Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Sturm und Liouville haben in den ersten drei Bänden des Liouville'schen Journals eine Reihe nach Form und Inhalt hervorragender Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen veröffentlicht, auf welche neuerdings mehrfach, besonders von den Herren Routh, Lord Rayleigh, Darboux, F. Klein hingewiesen worden ist. Die Tendenz dieser Arbeiten geht dahin, bei jedem reellen Integral einer linearen Differentialgleichung die in den physikalischen Anwendungen wichtigsten Eigenschaften, das Wachsen, Abnehmen und Verschwinden für reelle Werthe der unabhängigen Variabeln, überhaupt die Gestalt der das Integral darstellenden Curve, ihre Ausbuchtungen, unendlichen Aeste u. s. w. zu studiren, ausgehend von der Differentialgleichung selbst, ohne den analytischen Charakter des Integrals, seinen Ausdruck durch bekannte Functionen, Reihen oder Quadraturen kennen zu müssen. In ähnlicher Richtung bewegen sich die auf den folgenden Blättern veröffentlichten Untersuchungen; sie beziehen sich hauptsächlich auf die bei vielen Problemen der mathematischen Physik auftretende Frage, ob die Integrale einer linearen Differentialgleichung für unbegrenzt wachsende positive Werthe des Arguments unendlich oft verschwinden können oder nicht; ob also der eine oder andere der beiden Fälle eintritt, welche bei Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten den reellen und den imaginären Wurzeln einer gewissen algebraischen Gleichung entsprechen. Es gelingt, diese Frage für einige sehr allgemeine Categorien von linearen Differentialgleichungen vollständig zu erledigen.

I.

1. Es handelt sich im Folgenden wesentlich um Functionen eines reellen Arguments x. Hat eine solche Function $F(x)$ für alle endlichen Werthe von x, die eine gewisse positive Grenze überschreiten,

irgend welche Eigenschaften, so sagen wir, sie habe dieselben für grosse Werthe von x. Nähert sich die Function bei unbegrenzt wachsenden Werthen von x einer bestimmten endlichen oder unendlichen Grenze, so bezeichnen wir diese einfach durch $\lim F(x)$, während andere Grenzwerthe durch Angabe der Aenderung von x, der sie entsprechen, von dem für $x = +\infty$ zu bildenden unterschieden werden. Tritt die Bezeichnung $\lim F(x)$ in einer Relation neu auf, so sei damit implicite die Existenz eines Grenzwerthes von $F(x)$ für $x = +\infty$ behauptet.

Dies festgesetzt, können wir zwei elementare Sätze der Infinitesimalrechnung, welche das Hauptinstrument der zunächst durchzuführenden Untersuchungen bilden, in folgender Weise formuliren:

(A) Wenn für grosse Werthe von x die Function $F(x)$ sammt ihrer Ableitung $F'(x)$ endlich und stetig und letztere entweder grösser als eine positive oder kleiner als eine negative Constante bleibt, so ist entsprechend beiden Fällen $\lim F(x) = \pm\infty$.

(B) Sind die Functionen $F(x)$ und $G(x)$ für grosse Werthe von x endlich und stetig, existiren ferner die Grenzwerthe $\lim F(x)$, $\lim G(x)$ und wird der Fall ausgeschlossen, dass von ihnen der eine $= 0$, der andere $= \pm\infty$ ist, so besteht die Gleichung

$$\lim F(x) \,.\, \lim G(x) = \lim \big(F(x)\, G(x)\big).$$

2. Es sei nun eine lineare binomische Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben:

$$y'' + y f(x) = 0, \tag{1}$$

in welcher die Function $f(x)$ sowie das Integral y sammt seinen ersten beiden Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig sein mögen. Dann können zwei Fälle eintreten; entweder ist die Function y für grosse Werthe des Arguments x von Null verschieden, oder sie verschwindet für eine unendliche Reihe unbegrenzt wachsender positiver Werthe von x; im letzteren Falle nennen wir sie *oscillatorisch*. Reducirt sich speciell $f(x)$ auf eine Constante c, so sind bekanntlich die Integrale der Gleichung (1) oscillatorisch oder nicht, je nachdem c positiv oder negativ ist. Man kann aber auch — und das ist unser nächstes Ziel — ein Criterium für das Auftreten oscillatorischer oder nicht oscillatorischer Integrale bei der allgemeinen Differentialgleichung (1) ableiten.

Zunächst werde angenommen, die Function $f(x)$ convergire für $x = +\infty$ gegen einen endlichen oder unendlichen Grenzwerth

$$\lim f(x) > 0; \tag{2}$$

wäre dann irgend ein Integral y nicht oscillatorisch, also für grosse Werthe von x von constantem, etwa dem positiven Zeichen, so ergäbe die Differentialgleichung (1) für grosse Werthe von x

$$(3) \qquad y'' < 0.$$

Für die erste Ableitung y' sind offenbar nur zwei Fälle möglich: a) es giebt beliebig grosse Werthe von x, für welche $y' < 0$, oder b) für grosse Werthe von x ist stets $y' \geqq 0$.

Im Falle a) würde sich aus der Ungleichung (3) ergeben, dass die Function y' beständig abnehmen, also für grosse Werthe von x überhaupt negativ und kleiner als eine gewisse negative Grösse bleiben muss. Dann wäre aber dem Satze (A) zufolge

$$\lim y = -\infty,$$

was der über das Vorzeichen der Grösse y gemachten Voraussetzung widerspricht.

Im Falle b) würde dagegen die Function y für grosse Werthe von x niemals abnehmen können; also existirte ein Grenzwerth

$$\lim y > 0.$$

Hieraus und aus der Ungleichung (2) würde aber nach dem Satze (B) folgen

$$\lim \big(y f(x)\big) > 0, \qquad \lim y'' < 0,$$

also mit zweimaliger Benutzung des Satzes (A)

$$\lim y' = -\infty, \qquad \lim y = -\infty,$$

was wiederum der für y eingeführten Voraussetzung widerspricht.

Aus der Annahme, ein Integral der gegebenen Gleichung sei nicht oscillatorisch, ergiebt sich also ein Widerspruch, und man hat das folgende erste Resultat.

Ist die Function $f(x)$ für grosse Werthe von x endlich und stetig und ist $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) > 0$, so ist jedes für grosse Werthe von x endliche und sammt seinen ersten beiden Ableitungen stetige Integral der Differentialgleichung

$$y'' + y f(x) = 0$$

oscillatorisch, d. h. es verschwindet für eine Reihe unzähliger positiver unbegrenzt wachsender Werthe von x.

3. Als Beispiel zur Anwendung dieses Satzes betrachten wir die Bessel'sche Transcendente $J_n(x)$, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0$$

genügt; dabei kann n^2 eine beliebige reelle Constante sein. Die Grösse $y = J_n(x)\sqrt{x}$ ist dann Integral der Gleichung

$$y'' + \left(1 + \frac{1-4n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

auf welche offenbar das in Nr. 2 erhaltene Resultat angewandt werden kann, da die Ungleichung

$$\lim \left(1 + \frac{1-4n^2}{x^2}\right) > 0$$

besteht. Die Grössen y und $J_n(x)$ verschwinden also für unzählige und beliebig grosse positive Werthe des Arguments x.

Für diese Thatsache findet sich beiläufig bemerkt in der von Hattendorff besorgten Ausgabe der Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen S. 267 ein offenbar mangelhafter Beweis; die ihm ursprünglich zu Grunde liegende strenge Argumentation Riemann's dürfte der in Nr. 2 durchgeführten sehr ähnlich sein.

4. Um nun die Differentialgleichung (1) für weitere, in Nr. 2 nicht erledigte Fälle auf den oscillatorischen Charakter ihrer Integrale hin zu untersuchen, sei jetzt für $x \geqq \xi$

$$f(x) < 0, \tag{4}$$

und die Functionen $f(x)$, y, y', y'' endlich und stetig; dann haben für den angegebenen Werthbereich der Variabeln x die Grössen y und y'' zufolge der Differentialgleichung (1) gleiche Zeichen; es sei etwa für $x = \xi$

$$y > 0, \quad y'' > 0, \quad y' \gtreqless 0. \tag{5}$$

Betreffs der Grösse y' sind hier wiederum zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Hat man für $x = \xi$ die Ungleichung $y' = 0$, so muss den Relationen (5) zufolge die Function y' zunächst wachsen, wenn man x vom Werthe ξ ab wachsen lässt; es kann also eine Grösse $\xi_1 > \xi$ so bestimmt werden, dass für alle der Ungleichung

$$\xi \leqq x \leqq \xi_1$$

genügenden Werthe von x die Grösse y' positiv ist, also die Grösse y wächst mit wachsenden Werthen des Arguments. Für $x = \xi_1$ sind daher beide Grössen y, y' jedenfalls positiv, sodass für diesen Argumentwerth dieselben Schlüsse gemacht werden können wie für ξ. Von ξ_1 ausgehend kann man in entsprechender Weise einen Werth $\xi_2 > \xi_1$ bestimmen, für den ebenfalls noch y und y' positive Grössen sind, und so kann man beliebig weit fortfahren. Die Reihe der zunehmenden Grössen

$$\xi < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots \tag{6}$$

kann aber gegen keinen endlichen Grenzwerth η convergiren; denn dann müssten die Functionen y und y' für alle der Ungleichung

$$\xi \leqq x < \eta$$

genügenden Werthe von x positiv sein und, da auch die zweite Ableitung y'' positiv wäre, wachsen mit wachsenden Werthen von x; sie wären also zufolge ihrer Stetigkeit auch positiv für $x = \eta$, sodass für diesen Werth dieselben Schlüsse gültig wären wie für ξ. Die Reihe (6) könnte also zu Werthen, die grösser als η sind, fortgesetzt werden. Damit ist gezeigt, dass die Functionen y und y' für beliebig grosse Werthe von x positiv sind und mit dem Argument x zunehmen.

b) Nimmt man zweitens an, für $x = \xi$ sei $y' < 0$, so können die Grössen y und y' entweder für alle Werthe $x > \xi$ von Null verschieden bleiben oder nicht. In letzterem Falle kann erstens eine der Grössen, wenn man x von ξ an wachsen lässt, zuerst allein verschwinden etwa für $x = \xi_0$; sie muss dann ihr Zeichen wechseln, da dies für y evident ist, für y' aber daraus folgt, dass mit y auch y'' von Null verschieden sein muss. Für Werthe von x, die hinreichend wenig von ξ_0 verschieden und grösser als ξ_0 sind, hätte man eine der beiden Möglichkeiten

$$(7) \qquad \begin{array}{lll} y < 0, & y' < 0, & y'' < 0, \\ y > 0, & y' > 0, & y'' > 0, \end{array}$$

von denen die zweite direct, die erste bei Betrachtung des Integrals $-y$ auf den Fall a) zurückführt, indem man ξ_0 an Stelle von ξ setzt. Zweitens aber könnten die Grössen y und y' zugleich verschwinden; wenn dann die Grösse y ihr Zeichen nicht wechselte, so gälte vermöge der Differentialgleichung dasselbe von y'', also müsste die erste Ableitung den Sinn ihrer Aenderung, ihre Zunahme oder Abnahme beibehalten, also ihr Zeichen wechseln. Wenn dagegen bei y ein Zeichenwechsel einträte, so müsste dasselbe für y'' gelten, also müsste die Grösse y' den Sinn ihrer Aenderung wechseln, also ihr Zeichen beibehalten. Jedenfalls sieht man, dass nur eine der Grössen y und y' ihr Zeichen wechselt, dass man also auch hier auf eine der Combinationen (7) und damit auf den Fall a) zurückkommt. Da nun bei diesem beide Functionen y und y' von einem gewissen Werthe des Arguments ab positiv bleiben, erstere also wächst, so ist folgender Satz bewiesen.

Wenn die Function $f(x)$ für grosse Werthe von x endlich, stetig und negativ ist, so hat die Differentialgleichung

$$y'' + y f(x) = 0$$

kein oscillatorisches Integral; jedes Integral, welches für grosse Werthe von x sammt seinen ersten beiden Ableitungen endlich und stetig ist, muss von einem gewissen positiven Werthe von x ab entweder beständig wachsen und positiv, oder beständig abnehmen und negativ sein.

Man übersieht leicht, dass dasselbe gilt für die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right) + yf(x) = 0,$$

wenn $g(x)$ eine beliebige für grosse Werthe von x endliche, stetige und positive Function bedeutet.

II.

5. Neue Methoden sind erforderlich, um die Differentialgleichung (1) auch im Falle

$$\lim f(x) = 0$$

auf den oscillatorischen Charakter ihrer Integrale hin untersuchen zu können. Zu diesem Zwecke verbinden wir unsre Resultate mit einem bekannten Theorem von Sturm (Liouville's Journal Bd. I, S. 125), welches für unsre Zwecke am passendsten in folgender Weise formulirt werden kann.

In den Differentialgleichungen

$$y'' + y\varphi(x) = 0, \quad z'' + z\psi(x) = 0 \tag{8}$$

seien die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sowie die Integrale y und z sammt ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung für irgend ein Werthintervall der Variabeln x endlich und stetig, und es bestehe für dieses Intervall die Ungleichung

$$\varphi(x) \leqq \psi(x). \tag{9}$$

Dann liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen x_0 und x_1 der Function y, welche dem Intervall angehören, mindestens eine Nullstelle der Function z.

Den einfachsten Beweis dieses Theorems giebt eine schon von Sturm und seitdem vielfach benutzte Formel, welche aus den Gleichungen (8) unmittelbar folgt:

$$\begin{aligned} y''z - z''y &= yz\left(\psi(x) - \varphi(x)\right), \\ [y'z - z'y]_{x_0}^{x_1} &= \int_{x_0}^{x_1} yz\left(\psi(x) - \varphi(x)\right) dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Function y hat nämlich im Intervall $x_0 \ldots x_1$ ein constantes Zeichen, etwa das positive; wäre die Behauptung nicht richtig, so hätte in diesem Intervall auch die Grösse z ein constantes Zeichen, etwa auch das positive, da für unsere Betrachtungen beide Integrale $\pm z$ offenbar gleichwerthig sind. Die rechte Seite der Gleichung (10) ist dann wegen der Ungleichung (9) sicher positiv. Andrerseits ist die Grösse y' für $x = x_0$ nicht negativ, für $x = x_1$ nicht positiv, da die Function y für ersteren Argumentwerth wächst, für letzteren abnimmt; die linke Seite der Gleichung (10) ist also sicher nicht positiv. Damit hat die Annahme, unser Satz sei unrichtig, zu einem Widerspruch geführt.

Der Gebrauch, der von dem Sturm'schen Theorem für unsre Fragen zu machen ist, liegt auf der Hand: gilt die Ungleichung (9) überhaupt für grosse Werthe von x und weiss man, dass ein Integral der ersten Differentialgleichung (8) sich oscillatorisch verhält, so gilt dasselbe von jedem Integral der zweiten Gleichung. Hat man $\varphi(x) = \psi(x)$, so folgt der ebenfalls von Sturm aufgestellte Satz, dass die Nullstellen zweier Integrale einer Differentialgleichung von der Form (8) einander trennen, und dass alle Integrale oscillatorisch sind, wenn dies von einem einzigen gilt.

6. Schon bei Sturm finden sich derartige Vergleichungen zu untersuchender Differentialgleichungen mit bekannten, besonders mit der Differentialgleichung, deren Coefficienten constant sind. Nach dieser Methode hätte man auch den in Nr. 2 aufgestellten Satz beweisen können. Die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten versagt aber im Falle $\lim f(x) = 0$. Hier ist es zweckmässig, etwa die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a}{x^2}\, y = 0$$

zur Vergleichung heranzuziehen, in welcher a eine reelle Constante ist. Ein Integral derselben ist eine Potenz von x mit reellem oder complexem Exponenten, je nachdem $a \leqq \frac{1}{4}$ oder $a > \frac{1}{4}$. In letzterem Falle ist der reelle Theil der Potenz ein, wie man leicht sieht, oscillatorisches Integral der Differentialgleichung; denselben Charakter hat dann also nach Nr. 5 jedes andere Integral derselben.

Nun sei in der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' + y f(x) = 0$$

$f(x)$ eine für grosse Werthe von x endliche stetige und positive Function, welche für $x = +\infty$ den Grenzwerth Null besitzt. Nimmt man speciell an, es sei

$$(11) \qquad \lim \big(x^2 f(x)\big) > \frac{1}{4},$$

so wähle man die positive Zahl δ so klein, dass auch die Ungleichung

$$(12) \qquad \lim \big(x^2 f(x)\big) > \frac{1}{4} + \delta$$

besteht; alsdann hat die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{y}{x^2}\Big(\frac{1}{4} + \delta\Big) = 0$$

nur oscillatorische Integrale. Da nun zufolge der Relation (12) für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$f(x) > \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4} + \delta\right)$$

besteht, so folgt, dass auch die Differentialgleichung (1) unter der Annahme (11) nur oscillatorische Integrale besitzt.

Nimmt man dagegen an, es sei

$$\lim x^2 f(x) < \frac{1}{4},$$

so ist für grosse Werthe von x

$$f(x) < \frac{1}{4x^2}; \tag{13}$$

die Differentialgleichung (1) kann also nach Nr. 5 kein oscillatorisches Integral besitzen, da sonst dasselbe von der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{4x^2}\, y = 0$$

gelten müsste, deren Integral $y = \sqrt{x}$ nicht oscillatorisch ist. Ebensowenig kann die Gleichung (1) ein oscillatorisches Integral besitzen, wenn

$$\lim x^2 f(x) = \frac{1}{4},$$

dabei aber für grosse Werthe von x die Relation (13) besteht.

7. In erweiterter Gestalt kann man die erhaltenen Resultate darstellen, wenn man davon ausgeht, dass die beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + Py' + Qy = 0 \tag{14}$$

vermittelst der Substitution

$$z = y e^{\frac{1}{2}\int P\,dx}$$

übergeführt werden kann in die binomische Gleichung

$$z'' + z\left(Q - \frac{1}{2}\, P' - \frac{1}{4}\, P^2\right) = 0,$$

welche unter die bisher behandelte Gleichung (1) subsumirt werden kann, wenn P, Q, P' stetige Functionen von x sind für grosse Werthe dieser Variabeln. Für solche Werthe verschwindet dann der Quotient $y : z$ sicher nicht, sodass oberhalb einer gewissen Grenze die Nullstellen der Functionen y und z dieselben sind. Man erhält demnach aus den in Nr. 6 erhaltenen Resultaten folgenden Satz:

Sind P, Q, P' für grosse Werthe von x stetige und endliche Functionen dieser Variabeln, ist ferner y ein sammt seinen ersten beiden Ableitungen für grosse Werthe von x endliches und stetiges Integral der Differentialgleichung

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

so ist dasselbe oscillatorisch, wenn

$$\lim_{x=+\infty}\left(\left(Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2\right)x^2\right)>\frac{1}{4},$$

d. h. es verschwindet dann für eine Reihe unbegrenzt wachsender positiver Werthe von x; dagegen ist das Integral y nicht oscillatorisch, wenn

$$\lim_{x=+\infty}\left(\left(Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2\right)x^2\right)<\frac{1}{4},$$

ebenso wenn

$$\lim_{x=+\infty}\left(\left(Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2\right)x^2\right)=\frac{1}{4},$$

dabei aber für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2<\frac{1}{4x^2}$$

besteht.

Offenbar gewährt dieser Satz nach einer leichten Transformation Auskunft auch über das Verhalten der Integrale der Gleichung (14) in der Umgebung irgend einer reellen singulären Stelle x_0. Denn führt man als neue unabhängige Variable die Grösse

$$\pm t=\frac{1}{x-x_0}$$

ein, so entsprechen grossen positiven Werthen von t die auf der einen oder andern Seite von x_0 liegenden, wenig von dieser Grösse verschiedenen Werthe von x. Wendet man also unsern Satz zunächst auf die Differentialgleichung an, welche aus der Gleichung (14) durch Einführung der unabhängigen Variabeln t hervorgeht und kehrt dann zur Variabeln x zurück, so erkennt man das Verhalten des Integrals y in der Umgebung des Werthes x_0, sobald ein gewisser aus den Coefficienten der Differentialgleichung und ihren Ableitungen gebildeter Ausdruck für alle von x_0 hinreichend wenig verschiedenen Werthe der Variabeln x entweder stets grösser oder stets kleiner ist als die Grösse $\frac{1}{4}(x-x_0)^2$. Im ersten Falle verschwindet jedes Integral für unzählige reelle Werthe des Arguments x, die von x_0 beliebig wenig verschieden sind, im zweiten Falle tritt dies nicht ein.

Sind die Coefficienten der Differentialgleichung (14) analytische Functionen und zeigen ihre Integrale in der Umgebung der singulären Stelle ein „reguläres" Verhalten, sodass sie sich in der aus der Theorie des Herrn Fuchs bekannten Weise durch Potenzen von $x-x_0$ und $\lg(x-x_0)$ ausdrücken lassen, so tritt der erste der obigen beiden Fälle ein bei complexen, der zweite bei reellen Wurzeln der „determinirenden Fundamentalgleichung", welche zur singulären Stelle x_0 gehört. Man kann an diesem Specialfalle leicht die erhaltenen allgemeinen Sätze bestätigen.

III.

8. Die im vorigen Abschnitt benutzte Methode von Sturm kann allem Anschein nach auf Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung nicht ausgedehnt werden; wohl aber gilt dies von den in Nr. 2 durchgeführten Entwicklungen.

Es sei zunächst eine binomische Differentialgleichung beliebiger Ordnung gegeben,

$$y^{(n)} + y f(x) = 0, \tag{15}$$

bei welcher ähnliche Voraussetzungen gemacht werden mögen wie im Abschnitt I für den Fall $n = 2$; die Function $f(x)$, das Integral y und seine ersten n Ableitungen seien für grosse Werthe von x endlich und stetig, und es sei

$$\lim f(x) > 0, \tag{16}$$

wobei der Grenzwerth links endlich oder unendlich sein kann. Dann stellen wir, ähnlich wie im Abschnitt I, die Frage, ob die gegebene Differentialgleichung ein nicht oscillatorisches Integral besitzen kann.

Ein solches Integral y sei etwa für grosse Werthe von x positiv, sodass oberhalb einer gewissen positiven Grenze keine Nullstellen desselben mehr vorkommen. Dann besteht zufolge der Differentialgleichung (15) und der Voraussetzung (16) für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$y^{(n)} < 0. \tag{17}$$

Gäbe es nun beliebig grosse Werthe von x, für welche die Grösse $y^{(n-1)}$ negativ wäre, so müsste dieselbe, da sie wegen der Relation (17) für grosse Werthe von x beständig abnimmt, gegen einen negativen endlichen oder unendlichen Grenzwerth convergiren:

$$\lim y^{(n-1)} < 0.$$

Dann ergäbe sich aber durch mehrmalige Anwendung des Satzes (A) sofort

$$\lim y^{(n-2)} = \lim y^{(n-3)} = \cdots = \lim y' = \lim y = -\infty,$$

was der für y eingeführten Voraussetzung widerspricht. Damit ist gezeigt, dass für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$y^{(n-1)} \geqq 0 \tag{18}$$

besteht. Wegen der Relation (17) folgt hieraus, dass die Grösse $y^{(n-1)}$ sich beständig abnehmend einer nicht negativen Grenze für $x = +\infty$ annähern muss. Wäre dieselbe positiv, so ergäbe sich durch mehrmalige Benutzung des Satzes (A)

$$\lim y^{(n-2)} = \lim y^{(n-3)} = \cdots = \lim y = +\infty,$$

also wegen der Relation (16) und der Gleichung (15) nach dem Satze (B)

$$\lim y^{(n)} = -\infty;$$

daraus würde abermals nach dem Satze (A) folgen

$$\lim y^{(n-1)} = -\infty,$$

was aber der Relation (18) widerspricht. Somit ergiebt sich

(19) $$\lim y^{(n-1)} = 0.$$

9. Angenommen nun, man hätte statt der Relationen (18) und (19) die allgemeineren

(20) $$y^{(k)} \geqq 0,$$

(21) $$\lim y^{(k)} = 0, \quad 0 < k \leqq n-1,$$

deren erste für grosse Werthe von x gilt, so kann man ähnliche Relationen mit dem Index $k-1$ ableiten. Wäre noch für beliebig grosse Werthe von x die Ungleichung

$$y^{(k-1)} > 0$$

möglich, so ergäbe sich aus der Relation (20)

$$\lim y^{(k-1)} > 0,$$

und hieraus nach dem Satze (A)

$$\lim y^{(k-2)} = \lim y^{(k-3)} = \cdots = \lim y = +\infty,$$

also zufolge der Differentialgleichung (15), der Ungleichung (16) und dem Satze (B)

$$\lim y^{(n)} = -\infty,$$

und durch mehrmalige Anwendung des Satzes (A)

$$\lim y^{(n-1)} = \lim y^{(n-2)} = \cdots = \lim y^{(k)} = -\infty,$$

was der Relation (20) widerspricht. Damit ist gezeigt, dass für grosse Werthe von x immer

(22) $$y^{(k-1)} \leqq 0.$$

Jetzt berücksichtige man, dass die Grösse $y^{(k-1)}$ für grosse Werthe von x niemals abnehmen kann wegen der Ungleichung (20); es existirt also ein nicht positiver Grenzwerth $\lim y^{(k-1)}$. Wäre derselbe negativ, so ergäbe der Satz (A)

$$\lim y^{(k-2)} = \lim y^{(k-3)} = \cdots = \lim y = -\infty,$$

was der für das Vorzeichen der Grösse y getroffenen Voraussetzung widerspricht; also folgt

(23) $$\lim y^{(k-1)} = 0.$$

Aus den Formeln (20) und (21) sind also die ähnlichen (22) und (23) abzuleiten. In derselben Weise würde man aus der Annahme

$$y^{(k)} \leqq 0, \quad \lim y^{(k)} = 0$$

schliessen können

$$y^{(k-1)} \geqq 0, \quad \lim y^{(k-1)} = 0,$$

wobei die Ungleichungen nur für grosse Werthe von x zu nehmen sind.

10. Da nun die Formeln (20) und (21) für $k = n - 1$ in Nr. 8 bewiesen sind, so ergiebt die wiederholte Anwendung der in Nr. 9 erhaltenen Resultate folgende Relationen

$$(24) \qquad \lim y^{(n-1)} = \lim y^{(n-2)} = \cdots = \lim y' = \lim y = 0,$$

$$(25) \qquad y^{(n-1)} \geqq 0, \quad y^{(n-2)} \leqq 0, \quad y^{(n-3)} \geqq 0, \cdots$$

letztere für grosse Werthe von x mit beständiger Abwechslung der Zeichen $\gtrless$. Welches dieser Zeichen in der letzten, y enthaltenden Formel (25) auftritt, hängt offenbar nur davon ab, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist; im ersteren Falle hätte man

$$y'' \leqq 0, \quad y' \geqq 0, \quad y \leqq 0,$$

was unsrer Voraussetzung widerspricht, dass für grosse Werthe von x die Grösse y positiv sein sollte. Ist also n eine gerade Zahl, so kann die Differentialgleichung (15) nur oscillatorische Integrale besitzen, da die Annahme, es existire ein nicht oscillatorisches, auf einen Widerspruch geführt hat.

Die hiermit erhaltenen Ergebnisse formuliren wir in folgendem Theorem.

Wenn die Function $f(x)$ für grosse Werthe von x endlich und stetig ist und die Ungleichung

$$\lim_{x=+\infty} f(x) > 0$$

besteht, so hat die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + y f(x) = 0$$

bei geraden Werthen von n nur oscillatorische Integrale d. h. jedes sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endliche und stetige Integral muss noch oberhalb jeder positiven Grenze Nullstellen besitzen.

Ist n eine ungerade Zahl und das Integral y nicht oscillatorisch, so bestehen die Gleichungen

$$\lim_{x=+\infty} y^{(n)} = \lim_{x=+\infty} y^{(n-1)} = \cdots = \lim_{x=+\infty} y' = \lim_{x=+\infty} y = 0$$

und für grosse Werthe von x sind die Grössen $y, y', \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}$ abwechselnd beständig positiv und beständig negativ.

IV.

11. Das erhaltene Resultat kann nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinert werden. Wir betrachten zunächst statt der binomischen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[g_{n-1}\frac{d}{dx}\left\{g_{n-2}\frac{d}{dx}\left(g_{n-3}\cdots\frac{d}{dx}\left(g_1\frac{dy}{dx}\right)\cdots\right)\right\}\right]+yf(x)=0,$$

welche genauer in folgender Weise definirt wird. Man setze für jeden Werth von k

$$Y_k = g_k(x)\frac{dY_{k-1}}{dx}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

ferner

$$Y_0 = y, \qquad Y_n = \frac{dY_{n-1}}{dx},$$

dann lautet die gegebene Gleichung

$$(26) \qquad Y_n + yf(x) = 0;$$

dabei seien $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$ $g_{n-1}(x)$ für grosse Werthe des Arguments endliche und stetige Functionen von x. Dann lassen sich die Entwicklungen des vorigen Abschnitts auf die Gleichung (26) im Wesentlichen übertragen, wenn man folgende Voraussetzungen einführt:

$$(27) \quad \lim f(x) > 0, \quad \lim\frac{1}{g_k(x)} > 0, \quad (k = 1, 2, \ldots n-1).$$

Wäre nämlich y ein nicht oscillatorisches, etwa für grosse Werthe von x stets positives Integral, von dem wir ferner annehmen, es sei sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig, so wäre der Differentialgleichung (26) zufolge die Grösse Y_n oder, was dasselbe ist, $\frac{dY_{n-1}}{dx}$ für grosse Werthe von x stets negativ, sodass für diese Werthe Y_{n-1} eine stets abnehmende Function ist. Könnte dieselbe nun oberhalb jeder positiven Grenze noch negativ werden, so hätte man $\lim Y_{n-1} < 0$ oder

$$\lim\left\{g_{n-1}(x)\frac{dY_{n-2}}{dx}\right\} < 0,$$

woraus nach einer der Formeln (27) und dem Satze (B) folgen würde

$$\lim\frac{1}{g_{n-1}(x)}\cdot\lim\left\{g_{n-1}(x)\frac{dY_{n-2}}{dx}\right\} < 0, \quad \lim\frac{dY_{n-2}}{dx} < 0.$$

Hieraus ergäbe sich nach dem Satze (A)

$$\lim Y_{n-2} = -\infty = \lim\left\{g_{n-2}(x)\frac{dY_{n-3}}{dx}\right\};$$

dann abermals nach dem Satze (B) und einer Formel (27)

$$\lim\frac{1}{g_{n-2}(x)}\cdot\lim\left\{g_{n-2}(x)\frac{dY_{n-3}}{dx}\right\} = \lim\frac{dY_{n-3}}{dx} = -\infty,$$

und nach dem Satze (A)

$$\lim Y_{n-3} = -\infty.$$

So fortschliessend erhielte man die Gleichungen

$$\lim Y_{n-2} = \lim Y_{n-3} = \cdots = \lim Y_1 = \lim Y_0 = \lim y = -\infty,$$

was aber der für das Zeichen der Grösse y getroffenen Festsetzung widerspricht. Für grosse Werthe von x ist also nothwendig

$$(28) \qquad Y_{n-1} \geqq 0.$$

12. Weiss man allgemeiner, dass für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$(29) \qquad Y_k \geqq 0$$

besteht, so kann man eine entsprechende Formel für Y_{k-1} ableiten. Könnte diese Grösse nämlich oberhalb jeder positiven Grenze noch positive Werthe annehmen, so müsste sie wegen der Gleichung

$$\frac{dY_{k-1}}{dx} = \frac{Y_k}{g_k(x)}$$

und der Formel (29) beständig zunehmen oder doch nicht abnehmen für grosse Werthe von x, woraus sich ergeben würde

$$\lim Y_{k-1} > 0, \qquad \lim \left\{ g_{k-1}(x) \frac{dY_{k-2}}{dx} \right\} > 0.$$

Hieraus könnte man genau so wie bei der entsprechenden Entwicklung in Nr. 11 vermittelst der Formeln (27) und der Sätze (A) und (B) schliessen:

$$\lim Y_{k-2} = \lim Y_{k-3} = \cdots = \lim Y_1 = \lim y = +\infty,$$

also wegen der Differentialgleichung (26)

$$\lim Y_n = \lim \frac{dY_{n-1}}{dx} = -\infty,$$

was aber wegen des Satzes (A) mit der Formel (28) nicht zu vereinbaren ist. Für grosse Werthe von x besteht demnach die Ungleichung

$$(30) \qquad Y_{k-1} \leqq 0$$

bei Annahme der Formel (29).

Weiss man andrerseits, dass für grosse Werthe von x die Formel

$$Y_k \leqq 0$$

besteht, so würde sich für dieselben Werthe des Arguments ergeben

$$Y_{k-1} \geqq 0$$

in derselben Weise, wie die Formel (30) aus der Formel (29) abgeleitet wurde. Da nun letztere für $k = n - 1$ in Nr. 11 bewiesen ist, so sind die Grössen

$$Y_n, \; Y_{n-1}, \; \ldots \; Y_1, \; Y_0 = y$$

für grosse Werthe von x abwechselnd beständig negativ und beständig positiv; bei geraden Werthen der Zahl n hätten also die Grössen Y_n

und y dasselbe Zeichen, was offenbar der Differentialgleichung (26) widerspricht. Da somit die Annahme, es existire ein nicht oscillatorisches Integral der Differentialgleichung (26), auf einen Widerspruch geführt hat, so kann man das in Nr. 10 aufgestellte Theorem dahin erweitern,

dass auch die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left[g_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left\{g_{n-2}(x)\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(g_1(x)\frac{dy}{dx}\right)\cdots\right)\right\}\right]+yf(x)=0$$

bei der Voraussetzung

$$\lim_{x=+\infty} f(x)>0, \qquad \lim_{x=+\infty}\frac{1}{g_k(x)}>0 \qquad (k=1,2,\ldots n-1)$$

nur oscillatorische Integrale besitzt, wenn n eine gerade Zahl ist.

Auch der auf ungerade Werthe von n bezügliche Theil des citirten Theorems kann leicht auf den soeben behandelten allgemeineren Fall ausgedehnt werden.

13. Eine noch weitere Verallgemeinerung, auf die nur eben hingewiesen werden möge, ergiebt sich unmittelbar, wenn man beachtet, dass in den Nrn. 11 und 12 die lineare Form der gegebenen Differentialgleichung nur dazu dient, zu zeigen, dass für grosse Werthe von x ein positiver oder negativer Werth von y einen negativen bezw. positiven Werth von Y_n ergiebt, und dass einem für $x=+\infty$ unbegrenzt wachsenden Werthe der Grösse y ein ebensolcher der Grösse Y_n entspricht. Auf Differentialgleichungen, bei welchen diese Beziehungen zwischen y und Y_n erhalten bleiben, kann man demnach die obigen Entwicklungen übertragen, z. B. auf die Gleichung

$$Y_n+yf_1(x)+y^3f_2(x)+y^5f_3(x)+\cdots=0,$$

in welcher die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... denselben Bedingungen unterworfen sind wie oben $f(x)$, und Y_n wie bisher definirt ist.

14. Eine andere Erweiterung des Satzes in Nr. 12 ergiebt die einfache Substitution

$$x=t^\lambda, \qquad \lambda>0.$$

Führt man die Variable t in die Grössen y, Y ein, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
Y_1&=\frac{1}{\lambda}\,g_1(t^\lambda)\,t^{1-\lambda}\,\frac{dy}{dt},\\
Y_k&=\frac{1}{\lambda}\,g_k(t^\lambda)\,t^{1-\lambda}\,\frac{dY_{k-1}}{dt},\\
Y_n&=\frac{1}{\lambda}\,t^{1-\lambda}\,\frac{dY_{n-1}}{dt},\\
Y_n&+yf(t^\lambda)=0.
\end{aligned}$$

Setzt man also allgemein

$$\gamma_k'(t) = \frac{1}{\lambda} g_k(t^\lambda)\, t^{1-\lambda}, \quad \lambda t^{\lambda-1} f(t^\lambda) = \varphi(t)$$

so hat man das Gleichungssystem

$$Y_1 = \gamma_1(t) \frac{dy}{dt}, \quad Y_k = \gamma_k(t) \frac{dY_{k-1}}{dt}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

und die Differentialgleichung

$$\text{(31)} \qquad \frac{dY_{n-1}}{dt} + y\,\varphi(t) = 0,$$

in einer Form, die aus der Gleichung (26) hervorgeht, indem man nur die Zeichen x, g, f durch t, γ, φ ersetzt. Für die Differentialgleichung (30) gilt also das Theorem in Nr. 12, wenn die Functionen γ, φ für grosse Werthe von t stetig sind, und folgende Ungleichungen bestehen:

$$\text{(32)} \qquad \lim_{t=+\infty} \varphi(t) > 0, \quad \lim_{t=+\infty} \frac{1}{\gamma_k(t)} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots n-1.$$

15. Diesen Bedingungen wird genügt, sobald die Functionen f, g dieselben Stetigkeitseigenschaften haben wie bisher, den Beschränkungen (27) aber nicht in vollem Umfange unterworfen sind. Statt dieser führen wir folgende allgemeinere Relationen ein:

$$\lim \left(x^\alpha f(x)\right) > 0, \quad \lim \frac{x^{\beta_k}}{g_k(x)} > 0, \quad \alpha \geqq 0, \ \beta_k \geqq 0.$$

Dann besteht offenbar die Gleichung

$$\lim_{t=+\infty} \frac{1}{\gamma_k(t)} = \lim_{t=+\infty} \frac{\lambda t^{\lambda-1}}{g_k(t^\lambda)} = \lim_{t=+\infty} \frac{\lambda x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{g_k(x)}$$

wobei für die Potenz mit gebrochenem Exponenten natürlich ihr reeller Werth zu nehmen ist; die Bedingungsgleichung

$$\lim_{t=+\infty} \frac{1}{\gamma_k(t)} > 0$$

ist also dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\text{(33)} \qquad \frac{\lambda - 1}{\lambda} \geqq \beta_k.$$

Ebenso hat man

$$\lim_{t=+\infty} \varphi(t) = \lim_{t=+\infty} \lambda t^{\lambda-1} f(t^\lambda) > 0,$$

sobald die Ungleichung

$$\text{(34)} \qquad \frac{\lambda - 1}{\lambda} \geqq \alpha$$

besteht.

Aus den Formeln (33) und (34) folgt zunächst, dass α und β_k

positive echte Brüche sein müssen; sind sie als solche beliebig gegeben, so kann eine positive Grösse λ so bestimmt werden, dass die genannten beiden Ungleichungen bestehen; dazu genügt es, dass der reciproke Werth $1:\lambda$ kleiner sei als die kleinste der Differenzen $1-\alpha$, $1-\beta_k$. Ist die Grösse λ in dieser Weise bestimmt, so bestehen die Ungleichungen (32), und die Differentialgleichung (31) hat nach Nr. 12 nur oscillatorische Integrale. Dasselbe gilt dann von der Gleichung (26), durch deren Transformation die Gleichung (31) erhalten wurde. Damit ist das folgende gegenüber Nr. 12 allgemeinere Theorem bewiesen:

Sind in der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left[g_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left\{g_{n-2}(x)\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(g_1(x)\frac{dy}{dx}\right)\cdots\right)\right\}\right]+yf(x)=0$$

die Functionen f, g für grosse Werthe von x endlich stetig und positiv, ist n eine gerade Zahl, und bestehen die Ungleichungen

$$0\leqq\alpha<1,\quad 0\leqq\beta_k<1,\quad (k=1,2,\ldots n-1)$$

$$\lim_{x=+\infty}\left(x^\alpha f(x)\right)>0,\qquad \lim_{x=+\infty}\frac{x^{\beta_k}}{g_k(x)}>0,$$

so ist jedes sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endliche und stetige Integral y oscillatorisch, d. h. es besitzt reelle Nullstellen oberhalb jeder positiven Grenze.

V.

16. Um für Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung den Fall $\lim f(x)=0$ in weiterem Umfang untersuchen zu können, als im Abschnitt IV geschehen ist, müssen eine Reihe einfacher Hülfssätze aus der Differentialrechnung vorausgeschickt werden.

Die Function $\varphi(x)$ sei für grosse Werthe von x sammt ihrer Ableitung $\varphi'(x)$ endlich und stetig, und nähere letztere sich für $x=+\infty$ einer bestimmten, endlichen oder unendlichen Grenze. Dann besteht, sobald x und x_0 hinlänglich grosse Werthe bedeuten, von denen der zweite der kleinere sei, die Gleichung

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=(x-x_0)\,\varphi'(\xi)$$

wobei man hat

$$x_0\leqq\xi\leqq x.$$

Wenn nun zunächst $\lim\varphi'(x)=g$ eine endliche Grösse und ε ein beliebig klein gegebener positiver Werth ist, so fixire man x_0 so gross, dass für alle Werthe der Variabeln x, welche nicht kleiner als x_0 sind, der Werth $\varphi'(x)$ zwischen die Grenzen $g\pm\varepsilon$ fällt. Dann gehört diesem Intervall auch der Werth $\varphi'(\xi)$ an, wie gross auch immer das Argument x gewählt werden möge. Man kann nun eine positive Grösse $\gamma > x_0$ so wählen, dass für alle Werthe der Variabeln x, die nicht kleiner als γ sind, der Bruch $(x - x_0) : x$ von der Einheit so wenig wie man will verschieden und die Grösse $\varphi(x_0) : x$ beliebig klein ist; dann liegt die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x_0)}{x} + \frac{x - x_0}{x} \varphi'(\xi)$$

in einem Intervall, welches von dem durch $g \pm \varepsilon$ begrenzten so wenig wie man will verschieden ist. Für $x \geqq \gamma$ unterscheidet sich also, da ε beliebig klein gegeben war, die linke Seite so wenig wie man will von g, d. h. es ist

$$\lim \frac{\varphi(x)}{x} = g = \lim \varphi'(x),$$

womit gleichzeitig die Existenz und die Grösse des links stehenden Grenzwerthes nachgewiesen ist.

Hat man abweichend von der bisherigen Voraussetzung

$$\lim \varphi'(x) = +\infty,$$

so braucht in obiger Argumentation nur an Stelle des durch $g \pm \varepsilon$ begrenzten ein Intervall zu treten, das von einem beliebig gross gegebenen Werth η bis $+\infty$ reicht; analoges gilt für $\lim \varphi'(x) = -\infty$. Damit ist das folgende von den Herren Rouquet und Stolz (Math. Annalen Bd. XV, S. 556) auf andere Art erhaltene Resultat bewiesen.

Erstes Lemma. Ist die Function $\varphi(x)$ sammt ihrer ersten Ableitung $\varphi'(x)$ für grosse Werthe des Arguments endlich und stetig und hat letztere bei unbegrenzt wachsenden Werthen von x einen bestimmten Grenzwerth, so gilt dasselbe vom Quotienten $\varphi(x) : x$ und es besteht die Gleichung

$$\lim \varphi'(x) = \lim \frac{\varphi(x)}{x}.$$

17. Hieraus ergiebt sich nach der von Herrn Stolz a. a. O. angegebenen Beweismethode folgendes

Zweites Lemma. Sind die Functionen $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ sammt ihren ersten Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig, convergirt ferner der Quotient $\psi'(x) : \vartheta'(x)$ bei unbegrenzt wachsenden Werthen von x gegen einen bestimmten Grenzwerth, die Function $\vartheta(x)$ aber beständig wachsend gegen den Grenzwerth $+\infty$, indem ihre Ableitung für grosse Werthe von x positiv bleibt, so existirt auch für $x = +\infty$ ein bestimmter Grenzwerth des Quotienten $\psi(x) : \vartheta(x)$ und es ist

$$\lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}.$$

Denn zufolge der über das Wachsthum der Function $\vartheta(x)$ getroffenen Festsetzung kann, wenn man $y = \vartheta(x)$ setzt, für grosse Werthe von y

auch umgekehrt die Variable x als eindeutige Function von y betrachtet werden, die nebst ihrer Ableitung stetig ist; setzt man etwa $x = \chi(y)$, so ist

$$(35) \qquad \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\psi\big(\chi(y)\big)}{y} = \frac{\varphi(y)}{y},$$

wobei die Function $\varphi(y)$ sowie ihre Ableitung

$$\varphi'(y) = \psi'\big(\chi(y)\big)\,\chi'(y)$$

für grosse Werthe von y endlich und stetig ist. Da nun wegen der Gleichung

$$(36) \qquad \varphi'(y) = \frac{\psi'\big(\chi(y)\big)}{\vartheta'(x)} = \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}$$

ein Grenzwerth $\lim\limits_{y=+\infty} \varphi'(y)$ existirt, so ist nach dem ersten Lemma

$$\lim_{y=+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} = \lim_{y=+\infty} \varphi'(y),$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (35) und (36)

$$\lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}.$$

18. Drittes Lemma. Ist die Function $\varphi(x)$ nebst ihrer ersten Ableitung für kleine nicht negative Werthe von x endlich und stetig und ist

$$\lim_{x=+0} \varphi(x) = 0,$$

so besteht die Gleichung

$$\lim_{x=+0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x=+0} \varphi'(x) = \varphi'(0).$$

Von diesem evidenten Satze ausgehend beweisen wir nach der in Nr. 17 angewandten Methode folgendes

Viertes Lemma. Es seien $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ zwei Functionen, welche sammt ihren ersten Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig sind und den Gleichungen

$$\lim \psi(x) = \lim \vartheta(x) = 0$$

genügen; die Function $\vartheta'(x)$ sei für grosse Werthe von x beständig negativ. Es existire ferner ein bestimmter Grenzwerth $\lim\,[\psi'(x) : \vartheta'(x)]$; dann giebt es auch für $x = +\infty$ einen bestimmten Grenzwerth des Quotienten $\psi(x) : \vartheta(x)$ und es ist

$$\lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}.$$

Denn setzt man
$$\vartheta(x) = y, \quad x = \chi(y),$$
so ist für alle hinreichend kleinen positiven Werthe von y die Function $\chi(y)$ endlich, eindeutig und stetig; dasselbe gilt von ihrer ersten Ableitung
$$\chi'(y) = \frac{1}{\vartheta'(x)}.$$
Setzt man ferner

(37) $$\psi(x) = \psi\big(\chi(y)\big) = \varphi(y), \quad \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\varphi(y)}{y},$$

so ist offenbar φ eine Function derselben Beschaffenheit wie χ und es besteht die Gleichung
$$\lim \psi(x) = \lim_{y=+0} \varphi(y) = 0.$$
Ebenso ist auch die Grösse

(38) $$\varphi'(y) = \psi'\big(\chi(y)\big)\,\chi'(y) = \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}$$

für hinreichend kleine positive Werthe der Variabeln y endlich, stetig und eindeutig und hat, da die Grenzübergänge $x = +\infty$ und $y = +0$ einander bedingen, für $y = +0$ einen bestimmten Grenzwerth. Man kann demnach auf die Function $\varphi(y)$ das dritte Lemma anwenden; es existirt der Grenzwerth
$$\lim_{y=+0} \frac{\varphi(y)}{y} = \lim_{y=+0} \varphi'(y).$$
Daraus folgt auf Grund der Gleichungen (37) und (38)
$$\lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)} = \lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)},$$
womit zugleich die Existenz des Grenzwerthes rechts nachgewiesen ist.

VI.

19. Die bewiesenen Hülfssätze gestatten nun, über die Integrale der Gleichung

(39) $$y^{(n)} + y f(x) = 0$$

Sätze von derselben Form wie in den Abschnitten III und IV für gewisse dort noch ausgeschlossene Fälle abzuleiten. Es sei wiederum $f(x)$ eine für grosse Werthe von x endliche, stetige und positive Function, und es sei
$$\lim f(x) = 0.$$
In den früheren Abschnitten ist der Fall behandelt, dass die Function $f(x)$ in geringerer als der ersten Ordnung unendlich klein wird für $x = +\infty$; jetzt möge allgemeiner angenommen werden, dass sie

verschwindet wie irgend eine Potenz von x mit negativem Exponenten; es sei etwa a eine positive Constante und

$$f(x) = \frac{a}{x^\sigma}\big(1 + \varepsilon(x)\big), \quad \lim \varepsilon(x) = 0, \quad \sigma > 0.$$

Wir untersuchen dann wie früher die Consequenzen, die man aus der Annahme eines nicht oscillatorischen Integrals der Gleichung (39) ziehen kann.

Ein solches Integral sei y; d. h. dasselbe sei für grosse Werthe von x etwa beständig positiv, endlich und stetig; letztere beide Eigenschaften seien auch für die ersten n Ableitungen von y vorausgesetzt. Dann muss auch jede der Ableitungen $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ für grosse Werthe von x ein constantes Zeichen bewahren; denn kämen bei einer dieser Grössen noch oberhalb jeder positiven Grenze Nullstellen vor, so läge zwischen je zwei aufeinanderfolgenden derselben nach dem Theorem von Rolle eine Nullstelle ihrer Ableitung; diese wäre also ebenfalls oscillatorischen Charakters, das gleiche gälte von ihrer Ableitung u. s. f., schliesslich auch von $y^{(n)}$, während doch aus der Differentialgleichung (39) evident ist, dass diese Grösse für grosse Werthe von x negativ ist. Jede der Grössen $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ hat also eine Ableitung, deren Vorzeichen für grosse Werthe von x constant ist; daraus folgt unmittelbar die Existenz der Grenzwerthe

$$\lim y, \ \lim y', \ \lim y'', \dots \lim y^{(n-1)}.$$

20. Jetzt sei r eine der Zahlen $0, 1, 2, n-1$; aus der Existenz des $\lim y^{(r)}$ folgt dann für $r > 0$ nach dem zweiten Lemma, indem man

$$\psi(x) = y^{(r-1)}, \qquad \vartheta(x) = x$$

setzt,

$$\lim y^{(r)} = \lim \frac{y^{(r-1)}}{x}.$$

Setzt man weiter im zweiten Lemma

$$\psi(x) = y^{(r-2)}, \quad \vartheta(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

so ergiebt sich

$$\lim y^{(r)} = \lim \frac{y^{(r-1)}}{x} = \lim \frac{y^{(r-2)}}{\frac{1}{2}x^2};$$

ebenso fortschreitend erhält man für jede ganze Zahl k, die nicht grösser als r ist,

$$\lim y^{(r)} = \lim \frac{x^{(r-k)}k!}{x^k} = \lim \frac{y\,r!}{x^r},$$

wobei stets auch die Existenz der neu auftretenden Grenzwerthe durch das zweite Lemma gewährleistet wird. Mit Berücksichtigung der Gleichung (39) erhält man endlich

$$(40)\qquad \lim y^{(r)} = -\lim \frac{a r!\, y^{(n)}}{x^{r-\sigma}},$$

eine Formel, die offenbar für $r = 0$ gültig bleibt.

Wenn speciell σ eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ ist, so kann man in dieser Gleichung $r = \sigma$ setzen; sie wird dann

$$\lim y^{(r)} = -\lim (a r!\, y^{(n)}),$$

woraus die Existenz von $\lim y^{(n)}$ folgt.

Dasselbe Resultat ergiebt sich aber für beliebige Werthe von σ, die der Ungleichung

$$(41)\qquad 1 \leqq \sigma < n$$

genügen. Man kann dann setzen

$$\sigma = s + \varrho, \qquad 0 \leqq \varrho < 1,$$

wenn s eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ ist, und die Gleichung (40) ergiebt

$$\lim y^{(s)} = -a s! \lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}}.$$

Da nun $1-\varrho$ eine positive Zahl, also $x^{1-\varrho}$ eine beständig mit x zunehmende Function ist, deren Ableitung nicht verschwindet, so kann man im zweiten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-1)}, \quad \vartheta(x) = \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho},$$

und erhält dann

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = (1-\varrho) \lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{1-\varrho}}.$$

Ebenso indem man

$$\psi(x) = y^{(n-2)}, \quad \vartheta(x) = \frac{x^{2-\varrho}}{2-\varrho}$$

setzt, ergiebt sich

$$\lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{1-\varrho}} = (2-\varrho) \lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{2-\varrho}};$$

so kann man fortschliessen, indem immer auch die Existenz der neu auftretenden Grenzwerthe durch das zweite Lemma gesichert ist; schliesslich ergiebt sich

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = (1-\varrho) \lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{1-\varrho}} = (1-\varrho)(2-\varrho) \lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{2-\varrho}} = \cdots$$

$$= (1-\varrho)(2-\varrho) \cdots (n-\varrho) \lim \frac{y}{x^{n-\varrho}},$$

also mit Benutzung der Differentialgleichung (34)

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = -a(1-\varrho)(2-\varrho) \cdots (n-\varrho) \lim \frac{y^{(n)}}{x^{n-\sigma-\varrho}}.$$

Da nun rechts alle eingeklammerten Factoren positiv sind ebenso wie a, so sind die Grenzwerthe rechts und links entgegengesetzten Zeichens; die Grössen, die gegen sie convergiren sind aber positiv; beides ist nur dadurch zu vereinigen, dass die Grenzwerthe $=0$ sind. Man hat demnach

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = 0,$$

und, da ϱ eine positive Grösse ist, a fortiori

$$(42) \qquad \lim y^{(n)} = 0$$

21. Ersetzt man jetzt die Voraussetzung (41) durch die engere

$$(43) \qquad 1 \leqq \sigma \leqq n - 1,$$

so kann man in der Formel (40) annehmen $r \geqq \sigma$; dann convergirt der Bruch $y^{(n)} : x^{r-\sigma}$ gegen Null für $x = +\infty$, und die Formel (40) ergiebt

$$(44) \qquad \lim y^{(r)} = 0, \qquad r \geqq \sigma.$$

Nimmt man weiter an

$$r < \sigma, \quad 0 < \sigma - r \leqq 1,$$

so reducirt sich das Integral

$$\int x^{r-\sigma} dx$$

entweder auf $\lg x$, oder auf eine Potenz von x mit positivem gebrochenem Exponenten, convergirt also jedenfalls mit wachsenden Werthen von x gegen den Grenzwerth $+\infty$, während ihre Ableitung positiv bleibt; man kann also im zweiten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-1)}, \quad \vartheta(x) = \int x^{r-\sigma} dx$$

und erhält demgemäss

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = \lim \frac{y^{(n-1)}}{\int x^{r-\sigma} dx}.$$

Nun ergiebt sich aus der Formel (44) bei der Annahme (43) stets

$$\lim y^{(n-1)} = 0$$

also folgt

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = 0$$

und wegen der Formel (40)

$$\lim y^{(r)} = 0, \qquad 0 < \sigma - r \leqq 1.$$

Bei der Annahme (43) *hat man also*

$$\lim y^{(r)} = 0$$

sobald die Ungleichung

$$\sigma - r \leqq 1$$

besteht.

22. Ganz anders gestaltet sich die Untersuchung des Falles $\sigma - r > 1$. Dann ist $x^{r-\sigma+1}$ eine bei wachsenden Werthen von x beständig abnehmende und gegen Null convergirende Function; ferner hat man nach Nr. 21

$$\lim y^{(n-1)} = 0,$$

und der $\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}}$ ist nach Gleichung (40) bestimmt; man kann also im vierten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-1)}, \qquad \vartheta(x) = x^{r-\sigma+1}$$

und erhält dann die Gleichungen

$$\lim \frac{y^{(n)}}{(r-\sigma+1)\,x^{r-\sigma}} = \lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{r-\sigma+1}},$$

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = (r-\sigma+1) \lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{r-\sigma+1}}.$$

Wenn nun auch $r - \sigma + 2$ noch eine negative Zahl ist und

$$n - 2 \geqq \sigma - 1,$$

so hat man nach Nr. 21

$$\lim y^{(n-2)} = 0, \quad \lim x^{r-\sigma+2} = 0$$

und die letztere Function hat eine für grosse Werthe von x negative Ableitung; man kann also im vierten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-2)}, \quad \vartheta(x) = x^{r-\sigma+2}$$

und erhält dann, da $\lim (y^{(n-1)} : x^{r-\sigma+1})$ eine bestimmte Grösse ist,

$$\lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{r-\sigma+2}} = (r-\sigma+2) \lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{r-\sigma+2}},$$

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = (r-\sigma+1)(r-\sigma+2) \lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{r-\sigma+2}}.$$

In dieser Weise fortschliessend erhält man die allgemeine Formel

$$(45) \quad \lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = (r-\sigma+1)(r-\sigma+2)\cdots(r-\sigma+k) \lim \frac{y^{(n-k)}}{x^{r-\sigma+k}}$$

unter den Bedingungen

$$(46) \qquad n - k \geqq \sigma - 1, \quad r - \sigma + k < 0,$$

die für die Anwendbarkeit des vierten Lemmas wesentlich sind.

Wir untersuchen nun, bei welchem Werthe k die Bedingungen (46) zum letzten Mal beide erfüllt sind. Setzt man, unter s eine positive ganze Zahl verstehend,

$$\sigma = s + \varrho, \qquad 0 \leqq \varrho < 1,$$

so ist unter der Voraussetzung $\varrho > 0$ die zweite Bedingung (46)

$$r - s + k - \varrho < 0$$

zum letzten Male erfüllt, wenn

$$r - s + k = 0, \quad k = s - r = k_1$$

wenn aber $\varrho = 0$, so ist sie zum letzten Male erfüllt für den Werth

$$k = k_1 = s - r - 1, \quad r - s + k_1 = -1.$$

Es fragt sich, ob für diese Werthe von k die erste Bedingung (46) erfüllt ist. Dies fordert im Falle $\varrho > 0$ die Ungleichung

$$n - s + r \geqq s + \varrho - 1$$

also, da links eine ganze Zahl steht,

$$n - s + r > s - 1; \tag{47}$$

im Falle $\varrho = 0$ erhält man

$$n - s + r + 1 \geqq s - 1. \tag{48}$$

Diese beiden Ungleichungen bestehen aber wirklich für alle Werthe $r = 0, 1, 2, \ldots$, wenn man voraussetzt, was von jetzt an geschehen soll

$$n \geqq 2\sigma; \tag{49}$$

denn hieraus folgt für $\varrho > 0$ die Ungleichung

$$n \geqq 2s + 2\varrho, \qquad n > 2s,$$

womit die Formel (47) bewiesen ist; im Falle $\varrho = 0$ aber hat man

$$s = \sigma, \quad n > 2s - 2,$$

womit die Formel (48) gesichert ist. Dabei ist für $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} n - k_1 &= n - s + r \\ &\geqq 2\sigma - s + r \\ &\geqq \sigma + \varrho + r, \quad n - k_1 - 1 \geqq \sigma - 1 \end{aligned}$$

und für $\varrho = 0$

$$\begin{aligned} n - k_1 &= n - s + r + 1 \\ &\geqq \sigma + r + 1, \quad n - k_1 - 1 \geqq \sigma; \end{aligned}$$

nach Nr. 21 hat man also in beiden Fällen

$$\lim y^{(n-k_1-1)} = 0. \tag{50}$$

23. Die Formel (45) für $k = k_1$ ergiebt nun die Bestimmtheit des Grenzwerthes

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}};$$

der Exponent des Nenners ist hier zufolge den obigen Werthen von k_1 entweder $= -1$ oder $= -\varrho$, je nachdem man hat $\varrho = 0$ oder $\varrho > 0$. Im ersten Falle ergiebt sich jetzt aus dem zweiten Lemma

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}} = \lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{-1}} = \lim \frac{y^{(n-k_1-1)}}{\lg x},$$

da die Function $\lg x$ offenbar die Eigenschaften der in dem genannten

Lemma auftretenden Function $\vartheta(x)$ besitzt. Im Falle $\varrho > 0$ hat man dagegen

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}} = \lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{-\varrho}} = \lim \frac{(1-\varrho)\, y^{(n-k_1-1)}}{x^{1-\varrho}}$$

ebenfalls auf Grund des zweiten Lemmas, da $x^{1-\varrho}$ eine mit x unbegrenzt zunehmende Function ist. Mit Berücksichtigung der Gleichung (50) folgt in beiden Fällen

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}} = 0$$

also auf Grund der für $k = k_1$ genommenen Formel (45)

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = 0,$$

oder mit Benutzung der für jeden Werth von r gültigen Formel (40)

$$\lim y^{(r)} = 0.$$

Verbindet man hiermit das in Nr. 21 formulirte Resultat, so sieht man, *dass bei der Annahme* (49) *die folgenden Gleichungen bestehen*

$$\lim y^{(n)} = \lim y^{(n-1)} = \cdots = \lim y' = \lim y = 0.$$

Bedenkt man nun, dass nach Nr. 19 jede der Grössen $y, y', \ldots y^{(n}$ für grosse Werthe von x ein constantes Vorzeichen besitzt, dass also die ersten n unter ihnen entweder beständig abnehmen oder beständig zunehmen müssen bei wachsenden Werthen des Arguments, so sieht man leicht, dass für grosse Werthe von x die Grössen der Reihe $y, y', \ldots y^{(n)}$ abwechselnd positiv und negativ sein müssen. Denn nach Voraussetzung ist die Function y für grosse Werthe von x positiv, muss also beständig abnehmen, da sie gegen den Grenzwerth Null convergirt; somit ist y' negativ, muss also beständig zunehmend gegen Null convergiren u. s. f. Bei geraden Werthen der Zahl n muss die höchste Ableitung $y^{(n)}$ sich demnach als positiv erweisen, während sie doch der Differentialgleichung (39) zufolge negativ ist. Unter unsern Voraussetzungen hat also die Annahme, es existire ein nicht oscillatorisches Integral der Differentialgleichung, auf einen Widerspruch geführt. Dieses Resultat kann in folgender Weise formulirt werden, indem der auf den Fall $\sigma < 1$ bezügliche Theil des Theorems in Nr. 15 reproducirt wird.

Ist in der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + y\, f(x) = 0,$$

die Function $f(x)$ *für grosse Werthe von* x *endlich und stetig und hat das Product* $x^\sigma f(x)$ *einen endlichen positiven Grenzwerth für* $x = +\infty$, *wobei die Ungleichung*

$$n \geqq 2\sigma > 0$$

bestehe, so ist bei geraden Werthen der Zahl n jedes Integral der Differentialgleichung, welches sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig ist, oscillatorischen Charakters, d. h. es verschwindet noch für positive Werthe des Arguments, die jede Grenze übersteigen.

Bei ungeraden Werthen von n bestehen für jedes nicht oscillatorische Integral y die Gleichungen

$$\lim_{x=+\infty} y = \lim_{x=+\infty} y' = \cdots = \lim_{x=+\infty} y^{(n)} = 0.$$

Dorpat, September 1892.