# 3.

# Fliehmomente, oder die Summe $\sum(xX+yY)$ bei Kräften in der Ebene, und $\sum(xX+yY+zZ)$ bei Kräften im Raume.

(Von Herrn Geh. Hofr. und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.)

---

1.

Die Summe der Producte aus den Seitenkräften und den gleichnamigen Coordinaten ihrer Angriffspuncte kommt bei mehreren Untersuchungen vor. Man hat von ihr behauptet und sogar bewiesen (?), *dass beim Gleichgewichte diese Summe ein Maximum oder ein Minimum sei, und zwar Ersteres beim sicheren und Letzteres beim unsicheren Gleichgewichte.* Aber wie, wenn diese Summe keines Maximums fähig wäre? — Die Summe ist eine jener Grössen, deren Natur bis jetzt nicht untersucht ist, obgleich zu ihrer Erforschung nur *höchst einfache* und *elementare* Mittel nöthig sind.

## *Fliehmomente bei Kräften in der Ebene.*

2.

(Taf. I. Fig. 1.) Die Kräfte eines Kräftensystems werden gewöhnlich nach den Richtungen zweier Coordinaten-Axen zerlegt. Man kann sie auch nach den Richtungen der Strahlen zerlegen, welche aus einem Puncte $C$ durch die Angriffspuncte der Kräfte gehen, und nach den Linien, welche zu diesen Strahlen senkrecht sind, nämlich $P$ in $U$ und $V$, und $P_1$ in $U_1$ und $V_1$, u. s. w.

(Fig. 2.) Diese Kräfte $U, V, \ldots$ stehen in Verbindung mit den Seitenkräften $X, Y, \ldots$; denn es ist, wenn $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ die Winkel sind, welche die Strahlen $R, R_1, \ldots$ mit den Abscissen-Axen bilden:

$$1.\quad \begin{cases} U = X.\cos{:}\delta + Y.\sin{:}\delta, \\ V = X.\sin{:}\delta - Y.\cos{:}\delta, \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$2. \quad \begin{cases} X = U.\cos:\delta + V.\sin:\delta, \\ Y = U.\sin:\delta - V.\cos:\delta, \end{cases}$$

mithin

$$3. \quad \begin{cases} \Sigma X = \Sigma(U.\cos:\delta) + \Sigma(V.\sin:\delta), \\ \Sigma Y = \Sigma(U.\sin:\delta) - \Sigma(V.\cos:\delta). \end{cases}$$

Die Kräfte $V$, $V_1$, .... bewirken die Umdrehung um den Punct $C$; man findet auch wirklich

$$4. \quad y.X - x.Y = R(X.\sin:\delta - Y.\cos:\delta) = R.V.$$

Hingegen die Kräfte $U$, $U_1$, .... wirken nach verschiedenen Richtungen auf den Punct $C$. Das Product $R.V$ wird *Drehmoment* genannt. Das Product $R.U$ will ich das *Moment des Druckes* oder das *Moment der Fliehkraft* oder kurz *Fliehmoment* nennen.

So wie das Drehmoment der Kräfte $\Sigma R.V$ in die beiden Drehmomente der Seitenkräfte $\Sigma y.X$ und $\Sigma x.Y$ zerlegt werden kann, so kann auch das Fliehmoment der Kräfte $\Sigma R.U$ in die beiden Fliehmomente $\Sigma x.X$ und $\Sigma y.Y$ der Seitenkräfte zerlegt werden; denn es ist

$$R.U = R(X\cos:\delta + Y.\sin:\delta) = x.X + y.Y,$$

folglich

$$5. \quad \Sigma R.U = \Sigma xX + \Sigma yY,$$

d. h.: *Das Fliehmoment des ganzen Kräftensystems für einen bestimmten Drehpunct gleicht der Summe der beiden Fliehmomente der Seitenkräfte.*

(Fig. 3.) Dieses lässt sich auch unmittelbar in der Figur nachweisen; denn es ist

$$AK = AH + AG, \quad \text{also} \quad \Sigma R.AK = \Sigma R.AH + \Sigma R.AG.$$

In dieser Gleichung ist $R.AH$ das Fliehmoment von $X$ und $R.AG$ das Fliehmoment von $Y$. Die Aussage hat sich also bewährt. Da ferner

$$CA.AH = CE.AD \quad \text{und} \quad CA.AG = AE.AF$$

ist, so nimmt auch vorstehende Gleichung die obige Gestalt No. 5. an.

## 3.

Das Fliehmoment hat mit dem Drehmomente auch die Eigenschaft gemein, dass seine Grösse nicht von der Richtung der Coordinaten-Axen abhangt; denn

$$\Sigma R.U = \Sigma CA.AK$$

wird nicht geändert, wenn man auch ein anderes Coordinatensystem annimmt.

(Fig. 4.) Hingegen, wenn der Drehpunct $C$ geändert wird, ändert sich im Allgemeinen auch das Fliehmoment. Sind nämlich $a_1$, $b_1$ die Coordinaten des Puncts $C_1$ und ist

$$x = a_1 + x_1, \qquad y = b_1 + y_1,$$

so ist

$$6. \qquad \Sigma(xX + yY) = \Sigma(x_1 X + y_1 Y) + a_1 \Sigma X + b_1 \Sigma Y.$$

Die beiden letzten Producte geben vereint ein Fliehmoment, welches am Drehpuncte $C$ entstehen würde, wenn alle Kräfte mit einander parallel am Puncte $C_1$ angebracht wären. Durch vorstehende Gleichung ist also folgender Satz gewonnen:

$6_1$. *Das Fliehmoment am Puncte* C *gleicht dem Fliehmomente am Puncte* $C_1$, *wenn mit diesem noch das Fliehmoment vereinigt wird, welches am Drehpuncte* C *entstehen würde, wenn alle Kräfte, oder statt dieser die Mittelkraft derselben, parallel mit sich selbst am Puncte C angebracht würden.* (Das Gleiche wie beim Drehmomente.)

Wird das Fliehmoment am Drehpuncte $C$ durch $\mathfrak{F}C$ und jenes am Drehpuncte $C_1$ durch $\mathfrak{F}C_1$ vorgestellt, so dass

$$\Sigma(xX + yY) = \mathfrak{F}C \quad \text{und} \quad \Sigma(x_1 X + y_1 Y) = \mathfrak{F}C_1$$

und zugleich $\Sigma X = A$ und $\Sigma Y = B$ gesetzt wird, so lässt sich dieser Satz durch folgende Zeichen ausdrücken:

$$6_2. \qquad \mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_1 + a_1 A + b_1 B.$$

## 4.

Die Fliehmomente an verschiedenen Drehpuncten sind nicht immer an Grösse verschieden. Zuerst bemerke man eine Linie, deren Gleichung

$$7. \qquad u.B + v.A = \mathfrak{F}C,$$

und die so beschaffen ist, dass das Fliehmoment jedes Puncts dieser Linie verschwindet, oder $\mathfrak{F}C_1 = 0$ ist. Die Linie ist merkwürdig; ich will sie die *Hauptlinie der Fliehmomente* nennen.

Vergleicht man die Gleichung mit der Gleichung der Hauptlinie der Drehmomente oder mit der Gleichung der Mittelkraft

$$u.A - v.B = \Sigma(yX - xY),$$

so findet man folgenden Satz:

8. *Die Hauptlinie der Fliehmomente ist senkrecht zur Hauptlinie der Drehmomente.*

Die Coordinaten des Durchschnittspuncts dieser beiden Hauptlinien sind

$$9. \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{A.\Sigma(yX - xY) + B.\Sigma(xX + yY)}{A^2 + B^2}, \\[2ex] v' = \dfrac{A.\Sigma(xX + yY) - B.\Sigma(yX - xY)}{A^2 + B^2}. \end{cases}$$

Dieser Durchschnittspunct zeichnet sich vor allen übrigen dadurch aus, dass, wenn er zum Drehpuncte genommen wird, sowohl das Drehmoment als das Fliehmoment des Kräftensystems verschwindet. Der Punct ist derjenige, welcher gewöhnlich *Mittelpunct* des Kräftensystems genannt wird.

5.

(Fig. 4.) Ich verfolge die Gleichung ($6_2$.) weiter, und nehme Puncte $C_1, C_2, C_3$ in einer geraden Linie und $a_1, b_1$; $a_2, b_2$; $a_3, b_3$ zu ihren Coordinaten an. Zwischen den Fliehmomenten dieser Drehpuncte finden folgende Gleichungen Statt:

$$\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_1 + a_1 A + b_1 B,$$
$$\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_2 + a_2 A + b_2 B,$$
$$\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_3 + a_3 A + b_3 B.$$

Werden diese mit $a_2 - a_3$, $a_3 - a_1$, $a_1 - a_2$ und dann auch mit $b_2 - b_3$, $b_3 - b_1$, $b_1 - b_2$ multiplicirt und zusammengezählt, so ergeben sich die Gleichungen

$$10. \quad (a_2 - a_3).\mathfrak{F}C_1 + (a_3 - a_1)\ \mathfrak{F}C_2 + (a_1 - a_2).\mathfrak{F}C_3 = 0 \quad \text{und}$$
$$(b_2 - b_3).\mathfrak{F}C_1 + (b_3 - b_1).\mathfrak{F}C_2 + (b_1 - b_2).\mathfrak{F}C_3 = 0,$$

in welchen die Seitenkräfte $A$ und $B$ nicht mehr vorkommen, sondern nur die Fliehmomente dreier Puncte, und die Abstände dieser Puncte.

Von dieser allgemeinen Wahrheit will ich jetzt Anwendung machen. Ich lege den Punct $(a_2 b_2)$ in die Hauptlinie der Fliehmomente, und die beiden andern Puncte $C_1$, $C_3$ auf die beiden Seiten dieser Linie, und zwar in gleichen Abständen von derselben. In diesem Falle geben die beiden Gleichungen folgenden Satz:

$$11. \qquad \mathfrak{F}C_1 = -\mathfrak{F}C_3,$$

d. h.: *Drehpuncte auf beiden Seiten der Hauptlinie der Fliehmomente, und in gleichen Abständen von derselben, haben gleiche, aber entgegengesetzte Fliehmomente.*

Wird aber der Punct $(a_1 b_1)$ in die Hauptlinie der Fliehmomente und werden die beiden andern Puncte $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$ auf einer und derselben Seite dieser Linie angenommen, so gehen die beiden Gleichungen (10.) in folgende über:

$$\frac{\mathfrak{F}C_2}{\mathfrak{F}C_3} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1},$$

d. h.: *Die Fliehmomente zweier Drehpuncte messen sich so oft [sind eben die Vielfachen von einander] wie die Abstände der Drehpuncte von der Hauptlinie der Fliehmomente.*

Werden zuletzt in der Grundgleichung ($6_2$.) die Coordinaten $a_1$, $b_1$

veränderlich angenommen, so giebt diese Gleichung eine gerade Linie an, welche zu der Hauptlinie der Fliehmomente (7.) parallel ist, und deren Puncte gleiche Fliehmomente $\mathfrak{F}C_1$ haben; daher der Satz:

13. *Die Puncte einer Linie, welche zu der Hauptlinie der Fliehmomente parallel ist, haben gleiche Fliehmomente.*

6.

Das Gefundene fasse ich jetzt in Eins zusammen:

14. a) *In jedem Kräftensysteme in der Ebene, welches eine Mittelkraft hat, giebt es eine Linie, so beschaffen, dass das Fliehmoment jedes Punctes dieser Linie* $= 0$ *ist.*

b) *Diese Hauptlinie der Fliehmomente ist senkrecht zu der Hauptlinie der Drehmomente.*

c) *Die Fliehmomente aller Puncte einer Linie, welche zu dieser Hauptlinie parallel ist, sind gleich.*

d) *Die Fliehmomente von Puncten, welche auf beiden Seiten dieser Hauptlinie liegen und von ihr gleich weit abstehen, sind gleich, haben aber entgegengesetzte Zeichen.*

e) *Die Fliehmomente messen sich so oft [sind eben die Vielfachen von einander] wie die Abstände ihrer Drehpuncte von der Hauptlinie der Fliehmomente; sie wachsen zu beiden Seiten von* 0 *an bis ins Unendliche, und haben kein Maximum.*

(Fig. 5.) Dieselben Eigenschaften, welche bei dem Fliehmomente gefunden wurden, finden auch bei dem Drehmomente Statt. Ist nämlich $mn$ die Hauptdrehlinie oder die Richtung der Mittelkraft, und bedeutet $\mathfrak{D}C$ das Drehmoment um den Punct $C$, so ist $\frac{\mathfrak{D}C}{\mathfrak{D}C_2} = \frac{r}{r_2}$ und

$$\mathfrak{D}C = -\mathfrak{D}C_1, \quad \text{wenn} \quad r = -r,$$
$$\mathfrak{D}C = \mathfrak{D}C_2, \quad \text{wenn} \quad r = r_2.$$

Daher der Satz:

15. *Die Flieh- und die Drehmomente sind in Hinsicht ihrer Hauptdrehlinien gleichen Gesetzen unterworfen;* und

16. (Fig. 6.) *Die beiden Hauptlinien der Dreh- und der Fliehmomente theilen rechtwinklicht den Raum in vier Theile* **1, 2, 3, 4,** *so dass in einem Theile beide Momente bejaht, in dem gegenüberliegenden Theile beide Momente verneint und in jedem der beiden andern Theile das eine Moment bejaht und das andere verneint sind.*

7.

(Fig. 7.) Die oben gefundenen Sätze lassen sich noch auf eine andere Weise begründen. Man projicire die Linie $BD$ auf die drei Seiten des Dreiecks $ABC$; die Projectionen sind $BE$, $BF$, $BG$. Durch die Aehnlichkeit der Dreiecke, welche durch senkrechte und parallele Hülfslinien entstehen, lässt sich leicht beweisen, dass

$$AB \,.\, BE = BC \,.\, BF + AC \,.\, BG \quad \text{ist.}$$

In dieser Gleichung ist jede Seite mit der entsprechenden Projection der Linie $BD$ multiplicirt. Ihre Anwendung auf den vorliegenden Gegenstand ist folgende. $A$ und $C$ werden als zwei Drehpuncte des Kräftensystems angenommen, $B$ ist der Angriffspunct der Kraft $BD$; aus $A$ und $C$ gehen Strahlen durch die Angriffspuncte der Kräfte; jede Kraft wird auf die beiden zugehörigen Strahlen und auf die Verbindungslinien $AC$ projicirt und jede Projection mit der zugehörigen Seite des Dreiecks multiplicirt. Werden nun diese Producte zusammengezählt, so erhält man die Gleichung

$$17. \qquad \Sigma AB \,.\, BE = \Sigma BC \,.\, BF + AC \,.\, \Sigma BG,$$

welche Dasselbe wie ($6_2$.) giebt.

Ist $AC$ senkrecht zur Mittelkraft, so ist $\Sigma BG = 0$, und also

$$\Sigma AB \,.\, BE = \Sigma BC \,.\, BF,$$

oder: die Puncte einer Linie, welche senkrecht zur Mittelkraft ist, haben gleiche Fliehmomente; wie auch oben (14c.) gefunden.

$AC$ sei parallel zur Mittelkraft. In diesem Falle ist $\Sigma BG$ die Mittelkraft selbst. Wird diese Mittelkraft $M$ genannt und zur Abkürzung $\Sigma AB \,.\, BE = p$ und $\Sigma BC \,.\, BF = q$ gesetzt, so ist die obige Gleichung (17.)

$$p = q + AC \,.\, M.$$

Ist der Punct $C$ fest und der Punct $A$ veränderlich, so sind in vorstehender Gleichung $q$ und $M$ unveränderlich; $p$ hangt nur von $AC$ ab. Geht $A$ nach der Linken, so wächst $p$ bis $+\infty$. Nähert sich $A$ dem $C$, so wird $p$ kleiner; fällt $A$ in $C$, so wird $p = q$; geht $A$ nach der Rechten über $C$ hinaus, so wird $AC$ verneint, $p$ wird kleiner als $q$ und es wird einen Punct geben, wo $q - AC \,.\, M = 0$, also auch $p = 0$ ist. Es giebt also einen Punct, dessen Fliehmoment $= 0$ ist. Dieselbe Eigenschaft haben nach dem Vorigen alle Puncte der Linie, welche durch diesen Punct geht und senkrecht zur Mittelkraft ist. Diese ist die Hauptlinie der Fliehmomente.

Geht $A$ über diesen Punct hinaus, so wird $q - AC \,.\, M$, also auch $p$ verneint, und wächst bis $-\infty$.

Wird zuletzt angenommen, dass $C$ in dieser Hauptlinie der Fliehmomente liege, so ist $q=0$ und $p=AC.M$. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass $p$ mit $AC$ das Zeichen wechselt und dass die Puncte zu beiden Seiten dieser Hauptlinie und in gleichen Abständen von derselben gleiche aber entgegengesetzte Fliehmomente haben; wie auch (14d.) angiebt.

## 8.

Wenn keine Mittelkraft vorhanden, oder wenn $A=B=0$ oder $M=0$ ist, so geht aus beiden Darstellungs-Arten folgender Satz hervor:

18. *Hat das Kräftensystem keine Mittelkraft, so sind die Fliehmomente aller Drehpuncte gleich.*

In einem Kräftensysteme ohne Mittelkraft sind also nicht allein die Drehmomente, sondern auch die Fliehmomente aller Drehpuncte gleich, und es giebt weder bei dem einen noch bei dem andern ein *Maximum* oder *Minimum* von $\Sigma(xX+yY)$; wie man es bisher glaubte. In einem solchen Kräftensysteme giebt es weder eine Hauptlinie der Drehmomente, noch eine Hauptlinie der Fliehmomente. Dasselbe gilt von einem Kräftensysteme, welches im Gleichgewichte ist.

## 9.

Sind die Kräfte parallel, so stört dies nicht die Allgemeinheit der oben gefundenen Sätze. Nimmt man in diesem Falle die Abscissen-Axe in der Richtung der Kräfte an, so ist

$$b=\frac{\Sigma yX}{\Sigma X}$$

die Gleichung für die Hauptlinie der Drehmomente, und

$$a=\frac{\Sigma xX}{\Sigma X}$$

ist die Gleichung für die Hauptlinie der Fliehmomente.

(Fig. 8.) Es ist leicht, dies in der Figur nachzuweisen; denn wegen der Antiparallelen ist

$$\begin{aligned}CA.AB+CA_1.A_1B_1+\ldots &= DA.AE+D_1A_1.A_1E_1+\ldots\\ &=(x-a)X+(x_1-a)X_1+\ldots,\end{aligned}$$

und zugleich ist

$$CD.X+CD_1.X_1+\ldots=(y-b)X+(y_1-b)X_1+\ldots$$

Ist nun die Summe der Drehmomente und auch die Summe der Fliehmomente $=0$, so ist

$$\Sigma(x-a)X=0 \quad \text{und} \quad \Sigma(y-b)X=0;$$

woraus sich die obigen Werthe von $a$ und $b$ ergeben. $MN$ ist die Hauptlinie der Drehmomente und $KL$ die Hauptlinie der Fliehmomente; ihr Durchschnitt ist der Mittelpunct der parallelen Kräfte.

### *Fliehmomente bei Kräften im Raume.*

### 10.

Gehen aus dem Puncte $C$, dem Anfangspuncte der Coordinaten, durch die Angriffspuncte der Kräfte $P, P_1, P_{\prime\prime}, \ldots$ Strahlen $R, R_1, R_{\prime\prime}, \ldots$, so ist

$$\cos(RP) = \cos(Rx) \cdot \cos(Px) + \cos(Ry) \cdot \cos(Py) + \cos(Rz) \cdot \cos(Pz)$$
$$= \frac{x}{R} \cdot \frac{X}{P} + \frac{y}{R} \cdot \frac{Y}{P} + \frac{z}{R} \cdot \frac{Z}{P};$$

daher:

19. $$\Sigma(xX+yY+zZ) = \Sigma RP\cos(RP) = \Sigma R \,.\, P_{(r)} = \Sigma P \,.\, R_{(p)}.$$

$P_{(r)}$ ist die Projection der Kraft $P$ auf die Richtung des zugehörigen Strahls $R$, also eine Kraft, welche in der Richtung des Strahls $R$ auf den Punct $C$ wirkt. Das Product aus dieser Kraft $P_{(r)}$ und aus dem Strahle $R$ nenne ich das *Fliehmoment* der Kraft $P$ für den Punct $C$, und die Summe dieser Producte das *Fliehmoment des ganzen Kräftensystems* für den Punct $C$. (Ich erinnere hier besonders, dass bei diesem Fliehmomente an kein Drehen und an keine Dreh-Axe gedacht wird.)

Die vorstehenden Gleichungen geben die verschiedenen Arten an, wie das Fliehmoment des Kräftensystems dargestellt werden kann.

Es ist $x = R.\cos(RX)$, $y = R.\cos(RY)$, $z = R.\cos(RZ)$, mithin

$$\Sigma xX = \Sigma RX\cos(RX) = \Sigma R \,.\, X_{(r)},$$
$$\Sigma yY = \Sigma RY\cos(RY) = \Sigma R \,.\, Y_{(r)},$$
$$\Sigma zZ = \Sigma RZ\cos(RZ) = \Sigma R \,.\, Z_{(r)}.$$

$X_{(r)}$ ist die Projection der Seitenkraft $X$ auf die Richtung des Strahls $R$; das Product $R.X_{(r)}$ ist das Fliehmoment dieser Seitenkraft $X$, und $\Sigma RX_{(r)}$ ist das Fliehmoment aller Seitenkräfte $X, X_1, \ldots$ Vorstehende Gleichungen geben an, dass dies auch durch $\Sigma xX$ ausgedrückt werden kann. Aehnliches gilt von den beiden andern Gruppen paralleler Seitenkräfte $Y, \ldots$, und $Z, \ldots$ Die Gleichung (19.), in Verbindung mit Diesem, giebt daher folgenden Satz:

20. $$\Sigma R \,.\, P_{(r)} = \Sigma R \,.\, X_{(r)} + \Sigma R \,.\, Y_{(r)} + \Sigma R \,.\, Z_{(r)} = \Sigma xX + \Sigma yY + \Sigma zZ,$$

d. h.: *Das Fliehmoment des ganzen Kräftensystems kann in drei gesonderte, von einander unabhängige Fliehmomente der drei Gruppen paralleler Seitenkräfte zerlegt werden.*

## 11.

Die Strahlen und die Projectionen der Kräfte auf die Richtungen der Strahlen hangen nicht von der Richtung des gewählten Coordinatensystems ab. Daraus folgt, dass der Werth der Summe

$$\Sigma(xX+yY+zZ)$$

sich nicht ändert, wenn auch ein anderes Coordinatensystem angenommen wird. Dieser Satz kann an veränderten Coordinaten selbst nachgewiesen werden. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma$ die Cosinusse der Winkel, welche $x'$ mit $x, y, z$ bildet, $\alpha', \beta', \gamma'$ die welche $y'$ und $\alpha'', \beta'', \gamma''$ die welche $z'$ mit $x, y, z$ bildet, und sind $a, b, c$ die Coordinaten des Anfangspuncts des neuen Coordinatensystems, so ist

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c), & X' &= \alpha X+\beta Y+\gamma Z,\\ y' &= \alpha'(x-a)+\beta'(y-b)+\gamma'(z-c), & Y' &= \alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z,\\ z' &= \alpha''(x-a)+\beta''(y-b)+\gamma''(z-c), & Z' &= \alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z. \end{aligned}$$

Werden nun die Producte $x'X'$, $y'Y'$, $z'Z'$ gebildet, zusammengezählt und die bekannten Gleichungen zwischen $\alpha, \beta, \ldots. \gamma''$ angewendet, so erhält man die Gleichung

$$21. \qquad \Sigma(x'X'+y'Y'+z'Z') = \Sigma[(x-a)X+(y-b)Y+(z-c)Z],$$

d. h.: *Die Summe der Producte aus den Seitenkräften und den gleichnamigen Coordinaten wird nicht geändert, wenn man die Richtung der Coordinaten ändert.*

## 12.

Es sei $\Sigma X = A$, $\Sigma Y = B$, $\Sigma Z = C$, und $a, b, c$ seien so angenommen, dass

$$22. \qquad a.A+b.B+c.C = \Sigma(xX+yY+zZ);$$

was immer möglich ist. In diesem Fall ist auch

$$\Sigma[(x-a)X+(y-b)Y+(z-c)Z] = \Sigma(x'X'+y'Y'+z'Z') = 0.$$

Werden nun auch $a, b, c$ veränderlich angenommen, so giebt die Gleichung (22.) eine Ebene, so beschaffen, dass das Fliehmoment des ganzen Kräftensystems für jeden Punct dieser Ebene $=0$ ist. Diese Ebene nenne ich die Ebene der *verschwundenen Fliehmomente*, oder kurz, *Haupt-Flieh-Ebene*. Sie ist nicht zu verwechseln mit der *Ebene der Mittelpuncte*, von welcher ein andermal gehandelt werden wird. Ihre Gleichung, verglichen mit den Gleichungen für die Hauptdrehlinie:

$$y = \frac{B}{A}.x+\frac{C.K-N.E^2}{A.E^2}, \qquad z = \frac{C}{A}.x+\frac{-B.K+M.E^2}{A.E^2},$$

wo $K = AL + BM + CN$*) und $E^2 = A^2 + B^2 + C^2$ ist, giebt ihre Lage im Kräftensysteme an; nämlich:

23. *Die Haupt-Flieh-Ebene ist senkrecht zur Hauptdrehlinie.*

Die Coordinaten des Durchschnittspuncts der Haupt-Flieh-Ebene und der Hauptdrehlinie sind

24. $$a_1 = \frac{BN - CM + A\mathfrak{G}}{E^2}, \qquad b_1 = \frac{CL - AN + B\mathfrak{G}}{E^2}, \qquad c_1 = \frac{AM - BL + C\mathfrak{G}}{E^2};$$

wo $$\mathfrak{G} = \Sigma(xX + yY + zZ) \text{ ist.}$$

## 13.

Für den Funct $C$ oder den Anfangspunct der Coordinaten ist das Fliehmoment $= \mathfrak{G}$, für den Punct $(a'b'c')$ oder $C'$ sei es $= \mathfrak{G}'$. Nach der Gleichung (21.) ist

$$\Sigma(x'X' + y'Y' + z'Z') = \Sigma(xX + yY + zZ) - a'A - b'B - c'C,$$

oder

25. $$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + a'.A + b'.B + c'.C,$$

d. h.: *Das Fliehmoment für den Punct* C *gleicht dem Fliehmomente für den Punct* C', *wenn mit diesem noch das Fliehmoment vereinigt wird, welches beim ersten Puncte* C *entsteht, wenn beim letzten Puncte* C' *alle Kräfte nach parallelen Richtungen oder auch die Mittelkraft des Kräftensystems angebracht werden.*

Diese Gleichung ist noch einer andern Deutung fähig. Werden nämlich $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ beständig, aber $a'$, $b'$, $c'$ veränderlich angenommen, so giebt sie eine Ebene an, so beschaffen, dass für alle ihre Puncte dasselbe Fliehmoment $\mathfrak{G}'$ Statt findet. Diese Ebene ist parallel zu der Haupt-Flieh-Ebene (22.). Daher:

26. *Für Puncte einer Ebene, welche zu der Haupt-Flieh-Ebene parallel ist, sind die Fliehmomente gleich.*

## 14.

Sind $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'''$ die Fliehmomente für die Puncte $C$, $C'$, $C''$, $C'''$ oder für (000), $(a'b'c')$, $(a''b''c'')$, $(a'''b'''c''')$, welche in einer geraden Linie liegen, so stehen sie nach dem oben gefundenen Satze durch folgende Gleichungen in Verbindung:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + a'A + b'B + c'C,$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'' + a''A + b''B + c''C,$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}''' + a'''A + b'''B + c'''C.$$

*) Es ist $L = \Sigma(yZ - zY)$, $\quad M = \Sigma(zX - xZ)$, $\quad N = \Sigma(xY - yX)$.

Werden diese Gleichungen nach ihrer Folge mit $a''-a'''$, $a'''-a'$, $a'-a''$, mit $b''-b'''$, $b'''-b'$, $b'-b''$ und mit $c''-c'''$, $c'''-c'$, $c'-c''$ multiplicirt, und berücksichtigt man zugleich, dass

$$\frac{a'-a''}{b'-b''}=\frac{a'-a'''}{b'-b'''}=\frac{a''-a'''}{b''-b'''} \quad \text{und} \quad \frac{a'-a''}{c'-c''}=\frac{a'-a'''}{c'-c'''}=\frac{a''-a'''}{c''-c'''}$$

ist, so entstehen folgende drei Gleichungen:

$$27. \quad \begin{cases} \mathfrak{S}'(a''-a''') + \mathfrak{S}''(a'''-a') + \mathfrak{S}'''(a'-a'') = 0, \\ \mathfrak{S}'(b''-b''') + \mathfrak{S}''(b'''-b') + \mathfrak{S}'''(b'-b'') = 0, \\ \mathfrak{S}'(c''-c''') + \mathfrak{S}'(c'''-c') + \mathfrak{S}'(c'-c'') = 0; \end{cases}$$

welche den Zusammenhang der Fliehmomente für drei in einer geraden Linie liegende Puncte mit den Entfernungen dieser Puncte von einander angeben.

Diese Gleichungen sind die Grundlage der wichtigsten Sätze. Wird nämlich der Punct $C''$ in die Haupt-Flieh-Ebene gelegt, und werden die beiden andern Puncte $C'$ und $C'''$ an beiden Seiten, und zwar in gleichen Abständen von dieser Ebene angenommen, so ist

$$\mathfrak{S}''=0, \quad a''-a'''=a'-a'', \quad b''-b'''=b'-b'', \quad c''-c'''=c'-c'',$$

folglich

$$28. \qquad \mathfrak{S}'=-\mathfrak{S}''',$$

d. h.: *Die Fliehmomente für Puncte zu beiden Seiten und in gleichen Abständen von der Haupt-Flieh-Ebene sind gleich, und haben entgegengesetzte Zeichen.*

Wird aber der Punct $C'$ in die Haupt-Flieh-Ebene verlegt, so ist $\mathfrak{S}'=0$ und

$$29. \qquad \frac{\mathfrak{S}''}{\mathfrak{S}'''}=\frac{a''-a'}{a'''-a'}=\frac{b''-b'}{b'''-b'}=\frac{c''-c'}{c'''-c'},$$

d. h.: *Die Fliehmomente messen sich so oft [sind eben die Vielfachen von einander], wie die Abstände ihrer zugehörigen Scheitelpuncte von der Haupt-Flieh-Ebene.*

## 15.

Die Sätze, welche ich hier entwickelt habe, sind im Zusammenhange folgende:

a) *In jedem Kräftensysteme kann das Fliehmoment für jeden Punct in drei gesonderte, von einander unabhängige Fliehmomente der drei Gruppen paralleler Seitenkräfte zerlegt werden.*

b) *Hat das Kräftensystem eine Mittelkraft, so giebt es in ihm eine feste Ebene, von der Art, dass für jeden Punct dieser Ebene das Fliehmoment des Kräftensystems verschwindet. Diese Ebene ist die Haupt-Flieh-Ebene.*

c) *Diese Haupt-Flieh-Ebene ist senkrecht zur Hauptdrehlinie.*

d) *Für alle Puncte einer Ebene, welche zu der Haupt-Flieh-Ebene parallel ist, sind die Fliehmomente gleich.*

e) *Für die Puncte zu beiden Seiten und in gleichen Abständen von der Haupt-Flieh-Ebene sind die Fliehmomente gleich, haben aber entgegengesetzte Zeichen.*

f) *Die Fliehmomente messen sich so oft [sind von einander dieselben Vielfachen], wie die Abstände ihrer Scheitelpuncte von der Haupt-Flieh-Ebene; sie wachsen an einer Seite von* 0 *bis* $+\infty$, *an der andern bis* $-\infty$. *In einem bestimmten Kräftensysteme giebt es keinen grössten Werth von*

$$\Sigma(xX+yY+zZ).$$

g) *In einem Kräftensysteme ohne Mittelkraft, also auch in einem Kräftensysteme, welches im Gleichgewichte ist, sind für alle Puncte die Fliehmomente gleich.*

## 16.

Ich hoffe, durch diese Sätze über einen wichtigen Gegenstand, der noch im Dunkel lag, hinreichendes Licht verbreitet, einige Irrthümer beseitigt und zu gründlicheren Forschungen Veranlassung gegeben zu haben. Ich bemerke nur noch schliesslich, dass die Sätze in (§. 15.) auf dieselbe Weise, wie n (§. 7.) geschehen, bewiesen werden können. Es seien nämlich $AB_1C$, $AB_2C$, $AB_3C$, .... Dreiecke im Raume, welche eine gemeinschaftliche Seite $AC$ haben; die Linien $l_1, l_2, l_3, \ldots$ im Raume seien auf die Seiten dieser Dreiecke projicirt, und zwar $l_1$ auf die Seiten des ersten, $l_2$ auf die des zweiten Dreiecks; und es seien $m_1, m_2, \ldots$ die Projectionen auf $AB_1$, $AB_2$, ...., $n_1, n_2, \ldots$ die auf $CB_1$, $CB_2$, .... und $p_1, p_2, \ldots$ die Projectionen auf die gemeinschaftliche Seite $AC$. Dann kann bewiesen werden, dass

$$AB_1.m_1 + AB_2.m_2 + \ldots = CB_1.n_1 + CB_2.n_2 + \ldots + AC(p_1+p_2+\ldots),$$

oder

$$\Sigma AB.m = \Sigma CB.n + AC.\Sigma p \quad \text{ist.}$$

Diese Gleichung giebt denselben Satz wie No. (25.).