

19.

Ueber die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung.

(Von Herrn Prof. C. D. Jacobi zu Königsberg in Preussen.)

1.

Die Aufgabe, eine Oberfläche der zweiten Ordnung auf ihr Hauptaxensystem zu beziehen, fordert bekanntlich einen Ausdruck von der Form:

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines Punctes bedeuten, durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems in einen Ausdruck von der Form:

$$L\xi\xi + Mvv + N\zeta\zeta$$

zu transformiren. Ich werde im Folgenden voraussetzen, daß das ursprüngliche Coordinatensystem, in Bezug auf welches die Gleichung der Oberfläche gegeben ist, ein schiefwinkliges sei. Das Problem, in dieser Allgemeinheit gefaßt, umfaßt die beiden Fälle, wo das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges oder ein schiefwinkliges conjugirtes ist, welche beide schon früher behandelt sind.

2.

Die Relation zwischen den alten Coordinaten x, y, z und den neuen ξ, v, ζ sei durch die Gleichungen gegeben:

$$\text{I. } \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ v = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ \zeta = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Das System der ξ, v, ζ ist ein rechtwinkliges; die Axen des Systems der x, y, z sollen mit einander die Winkel λ, μ, ν , und zwar die Axen der y und z den Winkel λ , die Axen der z und x den Winkel μ , die Axen der x und y den Winkel ν bilden. Man hat demnach zwischen den 9 eingeführten Coefficienten die 6 Gleichungen:

$$\text{II. } \begin{cases} (1) \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = 1, & (4) \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = \cos\lambda, \\ (2) \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' = 1, & (5) \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = \cos\mu, \\ (3) \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = 1, & (6) \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = \cos\nu. \end{cases}$$

Will man aus den Gleichungen I. x, y, z durch ξ, v, ζ ausdrücken, so hat man hierzu, wenn man der Kürze halber

$\Pi = \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \alpha\beta''\gamma' - \beta\gamma''\alpha' - \gamma\alpha''\beta'$
setzt, die Gleichungen:

$$\text{III. } \begin{cases} \Pi x = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\xi + (\beta''\gamma - \beta\gamma')v + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)\zeta, \\ \Pi y = (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')\xi + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha')v + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\zeta, \\ \Pi z = (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\xi + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')v + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\zeta. \end{cases}$$

Giebt man den Axen der x, y, z beliebige Länge, so bedeutet bekanntlich Π den Inhalt des zwischen diesen Axen beschriebenen Parallelepipeds, dividirt durch das Product aus den drei Axen. Es ist daher Π bekannt, und zwar hat man

$$\begin{aligned} \Pi\Pi &= 1 - \cos\lambda\cos\lambda - \cos\mu\cos\mu - \cos\nu\cos\nu + \cos\lambda\cos\mu\cos\nu \\ &= \sin\left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{-\lambda+\mu+\nu}{2}\right). \end{aligned}$$

Da der Ausdruck Π in vielen Untersuchungen vorkommt, und gewissermaßen als ein Modul des Körperwinkels zu betrachten ist, so wäre ein eigener Name für ihn zu wünschen.

3.

Es bieten sich nun zwei Wege zur Lösung unserer Aufgabe dar. Der erste näher liegende ist, die Gleichungen III. zu suchen, d. h. die Werthe von x, y, z , welche man in den Ausdruck

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy$$

zu substituiren hat, damit er sich in den Ausdruck

$$L\xi\xi + Mvv + N\zeta\zeta$$

verwandle. Ein zweiter Weg geht von der Betrachtung aus, daß umgekehrt auch die Gleichungen I., welche ξ, v, ζ durch x, y, z ausdrücken, in den Ausdruck

$$L\xi\xi + Mvv + N\zeta\zeta$$

substituirt, diesen in

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy$$

verwandeln müssen. Dieser zweite Weg bewährt sich als der vortheilhaftere. Wir werden ihn Gauss nachgehen, welcher ihn bei einer Untersuchung eingeschlagen hat, die von der unsrigen, dem Gegenstande nach, gänzlich fern liegend, gleichwohl die nemliche Analyse erfordert. Man vergleiche die berühmte Abhandlung: „*Determinatio attractionis etc.*“ in den Commentarien der Göttinger Societät.

4.

4.

Die zuletzt angestellte Betrachtung giebt die identische Gleichung:

$$L(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + M(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + N(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2 \\ = Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy.$$

Diese giebt folgende 6 Gleichungen:

$$\text{IV. } \begin{cases} (1) L\alpha\alpha + M\alpha'\alpha' + N\alpha''\alpha'' = A, \\ (2) L\beta\beta + M\beta'\beta' + N\beta''\beta'' = B, \\ (3) L\gamma\gamma + M\gamma'\gamma' + N\gamma''\gamma'' = C, \\ (4) L\beta\gamma + M\beta'\gamma' + N\beta''\gamma'' = a, \\ (5) L\gamma\alpha + M\gamma'\alpha' + N\gamma''\alpha'' = b, \\ (6) L\alpha\beta + M\alpha'\beta' + N\alpha''\beta'' = c. \end{cases}$$

Aus den 12 Gleichungen II. und IV. sind die 12 Größen $L, M, N, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ zu bestimmen. Es ist hierbei zu bemerken, daß man die Gleichungen II. aus den Gleichungen IV. erhält, indem man 1 statt L, M, N, A, B, C setzt, und $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ respective für a, b, c . Aus allen Resultaten, die man aus den Gleichungen IV. ableitet, erhält man so alsbald die entsprechenden, wie sie aus den Gleichungen II. folgen. Die Auflösung der genannten 12 Gleichungen kann nun auf die mannfaltigste Weise unternommen werden. Wir bedienen uns der folgenden Analyse.

5.

Man schreibe die 3 Gleichungen IV. 1, 6, 5, wie folgt:

$$\begin{aligned} L\alpha.\alpha + M\alpha'.\alpha' + N\alpha''.\alpha'' &= A, \\ L\alpha.\beta + M\alpha'.\beta' + N\alpha''.\beta'' &= c, \\ L\alpha.\gamma + M\alpha'.\gamma' + N\alpha''.\gamma'' &= b, \end{aligned}$$

so findet man hieraus für $L\alpha, M\alpha', N\alpha''$ die Gleichungen:

$$\text{V. } \begin{cases} (1) \Pi.L\alpha = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')A + (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')c + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')b, \\ (2) \Pi.M\alpha' = (\beta''\gamma - \beta\gamma'')A + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')c + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')b, \\ (3) \Pi.N\alpha'' = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)A + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)c + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)b, \\ \text{Eben so folgt aus IV. 6, 2, 4:} \\ (4) \Pi.L\beta = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')c + (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')B + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')a, \\ (5) \Pi.M\beta' = (\beta''\gamma - \beta\gamma'')c + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')B + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')a, \\ (6) \Pi.N\beta'' = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)c + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)B + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)a, \\ \text{und aus IV. 5, 4, 3:} \\ (7) \Pi.L\gamma = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')b + (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')a + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')C, \\ (8) \Pi.M\gamma' = (\beta''\gamma - \beta\gamma'')b + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')a + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')C, \\ (9) \Pi.N\gamma'' = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)b + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)a + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)C. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen II. lassen sich 9 ähnliche Gleichungen ableiten, welche man aus den Gleichungen V. unmittelbar erhält, indem man 1 statt L, M, N, A, B, C und $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ statt a, b, c setzt. Es werden dies die folgenden:

$$\text{VI. } \left\{ \begin{array}{l} 1) \Pi \alpha = (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') + (\gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha') \cos \nu + (\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta') \cos \mu, \\ 2) \Pi \alpha' = (\beta'' \gamma - \beta \gamma'') + (\gamma'' \alpha - \gamma \alpha'') \cos \nu + (\alpha'' \beta - \alpha \beta'') \cos \mu, \\ 3) \Pi \alpha'' = (\beta \gamma' - \beta' \gamma) + (\gamma \alpha' - \gamma' \alpha) \cos \nu + (\alpha \beta' - \alpha' \beta) \cos \mu, \\ 4) \Pi \beta = (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') \cos \nu + (\gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha') + (\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta') \cos \lambda, \\ 5) \Pi \beta' = (\beta'' \gamma - \beta \gamma'') \cos \nu + (\gamma'' \alpha - \gamma \alpha'') + (\alpha'' \beta - \alpha \beta'') \cos \lambda, \\ 6) \Pi \beta'' = (\beta \gamma' - \beta' \gamma) \cos \nu + (\gamma \alpha' - \gamma' \alpha) + (\alpha \beta' - \alpha' \beta) \cos \lambda, \\ 7) \Pi \gamma = (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') \cos \mu + (\gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha') \cos \lambda + (\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta'), \\ 8) \Pi \gamma' = (\beta'' \gamma - \beta \gamma'') \cos \mu + (\gamma'' \alpha - \gamma \alpha'') \cos \lambda + (\alpha'' \beta - \alpha \beta''), \\ 9) \Pi \gamma'' = (\beta \gamma' - \beta' \gamma) \cos \mu + (\gamma \alpha' - \gamma' \alpha) \cos \lambda + (\alpha \beta' - \alpha' \beta). \end{array} \right.$$

6.

Aus den Gleichungen V. 1, VI. 1; V. 4, VI. 4; V. 7, VI. 7 folgen sogleich folgende drei:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) 0 = (L - A) (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') + (L \cos \nu - c) (\gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha') \\ \quad + (L \cos \mu - b) (\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta'), \\ 2) 0 = (L \cos \nu - c) (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') + (L - B) (\gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha') \\ \quad + (L \cos \lambda - a) (\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta'), \\ 3) 0 = (L \cos \mu - b) (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') + (L \cos \lambda - a) (\gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha') \\ \quad + (L - C) (\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta'). \end{array} \right.$$

Eben so folgen aus den Gleichungen V. 2, VI. 2; V. 5, VI. 5; V. 8, VI. 8 die Gleichungen:

$$\text{VII. } \left\{ \begin{array}{l} 4) 0 = (M - A) (\beta'' \gamma - \beta \gamma'') + (M \cos \nu - c) (\gamma'' \alpha - \gamma \alpha'') \\ \quad + (L \cos \mu - b) (\alpha'' \beta - \alpha \beta''), \\ 5) 0 = (M \cos \nu - c) (\beta'' \gamma - \beta \gamma'') + (M - B) (\gamma'' \alpha - \gamma \alpha'') \\ \quad + (M \cos \lambda - a) (\alpha'' \beta - \alpha \beta''), \\ 6) 0 = (M \cos \mu - b) (\beta'' \gamma - \beta \gamma'') + (M \cos \lambda - a) (\gamma'' \alpha - \gamma \alpha'') \\ \quad + (M - C) (\alpha'' \beta - \alpha \beta''), \end{array} \right.$$

und aus den Gleichungen V. 3, VI. 3; V. 6, VI. 6; V. 9, VI. 9:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7) 0 = (N - A) (\beta \gamma' - \beta' \gamma) + (N \cos \nu - c) (\gamma \alpha' - \gamma' \alpha) \\ \quad + (N \cos \mu - b) (\alpha \beta' - \alpha' \beta), \\ 8) 0 = (N \cos \nu - c) (\beta \gamma' - \beta' \gamma) + (N - B) (\gamma \alpha' - \gamma' \alpha) \\ \quad + (N \cos \lambda - a) (\alpha \beta' - \alpha' \beta), \\ 9) 0 = (N \cos \mu - b) (\beta \gamma' - \beta' \gamma) + (N \cos \lambda - a) (\gamma \alpha' - \gamma' \alpha) \\ \quad + (N - C) (\alpha \beta' - \alpha' \beta). \end{array} \right.$$

7.

Eliminirt man aus den Gleichungen VII. 1. 2. 3. die Ausdrücke $\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma'$, $\gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha'$, $\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta'$, so erhält man die Gleichung:

$$0 = (L-A)(L-B)(L-C) - (L-A)(L \cos \lambda - a)^2 - (L-B)(L \cos \mu - b)^2 \\ - (L-C)(L \cos \nu - c)^2 + 2(L \cos \lambda - a)(L \cos \mu - b)(L \cos \nu - c).$$

Eben so erhält man durch Elimination von $\beta'' \gamma - \beta \gamma''$, $\gamma'' \alpha - \gamma \alpha''$, $\alpha'' \beta - \alpha \beta''$, aus VII. 4. 5. 6.:

$$0 = (M-A)(M-B)(M-C) - (M-A)(M \cos \lambda - a)^2 - (M-B)(M \cos \mu - b)^2 \\ - (M-C)(M \cos \nu - c)^2 + 2(M \cos \lambda - a)(M \cos \mu - b)(M \cos \nu - c),$$

und durch Elimination von $\beta \gamma' - \beta' \gamma$, $\gamma \alpha' - \gamma' \alpha$, $\alpha \beta' - \alpha' \beta$ aus VII. 7. 8. 9.:

$$0 = (N-A)(N-B)(N-C) - (N-A)(N \cos \lambda - a)^2 - (N-B)(N \cos \mu - b)^2 \\ - (N-C)(N \cos \nu - c)^2 + 2(N \cos \lambda - a)(N \cos \mu - b)(N \cos \nu - c).$$

Man sieht also, daß L , M , N Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\text{VIII. } (x-A)(x-B)(x-C) - (x-A)(x \cos \lambda - a)^2 - (x-B)(x \cos \mu - b)^2 \\ - (x-C)(x \cos \nu - c)^2 + 2(x \cos \lambda - a)(x \cos \mu - b)(x \cos \nu - c) = 0$$

sind. Bemerkt man, daß

$$1 - \cos \lambda \cos \lambda - \cos \mu \cos \mu - \cos \nu \cos \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu = \Pi \Pi,$$

so wird diese Gleichung entwickelt:

$$\text{VIII. } \Pi \Pi x^3 - x^2 [A \sin \lambda \sin \lambda + B \sin \mu \sin \mu + C \sin \nu \sin \nu \\ - 2a(\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu) - 2b(\cos \mu - \cos \nu \cos \lambda) - 2c(\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu)] \\ + x[AB + BC + CA - aa - bb - cc - 2 \cos \lambda(aA - bc) - 2 \cos \mu(bB - ca) - 2 \cos \nu(cC - ab)] \\ - ABC + Aaa + Bbb + Ccc - 2abc = 0.$$

8.

Aus II. 1, IV. 1, II. 2, IV. 2, II. 6, IV. 6 folgen die drei Gleichungen:

$$(L-M) \alpha' \alpha' + (L-N) \alpha'' \alpha'' = L-A, \\ (L-M) \beta' \beta' + (L-N) \beta'' \beta'' = L-B, \\ (L-M) \alpha' \beta' + (L-N) \alpha'' \beta'' = L \cos \nu - c.$$

Multipliziert man die ersten beiden und zieht vom Producte das Quadrat der letzten ab, so erhält man:

$$(L-M)(L-N)(\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta')^2 = (L-A)(L-B) - (L \cos \nu - c)^2.$$

Auf diese Weise erhält man folgende 3 Gleichungen:

30*

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \alpha' \beta'' - \alpha'' \beta' &= \sqrt{\left(\frac{(L-A)(L-B) - (L \cos \nu - c)^2}{(L-M)(L-N)} \right)}, \\ 2) \quad \beta' \gamma'' - \beta'' \gamma' &= \sqrt{\left(\frac{(L-B)(L-C) - (L \cos \lambda - a)^2}{(L-M)(L-N)} \right)}, \\ 3) \quad \gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha' &= \sqrt{\left(\frac{(L-C)(L-A) - (L \cos \mu - b)^2}{(L-M)(L-N)} \right)}, \end{aligned} \right\}$$

wo die Zeichen der Wurzel ausdrücke willkürlich sind. Ferner auf dieselbe Weise:

$$\text{IX.} \left\{ \begin{aligned} 4) \quad \alpha'' \beta - \alpha \beta'' &= \sqrt{\left(\frac{(M-A)(M-B) - (M \cos \nu - c)^2}{(M-N)(M-L)} \right)}, \\ 5) \quad \beta'' \gamma - \beta \gamma'' &= \sqrt{\left(\frac{(M-B)(M-C) - (M \cos \lambda - a)^2}{(M-N)(M-L)} \right)}, \\ 6) \quad \gamma'' \alpha - \gamma \alpha'' &= \sqrt{\left(\frac{(M-C)(M-A) - (M \cos \mu - b)^2}{(M-N)(M-L)} \right)}, \\ 7) \quad \alpha \beta' - \alpha' \beta &= \sqrt{\left(\frac{(N-A)(N-B) - (N \cos \nu - c)^2}{(N-L)(N-M)} \right)}, \\ 8) \quad \beta \gamma' - \beta' \gamma &= \sqrt{\left(\frac{(N-B)(N-C) - (N \cos \lambda - a)^2}{(N-L)(N-M)} \right)}, \\ 9) \quad \gamma \alpha' - \gamma' \alpha &= \sqrt{\left(\frac{(N-C)(N-A) - (N \cos \mu - b)^2}{(N-L)(N-M)} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Gleichungen ist unsere Aufgabe vollständig gelöst.

9.

Ich bemerke noch folgendes: Aus den Gleichungen II. 4, IV. 4; II. 5, IV. 5 folgt:

$$\begin{aligned} (L-M)\beta'\gamma' + (L-N)\beta''\gamma'' &= L \cos \lambda - a, \\ (L-M)\gamma'\alpha' + (L-N)\gamma''\alpha'' &= L \cos \mu - b. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen II. 3, IV. 3; II. 6, IV. 6 folgt ferner:

$$\begin{aligned} (L-M)\gamma'\gamma' + (L-N)\gamma''\gamma'' &= L - C, \\ (L-M)\alpha'\beta' + (L-N)\alpha''\beta'' &= L \cos \nu - c. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen und die letzten beiden Gleichungen mit einander, so giebt die Differenz beider Producte:

$$\begin{aligned} &(L-M)(L-N)(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') \\ &= (L \cos \lambda - a)(L \cos \mu - b) - (L - C)(L \cos \nu - c), \end{aligned}$$

und auf diese Weise erhält man die 9 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & (1) (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') = \frac{(L \cos \lambda - a)(L \cos \mu - b) - (L - C)(L \cos \nu - c)}{(L - M)(L - N)}, \\
 & (2) (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = \frac{(L \cos \mu - b)(L \cos \nu - c) - (L - A)(L \cos \lambda - a)}{(L - M)(L - N)}, \\
 & (3) (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') = \frac{(L \cos \nu - c)(L \cos \lambda - a) - (L - B)(L \cos \mu - b)}{(L - M)(L - N)}, \\
 & (4) (\beta''\gamma - \beta\gamma'')(\gamma''\alpha - \gamma\alpha'') = \frac{(M \cos \lambda - a)(M \cos \mu - b) - (M - C)(M \cos \nu - c)}{(M - L)(M - N)}, \\
 \text{X. } & (5) (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')(\alpha''\beta - \alpha\beta'') = \frac{(M \cos \mu - b)(M \cos \nu - c) - (M - A)(M \cos \lambda - a)}{(M - L)(M - N)}, \\
 & (6) (\alpha''\beta - \alpha\beta'')(\beta''\gamma - \beta\gamma'') = \frac{(M \cos \nu - c)(M \cos \lambda - a) - (M - B)(M \cos \mu - b)}{(M - L)(M - N)}, \\
 & (7) (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) = \frac{(N \cos \lambda - a)(N \cos \mu - b) - (N - C)(N \cos \nu - c)}{(N - L)(N - M)}, \\
 & (8) (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = \frac{(N \cos \mu - b)(N \cos \nu - c) - (N - A)(N \cos \lambda - a)}{(N - L)(N - M)}, \\
 & (9) (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = \frac{(N \cos \nu - c)(N \cos \lambda - a) - (N - B)(N \cos \mu - b)}{(N - L)(N - M)}.
 \end{aligned}$$

Die Vergleichung der Formeln IX. und X. kann ebenfalls zu der Gleichung VIII. führen.

10.

Ist das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so wird $\cos \lambda = 0$, $\cos \mu = 0$, $\cos \nu = 0$, und die Gleichung VIII. wird, da für diesen Fall $\Pi = 1$:

$$\begin{aligned}
 & x^3 - x^2(A + B + C) + x(AB + BC + CA - aa - bb - cc) \\
 & - ABC + Aaa + Bbb + Ccc - 2abc = 0.
 \end{aligned}$$

Ist das ursprüngliche System ein conjugirtes, so ist $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, und die Gleichung VIII. wird:

$$\begin{aligned}
 & \Pi \Pi x^3 - x^2(A \sin \lambda \sin \lambda + B \sin \mu \sin \mu + C \sin \nu \sin \nu) \\
 & + x(AB + BC + CA) - ABC = 0,
 \end{aligned}$$

welche beide Gleichungen schon sonst gegeben sind.

Königsberg, im Mai, 1827.