht; die C_4 kann nämlich keine Doppelpunkte besitzen, ohne dass die Gruppe auf eine der früher behandelten Typen zurückgeführt werden könnte.

Die C_4 vom Geschlechte $p = 3$, welche durch cyklische Collineationen in sich übergehen, sind in der folgenden Uebersicht enthalten**):

1. $x_3^4 + x_3^2 f_2(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2)$, $\quad$ 1, 1, −1,

*) Die hier besprochene rational eindeutige Abbildung einer Doppelebene auf eine einfache Ebene mit einer Uebergangscurve, welche durch Cremona-Transformationen auf eine C_4 des Geschlechtes $p = 3$ gebracht werden kann, ist zuerst von Clebsch (Math. Annalen Bd. III), später von de Paolis und anderen behandelt worden.

**) Dieselbe wurde von Hrn. Kantor gegeben, Acta Math. XIX, S. 157.

2.	$x_3^3 f_1(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2)$	$1, 1, j.$
3.	$x_3^2 x_2^2 + x_3 x_2 x_1^2 + x_3^3 x_1 + x_2^3 x_1 + x_1^4,$	$1, j, j^2.$
4.	$x_3^4 + f_4(x_1, x_2),$	$1, 1, i.$
5.	$x_3^4 + x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$	$1, -1, i.$
6.	$x_3^3 x_1 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$	$1, -1, j.$
7.	$x_3^3 x_2 + x_2^3 x_1 + x_1^3 x_3,$	$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4. \quad (\varepsilon^7 = 1)$
8.	$x_3^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3,$	$1, -1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$
9.	$x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^4.$	$1, \varepsilon_1^3, \varepsilon_1. \quad (\varepsilon_1^9 = 1)$
10.	$x_3^4 + x_1^4 + x_1 x_2^3,$	$1, j, i.$

Jede solche Collineation liefert durch Vermittlung von Θ_2 zwei Transformationen in der Ebene E'. Hr. Kantor hat diejenigen Typen seiner Preisschrift bestimmt, mit denen diese Transformationen identisch sind. So erhält man aus den Collineationen 2, 6, 9, 10 die schon bei den Gruppen M_6 auftretenden Typen Δ_3, B_6, B_9, B_{12} wieder. Dieselben Transformationen liefern durch Combination mit Θ_2 die neuen Typen Γ_6'', Δ_6. B_{18}, B_{12}'*). Die Collineationen 3 und 7 geben Γ_6' und B_{14}. Die eine aus 4 herrührende Transformation ist E_4; dieselbe ist durch die Invarianz aller Punkte des Bildes von $x_3 = 0$, also einer elliptischen Curve, charakterisirt. Die übrigen Transformationen lassen sich auf Collineationen oder den orthanallagmatischen Typus reduciren. Die Gruppen von Γ_6', Γ_6'', B_{14} und B_{18} enthalten Θ_2 als Untergruppe.

3. Hr. Kantor hat in seiner späteren Arbeit**) versucht, diese Transformationen zu endlichen Gruppen zu combiniren. Indessen stimmen seine Resultate bezüglich der vollständigen Collineationsgruppen der ebenen C_4 nicht mit denjenigen überein, welche ich schon in einer früher erschienenen Arbeit gegeben habe***). Dabei zogen wir aus einer von Hrn. Hurwitz aufgestellten Gleichung†) direct den Schluss, dass zu den eindeutigen Transformationen eines Gebildes vom Geschlechte $p = 3$ in sich nur die Primzahlperioden 2, 3 und 7 gehören können. Wir wollen hier eine neue Ableitung der fraglichen Gruppen geben.

---

*) Bei den fraglichen 4 Collineationen existirt eine feste Undulationstangente; diese oder jene Typen erhalten wir, je nachdem die über einander liegenden Blätter dieser Undulationstangente vertauscht werden oder nicht.

**) „Th. d. endl. Gruppen". S. 82.

***) *„Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen."* Anh. d. Abh. d. Königl. Schw. Akad. d. Wissensch., Bd. 21, Abth. I, Nr. 1 (1895).

†) Math. Ann. Bd. XXXII.

Aus der in der vorigen Nummer gegebenen Uebersicht ersieht man, dass eine allgemeine nicht hyperelliptische Curve

(2) $$f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

vom Geschlechte $p = 3$ durch keine von der *Identität* verschiedene Collineation in sich übergeht.

Die symmetrische Curve

(2) $$x_3^4 + x_3^2 f_2(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2) = 0$$

geht durch eine *harmonische Perspectivität* in sich über, welche mit der Identität eine G_2 bildet. Durch das Perspectivitätscentrum $x_1 = x_2 = 0$ gehen 4 Doppeltangenten: $4f_4 - f_2^2 = 0$. Die bei der Transformation festen Punkte $x_3 = f_4 = 0$ sind *sextactische Punkte*, in denen also ein Kegelschnitt 6 auf einander folgende Schnittpunkte mit der C_4 hat. Solcher sextactischen Punkte giebt es nach Cayley auf einer ebenen C_n $n(12n-27)$, also auf einer C_4 84. Kein Punkt der C_4 kann auf zwei (oder mehr) Perspectivitätsaxen liegen; auf der Tangente würde ja durch Combination der bezüglichen Perspectivitäten eine nicht endliche binäre Gruppe erzeugt werden. Die höchste Zahl der möglichen Perspectivitäten ist also 84 : 4 oder 21. Diese Zahl wird auch erreicht, nämlich bei der G_{168}.

Ist $f_2 = 0$ ein Paar in einer der drei durch die gegenseitige Zuordnung der Elemente von f_4 bestimmten Involutionen, so können wir die Gleichung auf die Gestalt

(3) $$x_3^4 + x_3^2(ax_1^2 + bx_2^2) + x_1^4 + cx_1^2x_2^2 + x_2^4 = 0$$

bringen. Hier treten drei Perspectivitäten auf, und die Gruppe ist eine *Vierergruppe*.

Wenn die Elemente von f_2 ein zusammengehöriges Paar in zwei der drei erwähnten Involutionen bilden, wobei f_2 einen der drei fundamentalen quadratischen Factoren der Jakobi'schen Covariante J_6 von f_4 abgiebt, so ist die Gruppe eine *diedrische* G_8. Die Gleichung (3) nimmt hier die Form

(4) $$x_3^4 + ax_3^2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^4 + bx_1^2x_2^2 + x_2^4 = 0,$$

und man erhält hieraus die Form 5 der vorigen Nummer, falls man die in $x_3 = 0$ liegenden Coordinatenecken in die Punkte $x_1^2 + x_2^2 = 0$ verlegt.

Hier bietet sich von selbst der Specialfall, dass $a = b$, also:

(5) $$x_3^4 + x_2^4 + x_1^4 + a(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) = 0.$$

Die Gruppe ist hier eine G_{24}, welche durch Combination der Zeichenwechsel und der Vertauschungen der x_i erzeugt wird. Dieselbe entsteht auch durch die Permutationen der 4 Geraden $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$, welche Doppeltangenten der C_4 sind, und ist sonach mit der *Oktaedergruppe* holoedrisch isomorph.

Hr. Kantor hat die Gruppen der Curven (4) und (5) unrichtig bestimmt*). Er behauptet nämlich, dass jene Curve 7 involutorische Perspectivitäten und diese deren 15 gestatte. Diese Anzahl Perspectivitäten tritt dagegen bei den Curven auf, welche eine Collineationsgruppe G_{16} bez. G_{96} besitzen, aber auch hier gehören dieselben keiner Untergruppe G_8 bez. G_{24} an.

Die einzigen Gruppen, bei denen keine anderen cyklischen Gruppen als G_2 und nicht perspectivische G_4 vorkommen, sind die zu den Curven (2), (3) und (4) gehörigen. Die Ordnung m muss nämlich Theiler von sowohl 24 als 56 sein, weil die 24 *Wendepunkte* und die 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten* sich in Gruppen zu je m vertauschen; dieser Schluss wird nicht dadurch beeinträchtigt, dass etwa bei einer G_2 *Undulationspunkte* fest bleiben können, weil ein solcher mit zwei Punkten jedweder Art äquivalent ist. Die Ordnung muss also entweder 2, 4 oder 8 sein. Nun haben wir soeben gefunden, dass die cyklische G_4 stets als Untergruppe einer diedrischen G_8 vorkommt. Aus lauter G_2 lässt sich aber in der Ebene nur die Vierergruppe zusammensetzen; denn die Aufeinanderfolge zweier harmonischen Perspectivitäten liefert nur dann eine eben solche Transformation, wenn jede Axe durch das zur anderen gehörige Centrum geht.

Einer C_4, welche bei einer nicht perspectivischen G_3 invariant bleibt, kann man die Gleichung

$$x_1^2x_2^2 + a x_3(x_1^3 + x_2^3) + b x_3^2 x_1 x_2 + x_3^4 = 0 \tag{6}$$

geben. Bei dieser G_3 bleiben die *Berührungspunkte der Doppeltangente* $x_3 = 0$ *fest*. Die G_3 ist stets Untergruppe einer *diedrischen* G_6 und in keinem Falle, wie Hr. Kantor zu glauben scheint, die vollständige Collineationsgruppe der C_4. Dies wird besonders einleuchtend, falls man x_1 und x_2 durch $x_1 + i x_2$ bez. $x_1 - i x_2$ ersetzt. Die Gleichung erhält dann die Gestalt

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 + 2 a x_3 x_1(x_1^2 - 3x_2^2) + b x_3^2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^4 = 0. \tag{6a}$$

Man ersieht leicht, dass die Curve drei perspectivische Transformationen in sich um die drei Axen $x_2 = 0$, $x_2 \pm x_1\sqrt{3} = 0$ besitzt, welche die Berührungspunkte der Doppeltangente $x_3 = 0$ vertauschen. Entsprechend den 28 Doppeltangenten, kann eine C_4 höchstens 28 solche diedrische G_6 besitzen, welche Zahl auch bei der G_{168} erreicht wird.

Geht die C_4 bei einer höheren Gruppe, in welcher die Diedergruppe G_6 eine Untergruppe bildet, in sich über, so muss die Doppeltangente $x_3 = 0$ mit wenigstens drei anderen vertauschbar sein, welche durch die cyklische G_3 sich permutiren. Wenn die Zahl der mit $x_3 = 0$ äquivalenten Doppeltangenten n ist, so ergiebt sich nach bekannten

*) a. a. O., S. 88, Theorem CI und Theorem CII: 12, 13.

Sätzen $6n$ als Ordnung der Gruppe. Ist $n=4$, so erhält man die schon behandelte Oktaedergruppe. Wenn $n>4$, müssen in der Gruppe Collineationen vorkommen, bei denen Wendepunkte fest bleiben, weil hier der Grad der Gruppe grösser als die Zahl dieser Punkte ist. Alle Gruppen, in denen Collineationen mit festen Wendepunkten auftreten, leiten wir im Folgenden ab.

Bei der *perspectivischen* G_3, welche die Curve

(7) $$x_3^3 f_1(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2) = 0$$

besitzt, sind die auf der Axe $x_3 = 0$ liegenden Punkte *Wendepunkte*, deren Tangenten durch das Centrum gehen, und dieses ist ein *Undulationspunkt*.

Man fragt sich, ob die so erhaltene Curve noch weitere Collineationen in sich gestatten kann. Das geschieht, wenn die binäre Form $f_4(x_1, x_2)$ eine von der Identität verschiedene Gruppe von Transformationen in sich besitzt, bei denen $f_1(x_1, x_2) = 0$ einen Fixpunkt abgiebt. Dafür ist erforderlich, dass letzterer Punkt entweder der Jakobi'schen oder, falls nämlich die quadratische Invariante von f_4 verschwindet, der Hesse'schen Covariante von f_4 angehört. In jenem Falle erhält man leicht die Gleichung

(8) $$x_3^3 x_1 + x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0$$

und als Transformationsgruppe die *cyklische* G_6. Der andere Fall aber gehört zur *cyklischen* G_9, wobei die Gleichung der C_4 die folgende ist:

(9) $$x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^4 = 0.$$

Sollen in der Gruppe andere perspectivische G_3 auftreten, so müssen die zugehörigen Centren und Axen durch die gegebene G_3 zu je drei in einander übergehen. Allein es können auch höchstens 4 solche G_3 vorkommen, denn die vier Undulationspunkte und 16 Wendepunkte, welche durch die Centren und Axen gegeben werden, liefern die Gesammtzahl von 24 Inflexionen. Die binäre Gruppe, welche auf der durch die 4 Undulationspunkte gehenden Geraden erzeugt wird, enthält $4G_3$ und ist die Tetraedergruppe. Nehmen wir $x_2 = 0$ als Gleichung dieser Geraden und $x_1 = x_3 = 0$ als Schnittpunkt der 4 Perspectivitätsaxen, so lässt sich die Gleichung der C_4 leicht auf die Gestalt

(10) $$x_3^3 x_1 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

bringen. Die Gruppe ist eine G_{48}, welche durch Combination der Tetraedergruppe der Form $x_3^3 x_1 + x_1^4$ und der durch die Substitution $x_2' = i x_2$ entstehenden G_4 erzeugt wird. Dieselbe enthält vier cyklische G_{12}. Hr. Kantor giebt 72 als die Ordnung dieser Gruppe; dabei begeht er den merkwürdigen Fehler, dass er ausser den 48 erwähnten Collineationen noch 24 hinzunimmt, ohne jedoch deutlich anzugeben, wie dieselben entstehen sollen*).

*) a. a. O., S. 86, Theorem XC. Sowohl die G_{48} als die folgenden G_{96} und G_{168}

Die Gruppe der Curve

(11) $$x_3^4 + f_4(x_1, x_2) = 0,$$

welche eine *perspectivische* G_4 besitzt, entsteht als Combination dieser G_4 mit der Vierergruppe, welche die binäre Form f_4 in sich überführt; dieselbe ist somit eine G_{16}. Nur in zwei Fällen besitzt f_4 eine höhere Gruppe: wenn die quadratische Invariante verschwindet, ist dieselbe die Tetraedergruppe, und wir erhalten die Curve (10) mit einer G_{48}; ist dagegen die cubische Invariante $T = 0$, so besteht jene binäre Gruppe aus einer diedrischen G_8, und die Gleichung (11) lässt sich auf die einfache Form

(12) $$x_3^4 + x_2^4 + x_1^4 = 0$$

bringen. Die Gruppe ist eine G_{96}, welche durch Combination einer G_{16}, welche die Coordinatenaxen unvertauscht lässt, mit der Gruppe ihrer 6 Vertauschungen entsteht. Die G_{96} enthält 6 cyklische G_8, bei denen je zwei der 12 Undulationspunkte invariant bleiben.

Wir haben jetzt alle Collineationsgruppen der C_4 erhalten, in denen perspectivische G_3 oder G_4 vorkommen können. Doch sollen in den etwa noch übrigen Gruppen Collineationen mit festen Wendepunkten auftreten, was noch nur bei den G_7 zutrifft. Es bleibt also bloss eine Gruppe übrig, diejenige der Curve

(13) $$x_3^3 x_2 + x_2^3 x_1 + x_1^3 x_3 = 0.$$

Von dieser in der neueren Litteratur in ausgiebiger Weise behandelten Curve ist es aber bekannt, dass dieselbe eine *einfache Gruppe von* 168 *Collineationen* in sich zulässt. Unter anderen Untergruppen enthält die G_{168} zwei Systeme von je sieben gleichberechtigten Oktaedergruppen.

4. Aus jeder der erhaltenen 13 Collineationsgruppen lässt sich nun durch die Abbildung der Doppelebene auf eine einfache Ebene eine Gruppe von doppelter Ordnung herleiten. Hier tritt nun jedesmal eine einzige ausgezeichnete Transformation Θ_2 auf. Anderseits existirt aber auch eine ausgezeichnete Untergruppe, welche mit der Collineationsgruppe der C_4 holoedrisch isomorph ist. Dies ist in denjenigen Fällen besonders leicht zu beweisen, wo bei der Collineationsgruppe ein nicht auf der C_4 belegener Punkt fest bleibt; man braucht ja nur die Bedingung aufzuerlegen, dass die dort über einander liegenden Punkte der Doppelebene nicht permutirt werden sollen. Auch in den übrigen drei Fällen der G_{24}, G_{96} und G_{168} lässt sich jene mit der Collineationsgruppe isomorphe Untergruppe nicht schwer herstellen.

Als Endergebniss folgt hier eine Aufzählung der 13 Gruppen M_7. Dabei verweisen wir in jedem Falle auf die in der vorigen Nummer

---

sammt den zugehörigen C_4 sind aus der Theorie der elliptischen Modulfunctionen bekannt. Man sehe etwa Klein-Fricke, „*Modulfunctionen* I", S. 675, 678, 701.

gegebene Gleichung der fundamentalen C_4. Auch wird jedesmal die Zahl M der unabhängigen Moduln dieser Curve angegeben.

a. $M = 6$.

1) G_2. Gl. (1). Die G_2 wird durch Θ_2 erzeugt.

b. $M = 4$.

2) G_4. Gl. (2).

c. $M = 3$.

3) G_8. Gl. (3). Die G_4 und G_8 bestehen aus lauter involutorischen Transformationen.

d. $M = 2$.

4) G_{16}. Gl. (4).
5) G_{12}. Gl. (6). Diese Gruppe ist vom Diedertypus.
6) G_6. Gl. (7). Die Gruppe ist die cyklische von Γ_6''.

e. $M = 1$.

7) G_{48}. Gl. (5) Die Gruppe ist mit der „erweiterten" Oktaedergruppe isomorph.
8) G_{12}. Gl. (8).
9) G_{32}. Gl. (11).

f. $M = 0$.

10) G_{18}. Gl. (9). Diese Gruppe ist die cyklische von B_{18}.
11) G_{96}. Gl. (10).
12) G_{192}. Gl. (12).
13) G_{336}. Gl. (13).

Da Hr. Kantor die zu den Curven (4), (5) und (10) gehörigen Collineationsgruppen unrichtig bestimmt hatte, müssen durch diese Fehler auch diejenigen Gruppen in seiner Aufzählung*), welche den obigen Fällen 4, 7 und 11 entsprechen, nicht mit den gebührenden Eigenschaften erhalten werden. Hr. Kantor giebt auch als vierzehnten Fall die cyklische Gruppe von Γ_6'. Dieselbe tritt aber immer als Untergruppe der G_{12} unseres 5 Falles auf. Mit gleichem Rechte könnten also andere Untergruppen innerhalb der verschiedenen Gruppen mitgenommen werden, was aber die Uebersicht sehr erschweren würde.

§ 6.

Die Gruppen M_8.

1. Auch diesen Fall, dass bei der Gruppe ein invariantes System von C_6 mit 8 Doppelpunkten existirt, können wir durch die Flächen

*) S. 91 der citirten Arbeit.

3. Ordnung F_3 beleuchten. Dabei mögen 6 von jenen Punkten die Fundamentalpunkte bei der Abbildung der bezüglichen F_3 darstellen; die beiden übrigen sind somit die Bilder zweier Punkte derselben Fläche. Durch jene 8 Fundamentalpunkte in der Ebene wird der 9. Basispunkt eines Büschels von C_3 bestimmt. Dem entspricht auf der F_3 der durch die Verbindungsgerade der erwähnten beiden Punkte ausgeschnittene Punkt.

Das System der ∞^3 C_6 *mit den* 8 *festen Doppelpunkten erhält man als Bild eines Systems von* C_6, *welches auf der* F_3 *durch diejenigen* F_2 *bestimmt wird, welche die* F_3 *in den beiden festen Punkten,* O *und* O_1, *berühren; insbesondere schneidet der Ebenenbüschel durch* $O\,O_1$ *aus der* F_3 *ein System von* C_3 *aus, welches dem ebenen* C_3*-Büschel entspricht.* Unter den ∞^3 F_2 existirt eine endliche Anzahl, welche die F_3 noch in 3 Punkten berühren. Das Geschlecht der Schnittcurve ist im Allgemeinen 2, reducirt sich aber um eine Einheit durch jede neue Berührung. Dieselbe muss somit in den gedachten Fällen nothwendig zerfallen, und wir erhalten sofort durch Betrachtungen in der Ebene **120** Lösungen. Die C_6 zerfallen nämlich hier auf **8** Weisen in einen Punkt und eine C_6 mit dreifachem Punkte dortselbst; in gleicher Weise zerfallen **28** C_6 in eine Gerade und eine C_5, **56** in einen Kegelschnitt und eine C_4 und **28** in zwei C_3. Die Bilder dieser 120 Paare von Fundamentalcurven auf der F_3 lassen sich leicht bestimmen.

Man erhält nun leicht eine involutorische Transformation Σ_2, welche jede zwei so zusammengehörige Fundamentalcurven vertauscht. In der That, betrachten wir das System der Kegelschnitte, welche in O und O_1 die F_3 berühren, so schneidet jeder aus der F_3 noch zwei Punkte aus. *Durch die Vertauschung letzterer Punkte entsteht die Transformation* Σ_2. Dieselbe definirt in der Ebene eine Cremona-Transformation von der 17. Ordnung, bei welcher 8 Fundamentalpunkte a_i mit 8 Fundamentalcurven a_i' sechster Ordnung vertauscht werden, wobei die Curve a_i' einen dreifachen Punkt in a_i und Doppelpunkte in den 7 anderen Fundamentalpunkten besitzt.

Bei Σ_2 giebt es *einen isolirten festen Punkt*, den durch die Gerade $O\,O_1$ auf der F_3 bestimmten Punkt oder den 9. Basispunkt des ebenen C_3-Büschels. Die übrigen festen Punkte erfüllen *eine Curve*, in deren Punkten Kegelschnitte des erwähnten Systems die F_3 berühren. Jeder Querschnitt durch $O\,O_1$ schneidet drei Punkte dieser Curve aus, nämlich diejenigen, welche denselben Tangentialpunkt wie der isolirte feste Punkt besitzen. Die entsprechende Curve in der Ebene erhält man als Jacobi'sche Curve irgend einer C_6 des ∞^3-Systems und zweier C_3 des Büschels. Dieselbe ist eine C_9 mit dreifachen Punkten in den 8 Fundamentalpunkten und besitzt folglich das Geschlecht $p = 4$.

Man kann die F_3 in der Weise eindeutig auf eine Doppelebene abbilden, dass die beiden durch denselben Kegelschnitt des Systems ausgeschnittenen Punkte über einander liegen. Hiermit erhalten wir auch diejenige eindeutige Abbildung einer Doppelebene auf eine einfache Ebene, bei welcher eine nicht-hyperelliptische Uebergangscurve vom Geschlechte $p = 4$ auftritt. Dieselbe wurde zuerst von Hrn. Noether angegeben, die specielle Art der zugehörigen Gebilde mit $p = 4$ ist aber auch von Hrn. Schottky behandelt*). Doch ist es uns unbekannt, ob die hier gegebene Herleitung der Transformation durch Vermittlung einer Fläche 3. Ordnung früher gegeben sei.

2. Durch den folgenden Satz erhellt sich die Beschaffenheit der ebenen C_3-Büschel:

Definirt die Gleichung

(a) $$f_3 + \lambda \varphi_3 = 0$$

den Büschel und erhält man für die Invarianten 4. *und* 6. *Grades bez.:*

(b) $$S = f_4(\lambda), \qquad T = f_6(\lambda),$$

dann kann man dem Büschel das System

(c) $$u^2 = 4z^3 - f_4 z - f_6$$

eindeutig zuordnen, wobei die Gleichung (c), *falls man in derselben auch λ als veränderlich betrachtet, eine auf die Ebene des Büschels eindeutig bezogene Fläche bedeutet**). Diese Fläche kann man auf die Doppelebene* (z, λ) *projiciren, wobei*

(d) $$4z^3 - f_4(\lambda) z - f_6(\lambda) = 0$$

als Uebergangscurve erhalten wird. Diese Curve besitzt zwei zusammenfallende dreifache Punkte und ist folglich im Allgemeinen vom Geschlechte $p = 4$. Den besprochenen Zusammenhang wollen wir jetzt näher darlegen.

Wir denken uns den Büschel in das System der Querschnitte einer F_3 übergeführt, welches durch den Ebenenbüschel

(e) $$x_1 = \lambda x_2$$

ausgeschnitten wird. Dabei seien $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ die Berührungsebenen der F_3 in den Punkten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, welche wir in der vorigen Nummer mit O und O_1 bezeichneten. Die Gleichung der F_3 kann also auf die Gestalt

(f) $$x_3 x_4 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 f_1(x_1, x_2) + x_3 f_2(x_1, x_2) + x_4 \varphi_2(x_1, x_2) + f_3(x_1, x_2) = 0$$

*) Man sehe Noether, „*Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*“, Sitzungsber. der physik. medic. Soc. zu Erlangen 1878, sowie „*Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen*“ und „*Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*“, Math. Ann. XXXIII, und Schottky, „*Ueber specielle Abel'sche Functionen vierten Ranges*“, Journal für Mathematik CIII.

**) Man vergleiche hierzu Hrn. Kantor's Erörterungen über die Büschel von C_3, Acta Math. XIX, S. 183.

gebracht werden. Jeder Kegelschnitt, welcher die Fläche in O und O_1 berührt, kann durch (e) und eine Gleichung

(g) $$x_3 x_4 = \mu x_1^2$$

definirt werden, wobei λ und μ veränderliche Parameter bedeuten. Nimmt man dieselben als constant an, so erhält man die zwei Schnittpunkte, welche ein bestimmter Kegelschnitt noch mit der F_3 gemein hat, und zwar durch die Gleichung

(h) $$x_3^2(\mu + f_2) + x_3 x_1 (\mu f_1 + f_3) + x_1^2 \mu(\mu + \varphi_2) = 0,$$

wobei in den Functionen f_1, f_2, f_3 und φ_2 x_1 und x_2 durch λ bez. 1 ersetzt werden. Wir setzen hier

$$u = 2\frac{x_3}{x_1}(\mu + f_2) + \mu f_1 + f_3$$

und erhalten hieraus

$$u^2 = (\mu f_1 + f_3)^2 - 4\mu(\mu + f_2)(\mu + \varphi_2).$$

Durch die Substitution

$$z = -\mu - \frac{4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2}{12}$$

ergiebt sich nun die bezweckte Endgleichung

(c) $$u^2 = 4z^3 - f_4 z - f_6,$$

wobei

(k) $$\begin{aligned} f_4 &= 2f_1 f_3 - 4f_2\varphi_2 + \frac{(4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2)^2}{12}, \\ f_6 &= -f_3^2 + \frac{(f_1 f_3 - 2f_2\varphi_2)(4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2)}{6} + \frac{(4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2)^3}{216}. \end{aligned}$$

Setzt man hier $u = 0$, so erhält man jene Uebergangscurve

(d) $$4z^3 - f_4(\lambda)z - f_6(\lambda) = 0,$$

welche auch das Bild der Schnittcurve der Fläche (f) mit der Fläche

(l) $$2x_3[x_3 x_4 + f_2(x_1, x_2)] + x_3 x_4 f_1(x_1, x_2) + f_3(x_1, x_2) = 0$$

definirt. Für $z = 0$ ergiebt sich eine andere Curve mit ausgezeichneten Eigenschaften:

(m) $$u^2 + f_6(\lambda) = 0.$$

Dieselbe ist hyperelliptisch vom Geschlechte $p = 2$ und kann auch als Bild der Schnittcurve der Fläche (f) mit der Fläche

(n) $$12x_3 x_4 + 4f_2(x_1, x_2) + 4\varphi_2(x_1, x_2) - \{f_1(x_1, x_2)\}^2 = 0$$

erhalten werden.

3. Jedes Paar durch die Transformation Σ_2 einander zugeordneter Punkte in der einfachen Ebene besitzt ersichtlich die Eigenschaft, dass eine C_6 des invarianten Systems mit δ. in den 8 Fundamentalpunkten immer gleichzeitig durch beide Punkte geht. Insbesondere berühren die C_6 einander in den Punkten der mehrfach erwähnten Uebergangs-

curve. Letztere Curve muss also gegenüber dem System der C_6 und somit auch der Gruppe M_8 von invarianter Natur sein. Sollen also in dieser Gruppe weitere Transformationen enthalten sein, so muss die Curve bei denselben eindeutig in sich übergeführt werden. Die Ebene haben wir schon auf die Fläche

$$u^2 = 4z^3 - f_4(x)z - f_6(x) \tag{c}$$

ein-eindeutig abgebildet, wo wir hier x statt λ setzen. Durch Σ_2 gehen zwei Punkte mit denselben z und x aber entgegengesetzten u in einander über. Haben wir also diejenige Gruppe von birationalen Transformationen der (zx)-Ebene erhalten, bei welcher die Curve

$$4z^3 - f_4(x)z - f_6(x) = 0 \tag{d}$$

invariant bleibt, so ergiebt sich sehr leicht für die Fläche (c) eine Gruppe von doppelter Ordnung, welche man auf die ursprüngliche einfache Ebene als die gesuchte Gruppe M_8 übertragen kann.

Die (zx)-Ebene kann man als die Projection eines *quadratischen Kegels* K_2 von einem Punkte desselben betrachten. Schreiben wir die Gleichung (d) in homogener Form

$$4z^3y^3 - f_4(x, y)\, zy - f_6(x, y) = 0, \tag{d_1}$$

und lassen wir die Gerade $y = 0$ dem Projectionscentrum auf dem Kegel und den Punkt $x = y = 0$ der Erzeugenden durch das Centrum entsprechen, so gewinnen wir den erheblichen Vortheil, dass die adjungirten Curven von (d_1) in die ebenen Querschnitte des Kegels übergehen. Die birationalen Transformationen, welche die Bildcurve von (d_1) auf dem K_2 in sich überführen, müssen also eine räumliche *Collineationsgruppe* bilden, bei welcher sowohl ein Punkt, die Kegelspitze, als auch die Ebene, welche der Geraden $z = 0$ entspricht, fest bleiben *).

Bei dieser Abbildung der ursprünglichen einfachen Ebene auf den doppelten Kegel entsprechen somit die Erzeugenden des Kegels den C_3 des Büschels und die Querschnitte den C_6 des fundamentalen Systems. Man kann auf dem Kegel viele Systeme von Curven nachweisen, deren Existenz in der Ebene nicht so leicht zu erschliessen ist. Um nur ein Beispiel zu geben, bemerken wir, dass man auf dem Kegel ein System von C_3 construiren kann, welche mit der Curve (d_1) an einer beliebigen Stelle vier auf einander folgende Punkte gemein hat. Dem entspricht ersichtlich in der Ebene ein Büschel von C_9 mit dreifachen Punkten in den 8 Fundamentalpunkten und einem Berührungsknoten auf der Uebergangscurve. Hier tritt nun die Eigenthümlichkeit ein,

*) Hr. Kantor hat zwar erwähnt, dass bei jeder Gruppe M_8 eine C_6 des fundamentalen Systems fest bleiben muss; doch scheint er die durch diese C_6 bewirkte Vereinfachung nicht bemerkt zu haben, dass in der Gleichung (d_1) das Glied $z^2y^2f_2(x, y)$ beseitigt werden kann.

dass der zu diesem Büschel adjungirte Büschel von C_6 Doppelpunkte nicht nur in den dreifachen Punkten, sondern auch in dem *Berührungsknoten* besitzt.

Stellen wir die Gleichung

$$(c) \qquad u^2 = 4z^3 - f_4(x)z - f_6(x)$$

mit der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

zusammen, und ziehen wir die bekannte Theorie dieser $\wp$-Function heran, so können wir auf dem Kegel eine Reihe Oerter bestimmen, welche auf der durch die jedesmalige Erzeugende dargestellten elliptischen Curve um gewisse Perioden-n-teln von der Kegelspitze entlegen sind. Insbesondere bezeichnet $\wp' = 0$ oder die Curve (d) der um halbe Perioden entfernte Ort*).

Betreffend die Berührungscurven von (d_1) wollen wir auf die citirte Abhandlung von Nrn. Noether verweisen. Hier sei nur an die 120 einzelnen Berührungscurven φ erinnert, welche die fundamentalen Octupel bei der Abbildung liefern.

4. Wir sollen also behufs der Bestimmung der Gruppen M_8 diejenigen Collineationsgruppen aufsuchen, welche die Normalcurve auf dem Kegel in sich überführen können. Die bei einer einzelnen räumlichen Collineation festen Erzeugenden des Kegels kann man für $x = 0$ und $y = 0$ wählen. Die 4 festen Punkte bei der Collineation sind die Kegelspitze und 3 Punkte in der vorerwähnten festen Ebene, von denen 2 auf jenen festen Erzeugenden liegen, und der dritte der Pol ihrer Verbindungsgerade in Bezug auf den Querschnitt des Kegels ist. Doch giebt es Fälle, dass auch alle Punkte einer Verbindungslinie zweier von diesen Punkten oder einer Ebene durch drei von ihnen fest bleiben. Da wir als Centrum bei der Projection des Kegels auf eine Ebene einen von diesen festen Punkten gewählt haben, so ist auch die entsprechende Transformation in der Ebene eine Collineation und zwar von der Form

$$(\alpha) \qquad x' : y' : z' = \alpha x : \beta y : \gamma z.$$

Wir betrachten jetzt die invariante Curve

$$(d_1) \qquad 4z^3y^3 - f_4(x, y)zy - f_6(x, y) = 0$$

und nehmen an, dass durch diese Substitution $f_6(x', y')$ in $k \cdot f_6(x, y)$ und $f_4(x', y')$ in $l \cdot f_4(x, y)$ übergehen. Die einzelnen Glieder von (d_1) sollen aber durch dieselbe Zahl k vervielfältigt werden. Daraus erhält man die Bedingungen:

$$(\beta) \qquad \beta^3\gamma^3 = \beta\gamma l = k; \quad \gamma = \frac{k}{\beta l}; \quad k^2 = l^3.$$

---

*) Man vergleiche eine Abhandlung von G. H. Halphen, „*Recherches sur les courbes planes du troisième degré*“, Math. Ann. XV.

Wählt man als Projectionscentrum den festen Punkt auf der Erzeugenden $x = 0$, so erhält man als Gleichung der invarianten Curve

$$(\mathrm{d}_1') \qquad 4z^3x^3 - f_4(x, y)zx - f_6(x, y) = 0,$$

und die Collineation wird in die folgende übergeführt:

$$(\alpha') \qquad x' : y' : z' = \alpha x : \beta y : \gamma_1 z; \quad \gamma_1 = \frac{k}{\alpha l} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma.$$

Hat man in (α) $\alpha = \beta$, so geht jede Erzeugende in sich über; man erhält $k = \alpha^6$, $l = \alpha^4$ und $\gamma = \alpha$. Die Collineation ist somit eine identische. Doch treten andere Verhältnisse ein, falls f_4 identisch verschwindet, was jedoch zunächst ausgeschlossen sei.

Ist $\beta = \gamma$, so geht jeder Punkt der Erzeugenden $x = 0$ in sich über. Dasselbe gilt für die Erzeugende $y = 0$, falls $\alpha = \gamma_1$. Gelten beide Relationen gleichzeitig, so erhält man $\alpha^2 = \beta^2$ oder $\alpha = -\beta$. Die räumliche Collineation ist dann eine harmonische Perspectivität, deren Perspectivitätsebene die festen Erzeugenden enthält.

Nimmt man $\alpha = \gamma$, so ist auch $\beta = \gamma_1$. Eine Gerade mit lauter festen Punkten bei der räumlichen Collineation ist hier die Polgerade der Ebene durch die festen Erzeugenden. Ist $\alpha = -\beta$ oder $\gamma = -\gamma_1$, so besitzt eine Gerade in der letzteren Ebene dieselbe Eigenschaft.

Die Collineationsgruppe der Normalcurve erhält man also aus der gemeinschaftlichen Gruppe von $f_4(x, y)$ und $f_6(x, y)$, welche der Bedingung (β) $k^2 = l^3$ genügt; doch, falls f_4 identisch verschwindet, entsteht dieselbe durch Combination der Gruppe von f_6 mit einer G_3, welche die 3 Punkte der Curve auf derselben Erzeugenden cyklisch vertauschen. Die Curve wird von den 12 Erzeugenden, $27f_6^2 - f_4^3 = 0$, berührt. Wenn 2 von diesen Geraden zusammenfallen, besitzt die Curve einen Doppelpunkt oder auch, falls nämlich f_6 und f_4 einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, eine stationäre Tangente. Wenn aber Doppelpunkte vorkommen, und somit das Geschlecht reducirt wird, lässt sich die Gruppe M_8 auf eine der früheren Typen zurückführen.

5. Die sämmtlichen *cyklischen Gruppen*, welche die Normalcurve vom Geschlechte $p = 4$ in sich überführen können, hat Hr. Kantor gegeben *). Betreffend die *vollständigen Collineationsgruppen* weichen aber seine Resultate von denjenigen ab, welche ich in einem früheren Aufsatze gegeben habe **), weshalb ich dieselben hier reproducire.

1) *Die Identität.*

2) *Perspectivische G_2:* $x' : y' : z' = -x : y : z.$

$$4z^3y^3 + zy(ax^4 + bx^2y^2 + cy^4) + dx^6 + ex^4y^2 + fx^2y^4 + gy^6 = 0.$$

---

*) „*Theorie der endlichen Gruppen*", S. 100. Wir bemerken nur, dass die dort gegebenen Gruppen 9 und 10 identisch sind.

**) „*Ueber die algebraischen Curven von den Geschlechtern $p = 4$, 5 und 6, welche eindeutige Transformationen in sich besitzen*", S. 25, Anhang d. Abh. d. Königl. Schw. Acad. d. Wissenschaften, Bd. 21, Abth. I, Nr. 3.

3) G_2 „*mit Axen*": $x':y':z' = x:-y:z$.

$$4z^3y^2 + z(ax^4 + bx^2y^2 + cy^4) + x(dx^4 + ex^2y^2 + fy^4) = 0.$$

Hier wird die Ordnung der Bildcurve reducirt, weil das Projectionscentrum ein Punkt der Curve ist. Die Axen sind die Verbindungsgeraden zweier Punkte der Curve in der invarianten Ebene und deren Polgerade.

4) *Vierergruppe*, welche *zwei perspectivische* G_2 und *eine* G_2 *mit Axen* enthält. Die vorige Gleichung muss hier in der Weise specialisirt sein, dass in derselben x und y vertauscht werden können, ohne dass f_4 und f_6 sich verändern.

$$4z^3y^2 + z[a(x^4 + y^4) + bx^2y^2] + x[c(x^4 + y^4) + dx^2y^2] = 0.$$

5) *Vierergruppe*, welche aus *lauter* G_2 *mit Axen* besteht. Da bei jeder Substitution 2 Punkte von $f_6 = 0$ fest bleiben, muss f_6 die Jacobi'sche Covariante von f_4 sein.

$$4z^3y^2 + z[a(x^4 + y^4) + bx^2y^2] + x(x^4 - y^4) = 0.$$

6) *Diedrische* G_8, welche je eine Vierergruppe der beiden vorhergehenden Arten enthält.

$$4z^3y^2 + azx^2y^3 + x(x^4 + y^4) = 0.$$

Die ausgezeichnete *cyklische* G_4 geht aus der Wiederholung der Operation, $x':y':z' = x:iy:-z$, hervor.

7) *Cyklische* $G_4: x':y':z' = ix:y:z$, welche eine perspectivische G_2 als Untergruppe enthält.

$$4z^3y^2 + z(x^4 + ay^4) + y(bx^4 + cy^4) = 0.$$

Jeder Punkt der Erzeugenden $x = 0$ bleibt bei dieser G_4 fest. Zudem rückt in das Projectionscentrum auf $y = 0$ ein Punkt der Curve hinein, was die Erniedrigung der Ordnung der Bildcurve bewirkt.

8) *Diedrische* G_6, welche aus 3 perspectivischen G_2 und einer $G_3: x':y':z' = x:jy:z$, besteht.

$$4z^3y^3 + azy^3x^2 + x^6 + bx^3y^3 + y^6 = 0.$$

Bei der G_6 bleibt jeder Punkt der gemeinschaftlichen Schnittgeraden der 3 Perspectivitätsebenen fest. Die G_2 werden durch die Vertauschung von x und y erhalten.

9) *Diedrische* G_{12}, welche die vorige Gruppe als Untergruppe enthält. Von den 4 hinzutretenden involutorischen Transformationen ist die ausgezeichnete perspectivisch, und die 3 anderen sind G_2 mit Axen. Die erzeugende Substitution der ausgezeichneten *cyklischen* G_6 ist: $x':y':z' = -x:jy:z$.

$$4z^3y^3 + azy^3x^2 + x^6 + y^6 = 0.$$

10) *Cyklische* G_3: $x':y':z' = jx:y:z$.

$$4z^3y^3 + zy^2(ax^3 + by^3) + x^6 + cx^3y^3 + dy^6 = 0.$$

Die Punkte der Erzeugenden $x = 0$ bleiben hier fest. Wenn aber f_6 die Jacobi'sche Covariante der äquianharmonischen Form f_4 liefert, so besteht die Gruppe aus 4 solchen G_3 und einer Vierergruppe von der Art (5), welche zusammen eine

11) *Tetraedergruppe* bilden.

$$4z^3y^3 + azy^2(x^3 + y^3) + x^6 + 20x^3y^3 - 8y^6 = 0.$$

12) *Cyklische* G_6: $x' : y' : z' = -jx : y : z$, welche die letzterwähnte G_3 und die perspectivische G_2 als Untergruppen enthält.

$$4z^3y^3 + azy^5 + x^6 + by^6 = 0.$$

Auch bei dieser G_6 bleiben alle Punkte der Erzeugenden $x = 0$ fest.

13) *Cyklische* G_{12}: $x' : y' : z' = jx : iy : -iz$, welche die vorerwähnte G_6 als Untergruppe enthält.

$$4z^3y^3 + zy^5 + x^6 = 0.$$

14) $G_5 : x' : y' : z' = \varepsilon x : y : z.$

$$z^3y^2 + azy^4 + x^5 + by^5 = 0.$$

Die Punkte der Erzeugenden $x = 0$ bleiben auch hier fest. Wenn $b = 0$, ist die G_5 Untergruppe einer

15) cyklischen $G_{10} : x' : y' : z' = \varepsilon x : -y : z.$

$$4z^3y^2 + zy^4 + x^5 = 0.$$

Hier hat man als Untergruppe eine G_2 mit Axen.

In den noch übrigen Fällen *verschwindet* f_4 *identisch.* Damit die Normalcurve keine Doppelpunkte besitze, darf f_6 nunmehr keine doppelten Factoren besitzen. Die linearen Gruppen, welche die binäre Form f_6 in sich überführen können, sind von Hrn. Bolza bestimmt*). Dieselben sind: G_2, G_5, *Vierergruppe*, *diedrische* G_6, *diedrische* G_{12} *und Oktaedergruppe.* Wir erhalten nun 7 neue Collineationsgruppen.

16) *Perspectivische* $G_3 : x' : y' : z' = x : y : jz$, für welche die Kegelspitze das Perspectivitätscentrum liefert:

$$4z^3y^3 = f_6(x, y).$$

In den folgenden Fällen erhält man die Collineationsgruppen durch Combination dieser G_3 mit den erwähnten binären Gruppen.

17) *Cyklische* $G_6 : x' : y' : z' = -x : y : jz$, deren Untergruppen G_2 und G_3 perspectivisch sind:

$$4z^3y^3 = x^6 + ax^4y^2 + bx^2y^4 + y^6.$$

18) *Cyklische* $G_{15} : x' : y' : z' = \varepsilon x : y : jz.$ Von den Untergruppen G_3 und G_5 ist jene perspectivisch und diese die schon behandelte Gruppe (14).

$$4z^3y^2 = x^5 + y^5.$$

---

*) Math. Ann. XXX.

19) G_{12}, welche drei cyklische G_6 enthält.

$$4z^3y^2 = x(x^4 + ax^2y^2 + y^4).$$

Eine *cyklische* $G_6 : x' : y' : z' = x : -y : jz$, hat als Untergruppen die perspectivische G_3 und eine G_2 mit Axen; die beiden anderen sind von der Art (17).

20) G_{18}, welche unter anderen Untergruppen 3 cyklische G_6 von der Art (17) enthält.

$$4z^3y^3 = x^6 + ax^3y^3 + y^6.$$

21) G_{36}, in welcher 4 G_{12} auftreten, von denen die eine ausgezeichnet ist. Letztere ist von der Art (9), die 3 übrigen von der Art (19).

$$4z^3y^3 = x^6 + y^6.$$

22) G_{72}. Hier treten 3 *cyklische* G_{12} auf, deren Untergruppen G_6 wir schon im Falle (19) begegneten.

$$4z^3y^2 = x(x^4 + y^4).$$

Die eine cyklische G_{12} wird durch die Substitution,

$$x' : y' : z' = x : iy : -jz,$$

erzeugt.

6. Es ist nun ein Leichtes aus den Gruppen der Curven

$$4z^3 - f_4(x)z - f_6(x) = 0$$

die entsprechenden Gruppen von doppelter Ordnung der Flächen

(c) $$u^2 = 4z^3 - f_4(x)z - f_6(x)$$

herzuleiten, welche man sodann durch Abbildung auf die Ebene übertragen kann. Doch wollen wir zuerst nach Hrn. Kantor die von diesem Verfasser in seiner Preisschrift behandelten isolirten typischen Transformationen angeben, welche durch die cyklischen Gruppen geliefert werden. Eine cyklische Gruppe bezeichnen wir hier mit der Nummer derjenigen Collineationsgruppe, wo wir die Erzeugung derselben gegeben haben.

Von diesen Typen traten einige schon bei den Gruppen M_6 und M_7 auf, nämlich: Δ_3, E_4, B_6, Γ_6, B_{12} und B_{12}'. Δ_3 erhält man aus der $G_3(10)$, E_4 aus (7), B_6 aus (12), B_{12} und B_{12}' aus (13) und Γ_6 aus (9)*). Durch Combination mit Σ_2 entstehen aus Δ_3 und B_6 die bezüglichen Typen E_6'' und H_6'. Die Gruppe (17) liefert den Typus H_6. Γ_6 und H_6, mit Σ_2 zusammengesetzt, geben abermals mit Γ_6 und H_6 äquivalente Transformationen. Die cyklischen Gruppen von ungerader Periode liefern durch Combination mit Σ_2 cyklische Gruppen von doppelter Ordnung, aber, wenn Σ_2 keine Untergruppe ist, Gruppen von derselben Ordnung. So erhält man aus den Gruppen (14), (16) und (18) sowohl die Typen Z_5, N_3 und B_{15} als auch die Typen Γ_{10}, E_6

---

*) Hr. Kantor hat (l. c.) H_6 statt Γ_6, was aber gewiss unrichtig ist.

und B_{30}. Die einzige noch übrige Collineation von ungerader Periode, diejenige der Gruppe (8), liefert den Typus E_6'; die Untergruppe von der Ordnung 3 ist aber hier mit einer Collineation äquivalent. Die noch nicht besprochenen cyklischen Gruppen von gerader Ordnung besitzen sämmtlich die G_2 mit Axen als Untergruppe; bei dieser gilt die Eigenthümlichkeit, dass die beiden entsprechenden Transformationen von der Periode 4 (nicht 2) sind, was man leicht durch Betrachtung der Fläche (c) oder der invarianten Curve $u^2 + f_6(x) = 0$ bestätigen kann. Die fraglichen Collineationen, welche den Gruppen (3), (6), (15), (19) und (22) angehören, sind bez. von den Perioden 2, 4, 10, 6 und 12 und liefern Typen von doppelter Periode, nämlich: J_4, Δ_8, B_{20}, Γ_{12} und B_{24}, welche sämmtlich Σ_2 als Untergruppe enthalten. Bei N_3 bleibt jeder Punkt der Curve $u^2 + f_6(x) = 0$ vom Geschlechte $p = 2$ fest; bei jeder der Transformationen Δ_3, E_4, H_6' und Z_5 existirt eine elliptische Doppelpunktscurve, welche der bei der bezüglichen Collineation in jedem Punkte festen Erzeugenden des Kegels entspricht.

Wir geben jetzt als Endresultat eine Aufzählung der Transformationsgruppen M_8 und wollen dabei diejenigen Punkte hervorheben, wo unsere Ergebnisse mit denjenigen des Hrn. Kantor*) nicht übereinstimmen. Die Gruppen seien nach der Zahl M der unabhängigen Moduln angeordnet: doch geben wir jeder Gruppe die Nummer, welche schon der Collineationsgruppe der zugehörigen Normalcurve zugetheilt ist.

a. $M = 8$.

1) *Die involutorische Transformation* Σ_2.

b. $M = 5$.

2) G_4 *vom Typus der Vierergruppe.*

c. $M = 4$.

3) *Die cyklische Gruppe von* J_4.

d. $M = 3$.

4) G_8 *vom Diedertypus. Die cyklische Untergruppe ist diejenige von* J_4.

10) *Die cyklische Gruppe von* E_6''. Hr. Kantor hat hier (Fall VIII) „die cyklische Gruppe von E_6'' in der allgemeinsten Form nebst 6 Involutionen" also die Ordnung 12. Dafür wäre erforderlich, dass die Curve (10) eine diedrische G_6 in sich besässe, was aber schon aus dem Grunde nicht möglich ist, weil eine binäre Form f_4 mit keinen

*) Hr. Kantor giebt keine eigentliche Aufzählung der Collineationsgruppen der Normalcurve; betreffend diejenige der Gruppen mit 8 Punkten sehe man S. 102 der citirten Arbeit.

doppelten Factoren nur die Vierergruppe, diedrische G_8 oder Tetraedergruppe zulassen kann *).

16) *Die cyklische Gruppe von* E_6.

e. $M = 2$.

5) G_8, *welche 3 Gruppen vom Typus* J_4 *enthält.* Dieser Fall fehlt bei Hrn. Kantor.

7) G_8, *welche die Gruppe von* E_4 *enthält.*

8) G_{12} *vom Diedertypus. Die cyklische Untergruppe* G_6 *ist diejenige von* E_6'.

17) G_{12}, *welche die Gruppen von* E_6 *und* H_6 *enthält,* Hr. Kantor hat hier (Fall XVI) die Ordnung 36.

f. $M = 1$.

6) G_{16}, *welche die Gruppe von* Δ_8 *enthält.* Hr. Kantor hat hier (Fall XIII) die Ordnung 24.

9) G_{24}, *welche sowohl die* G_{12} (8) *als die* G_8 (4) *als Untergruppen enthält.* Dieser Fall fehlt bei Hrn. Kantor.

11) G_{24}, *welche mit der homogenen binären Tetraedergruppe isomorph ist.* Auch dieser Fall fehlt bei Hrn. Kantor.

12) G_{12}, *welche die Gruppen von* B_6 *und* H_6' *enthält.*

14) *Die cyklische Gruppe von* Γ_{10}.

19) G_{24}, *welche sowohl die Gruppe von* Γ_{12} *als auch die Gruppen* (4) *und* (17) *als Untergruppen enthält.* Dieser Fall wird von Hrn. Kantor zwei Male aufgezählt: einmal (Fall XII) als „die cyklische Gruppe von Γ_{12} in der allgemeinsten Form“ mit der Ordnung 12, und dann (Fall XX) als die Gruppe IV (unsere Gruppe (4)) mit E_6'' mit der Ordnung 24.

20) G_{36}, *welche 3 Untergruppen* (17) *enthält.* Hr. Kantor hat hier (Fall XVII) die Ordnung 48.

g. $M = 0$.

13) G_{24}, *welche sowohl die Gruppe* (12) *als die Gruppen von* B_{12} *und* B_{12}' *enthält.*

15) *Die cyklische Gruppe von* B_{20}.

18) *Die cyklische Gruppe von* B_{30}.

21) G_{72}, *unter deren Untergruppen die Gruppen* (9), (19) *und* (20) *auftreten.* Hr. Kantor hat hier (Fall XV) die Ordnung 54.

22) G_{144}, *unter deren Untergruppen sowohl 3 cyklische Gruppen vom Typus* B_{24} *als auch die Gruppen* (11), (19) *und* (20) *auftreten.*

---

*) Es soll hier bemerkt werden, dass Hr. Kantor bisweilen die Typen von E_6' und E_6'' (durch Druckfehler?) verwechselt. Doch giebt er für die zu jeder in ihrer allgemeinsten Form gehörige Gruppe die Ordnung 12.

Hr. Kantor hat also die 3 Gruppen (5), (9) und (11) ganz übersehen und die 5 Gruppen (6), (10), (17), (20) und (21) mit unrichtigen Ordnungen gegeben. Zudem betrachtet er die cyklische Untergruppe Γ_{12} von (19) als eine vollständige Gruppe, obgleich dieselbe, wie viele andere Gruppen, stets als Untergruppe höherer endlichen Gruppen vorkommt.

Wir schliessen hiermit die gegenwärtige Darstellung. Unser Ziel war nicht die analytische Darstellung der Gruppen in der Ebene zu liefern. Wir wünschten in der That nur die Bestimmung derselben in einfacher Weise zu geben und dabei die Fehler zu beseitigen, welche Hr. Kantor auf Grund seiner mehr complicirten Methoden begangen hat. Hierbei war es natürlich nicht unser Zweck den grossen Verdiensten, welche sich Hr. Kantor um den vorliegenden Gegenstand erworben hat, Abbruch zu thun.

Lund, April 1896.