

4.

Remarques sur les séries infinies et leur convergence.

(Par M. Louis Olivier.)

1.

Les séries infinies peuvent servir à exprimer par leur forme les propriétés des fonctions, qu'elles représentent et à calculer par approximation les valeurs numériques de ces fonctions. Elles peuvent faire le premier, sans le second. Mais si les séries doivent être appliquées au calcul au lieu des expressions finies, qu'elles représentent, en énonçant seulement leurs premiers termes et la loi de la progression de ces termes, elles doivent être nécessairement telles, qu'après avoir calculé un certain nombre de termes, en commençant par le premier, on y ajoute un nouveau terme ou un des groupes de termes, qui conservent le même signe, on trouve toujours par la plus exactement la vraie valeur numérique de la série totale. Car si au contraire, en ajoutant le nouveau terme, ou groupe, on s'éloignoit de la vraie valeur de la série, tantôt en plus tantôt en moins, la valeur du reste de la série continueroit d'être incertaine, et la somme de termes, qu'on auroit prise, ne pourroit être nullement posée au lieu de la somme totale de la série, lors même, qu'on ne désireroit qu'une certaine approximation.

2.

On appelle convergente une série, qui a les deux propriétés suivantes, savoir: qu'on trouve sa valeur numérique d'autant plus exactement, qu'on calcule successivement plusieurs termes, et qu'en continuant indéfiniment ce calcul, on peut se rapprocher de la vraie valeur de la série totale à tel degré qu'on voudra.

Au contraire, on appelle indéterminée une série, qui ne donne aucun rapprochement, en continuant le calcul des termes.

Et on appelle divergente une série, dont les termes suivants, ajoutés aux précédents, ne donnent que des résultats, qui s'éloignent de plus en plus de la vraie valeur de la série.

Par exemple

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$ est une série convergente,

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$ est une série indéterminée, et

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \dots$ est une série divergente.

Toute série, qui, étant exprimée seulement par ses premiers termes et par la loi des termes, doit pouvoir être introduite dans le calcul au lieu de l'expression finie, dont elle représente la valeur, doit être nécessairement convergente (1.).

3.

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ représentent les termes d'une suite infinie, et s la somme de la série, cette somme peut être exprimée par

$$1. \quad s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + R,$$

en supposant, qu'on ait calculé les n premiers termes, et que R signifie la somme des termes ultérieurs, c'est-à-dire, le reste de la série, qui n'avait pas été calculé.

Cela posé, si n est un nombre indéfini, qui peut être aussi grand, qu'on voudra, la somme des n premiers termes pourra approcher aussi près, qu'on voudra, de la somme totale de la série, toutes les fois, que cette série est convergente. Elle en différera d'autant moins, que n sera plus grand. Donc il faut nécessairement, que R diminue, si n augmente. Mais cela ne se peut pas, à moins que les termes de la suite, ou les groupes de termes, qui conservent le même signe, ne diminuent eux mêmes, au moins à partir d'une certaine limite; car s'ils augmentoient, R en feroit nécessairement autant. Pour $n = \infty$, R sera nécessairement zéro. Donc, les deux conditions de la convergence des séries sont celles qui suivent:

1) Les termes de la série ou les groupes des termes, qui conservent le même signe, doivent diminuer constamment; au moins à partir d'une certaine limite.

2) La somme des termes, qui suivent le n^{me} terme, c'est-à-dire R , doit être zéro pour $n = \infty$.

Si une série est indéterminée, les termes ou les groupes des termes, qui ont les mêmes signes, ne diminuent pas nécessairement, et R n'est pas toujours $= 0$ pour $n = \infty$. Dans les séries divergentes, les termes ou les groupes de termes, ne diminuent pas non plus dans tous les cas, et R pourra être même $= \infty$ pour $n = \infty$. Les n premiers termes

mes seront peut-être aussi $= \infty$ pour $n = \infty$. Dans ce dernier cas la somme de la suite pourra être la différence entre deux quantités infinies, et cette différence pourra être tantôt infinie, tantôt une quantité finie.

4.

Puisque les séries, destinées à être introduites dans le calcul à la place d'expressions finies, doivent être toujours convergentes, il s'agit surtout de cette sorte de suites. Et si l'on veut fonder quelque analyse sur des séries données, il sera nécessaire de s'assurer, qu'elles sont convergentes. Car, dans le cas contraire, les conclusions qu'on auroit formées, seroient incertaines. C'est ce qu'on néglige souvent, et cela peut devenir une source d'erreurs. Par exemple, en employant la méthode de coefficients indéterminés, et étant donné l'équation

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \dots = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \dots$$

pour toutes les valeurs possibles de x , zéro y compris, on en tire ordinairement $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ etc., parcequ'on suppose, que $bx + cx^2 + dx^3 \dots$ et $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \dots$; $cx + dx^2 \dots$ et $\gamma x + \delta x^2 \dots$ etc. seront nuls en même temps, pour $x = 0$. Mais cela n'est vrai sans exception, que dans le cas de séries convergentes; car si les coefficients $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ étoient tels, que les termes qui suivent le n^{me} terme, n étant ∞ , ou seulement leur somme ne fussent pas nuls pour $x = 0$, la supposition formée d'avance, et les conclusions qu'on en aura tirées, n'auroient pas lieu.

Donc, avant de calculer par des séries, il faut voir toujours si elles satisfont aux conditions ci dessus de la convergence.

5.

Il est facile de voir, si une suite donnée satisfait à la première condition de la convergence, savoir à celle du décroissement continu des termes, à partir d'une certaine limite. Cette condition sera remplie, si le quotient d'un terme quelconque par celui qui le précède, ou le quotient d'un groupe de termes par celui du même signe qui le précède, est toujours moindre que l'unité; jusqu'à la limite.

La deuxième condition de la convergence, savoir, que le reste de la série, à partir du n^{me} terme, doit être zéro pour $n = \infty$, sera remplie, si, la première condition l'étant déjà, le produit du n^{me} terme ou du n^{me} groupe de termes par n , est égal à zéro. Car si d'après l'hypothèse, les termes ou les groupes de termes diminuent constamment, le

produit du n^{me} terme ou du n^{me} groupe de termes par n , ne peut pas être moindre que le reste R de la série: donc, si ce produit est nul, le reste R le sera à plus forte raison. De même, d'un autre côté, R ne peut pas être nul, pour $n = \infty$, si le produit du n^{me} terme ou du n^{me} groupe de termes par n est une quantité finie. Car puisqu'on suppose, que les termes, ou les groupes de termes de la série diminuent constamment jusqu'à zéro, R , ou la somme des n termes qui suivent le n^{me} terme, sera nécessairement plus grand que le produit du $2n^{\text{me}}$ terme par n . En général, R est compris entre les limites $n.a_n$ et $n.a_{2n}$, si a_n et a_{2n} représentent les n^{mes} et $2n^{\text{mes}}$ termes, ou les n^{mes} et $2n^{\text{mes}}$ groupes de termes du même signe. Mais a_{2n} ne peut pas être nul pour $n = \infty$ si a_n ne l'est pas, puisque n et $2n$ sont infinis en même tems, donc R ne peut pas être nul, si $n.a_n$ ne l'est pas.

D'ailleurs la deuxième condition de la convergence d'une série, dont le n^{me} terme ou le n^{me} groupe de termes du même signe est a_n , savoir, que le produit $n.a_n$ doit nécessairement être nul pour $n = \infty$, renferme implicitement la première condition du décroissement successif des termes; car si a_n n'étoit pas nul, le produit $n.a_n$ pourroit l'être encore moins pour $n = \infty$.

Donc si l'on trouve, que dans une série infinie, le produit du n^{me} terme, ou du n^{me} des groupes de termes qui conservent le même signe, par n , est zéro, pour $n = \infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme une marque, que la série est convergente; et réciproquement, la série ne peut pas être convergente, si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n = \infty$.

Nous allons appliquer ce criterium de la convergence des séries infinies à quelques exemples.

6.

Exemples.

I. Dans la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + R.$$

le n^{me} terme a_n est $\frac{1}{n}$. Donc $n.a_n = 1$ n'est pas 0. Donc la série n'est pas convergente.

II. Dans la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + R,$$

ou n est un nombre impair quelconque, le n^{me} des groupes de termes, qui conservent le même signe, est $a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)}$. Donc $n \cdot a_n = \frac{1}{2(2n-1)}$. Ce produit est zéro pour $n = \infty$. Donc la série est convergente.

III. Dans la série

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \dots \dots \dots + \frac{1}{n^p} + R,$$

le produit $n \cdot a_n$ est égal à $\frac{1}{n^{p-1}}$. Cette quantité est nulle pour $n = \infty$, si $p > 1$. Donc la série est convergente, si $p > 1$.

IV. Dans la série

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} \dots \dots \dots + \frac{1}{m^p} - \frac{1}{(m+1)^p} + R,$$

où m est un nombre impair quelconque, le m^{me} groupe de termes est

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} = \frac{(2n)^p - (2n-1)^p}{(2n(2n-1))^p} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p}{(2n-1)^p} = \frac{\frac{p}{2n} - \frac{p(p-1)}{2(2n)^2} \dots \dots}{(2n-1)^p},$$

donc

$$n \cdot a_n = \frac{\frac{1}{2}p - \frac{p(p-1)}{8n} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^2} \dots \dots}{(2n-1)^p}.$$

Le numérateur de cette fraction est $\frac{1}{2}p$ pour $n = \infty$, le dénominateur est infini pour $p > 0$. Donc $n \cdot a_n = 0$ pour $n = \infty$, si $p > 0$. Donc la série est toujours convergente, si $p > 0$.

V. Soit donnée la suite infinie

$$\frac{a+b}{\alpha+\beta} + \frac{a+2b}{\alpha+2\beta} + \frac{a+3b}{\alpha+3\beta} \dots \dots \dots + \frac{a+nb}{\alpha+n\beta} + R,$$

le n^{me} terme, multiplié par n , donne $n \cdot \frac{a+nb}{\alpha+n\beta} = \frac{a+nb}{\frac{\alpha}{n} + \beta}$. Cette quantité

est infinie, si b n'est pas nul. Donc la série donnée n'est pas convergente.

VI. Dans la série

$$\frac{1}{c(c+k)(c+2k) \dots (c+mk)} + \frac{1}{(c+k)(c+2k) \dots (c+(m+1)k)} \dots \dots$$

$$\dots \dots + \frac{1}{(c+(n-1)k)(c+nk) \dots (c+(m+n-1)k)} + R,$$

qui exprime les sommes des nombres figurés réciproques, on trouve

$$n.a_n = \frac{1}{(c + (n-1)k) \left(\frac{c}{n} + k \right) (c + (n+1)k) \dots (c + (m+n-1)k)}.$$

Cette quantité est zéro, si $n = \infty$ pour un k quelconque, toutes les fois que $c > 0$ et $m > 0$. Donc la série est convergente sous les mêmes conditions.

VII. La série infinie

$$c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^4}{4} \dots \dots \dots \frac{c^n}{n} + R,$$

qui exprime le logarithme hyperbolique de $\frac{1}{1-c}$, donne $n.a_n = c^n$, et cette quantité n'est pas nulle pour $n = \infty$, à moins que $c < 1$. Donc la série logarithmique n'est convergente que pour $c < 1$.

VIII. La série infinie

$$c - \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} - \frac{c^4}{4} \dots \dots \dots + \frac{c^m}{m} - \frac{c^{m+1}}{m+1} + R,$$

qui exprime le logarithme hyperbolique de $1+c$, m étant un nombre impair quelconque, donne

$$\begin{aligned} n.a_n &= n \left(\frac{c^{2n-1}}{2n-1} - \frac{c^{2n}}{2n} \right) = \frac{c^{2n-1}}{2 - \frac{1}{n}} - \frac{c^{2n}}{2} = c^{2n-1} \left(\frac{1}{2 - \frac{1}{n}} - \frac{c}{2} \right) \\ &= \frac{c^{2n-1}}{2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)} \left(2(1-c) + \frac{c}{n} \right). \end{aligned}$$

Donc le produit $n.a_n$ est zéro pour $n = \infty$, si $c < 1$, et il est infiniment grand si $c > 1$. Si $c = 1$, on trouve

$$n.a_n = \frac{c^{2n-1}}{2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)} \cdot \frac{c}{n} = \frac{1}{2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)} \cdot \frac{c^{2n}}{n},$$

et cette quantité est égale à $c^{2n} \log c$ pour $n = \infty$ (voyez le mémoire numero 28. page 309., 4^{me} cahier du tome précédent de ce journal), donc elle est égale à zéro, pour $c = 1$. Si c est négatif, la série (VIII.) rentre dans celle (VII.); donc $n.a_n$ n'est nul pour $n = \infty$, que si $c > -1$. Donc la série, qui exprime $\log. \text{hyp. } (1+c)$, n'est convergente, que depuis $c = -1$ jusqu'à $c = +1$.

IX. Pour juger de la convergence des séries dont les termes contiennent des factorielles, par exemple de la série du binome

$$(1+c)^m = 1 + mc + \frac{m.m-1}{1.2} c^2 \dots \dots + \frac{m.m-1 \dots (m-n+2)}{1.2.3 \dots n-1} c^{n-1} + R,$$

il faut recourir à quelques théorèmes de la théorie des factorielles.

Soit représentée la factorielle

1. $a(a+b)(a+2b)\dots\dots(a+(p-1)b)$ par $a^{p,b}$,
on a

$$2. a^{p+k,b} = a^{p,b}(a+pb)^{k,b} \text{ et de là}$$

$$3. (a+pb)^{k,b} = \frac{a^{p+k,b}}{a^{p,b}}.$$

D'un autre coté on a

$$4. a^{p,b} = 1^{p,\frac{b}{a}} a^p,$$

et cela donne $a^{p+k,b} = 1^{p+k,\frac{b}{a}} \cdot a^{p+k}$, donc, en vertu de (3.),

$$5. (a+pb)^{k,b} = \frac{1^{p+k,\frac{b}{a}}}{1^{p,\frac{b}{a}}} \cdot a^k.$$

Cela donne pour $a=b$

$$6. ((1+p)b)^{k,b} = \frac{1^{p+k,1}}{1^{p,1}} b^k,$$

et en faisant $(1+p)b = \lambda$, ou bien $p = \frac{\lambda}{b} - 1$,

$$7. \lambda^{k,b} = \frac{1^{\frac{\lambda}{b}-1+k,1}}{1^{\frac{\lambda}{b}-1,1}} \cdot b^k,$$

et si l'on écrit a au lieu de λ , et p au lieu de k ,

$$8. a^{p,b} = \frac{1^{\frac{a}{b}+p-1,1}}{1^{\frac{a}{b}-1,1}} \cdot b^p.$$

L'équation (2.) donne aussi

$$9. 1^{\frac{a}{b}+p-1,1} = 1^{p,1} (1+p)^{\frac{a}{b}-1,1},$$

donc on a suivant (4.)

$$10. 1^{\frac{a}{b}+p-1,1} = 1^{p,1} \left(\frac{1}{p} + 1\right)^{\frac{a}{b}-1, \frac{1}{p}} \cdot p^{\frac{a}{b}-1},$$

et en vertu de (8.)

$$11. a^{p,b} = \frac{1^{p,1} \left(\frac{1}{p} + 1\right)^{\frac{a}{b}-1, \frac{1}{p}} \cdot p^{\frac{a}{b}-1} \cdot b^p}{1^{\frac{a}{b}-1,1}}.$$

De là on tire l'expression suivante du quotient de deux factorielles:

$$12. \frac{a^{p,b}}{\lambda^{q,b}} = \frac{1^{p,1}}{1^{q,1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{p} + 1\right)^{\frac{a}{b}-1, \frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{q} + 1\right)^{\frac{\lambda}{b}-1, \frac{1}{q}}} \cdot \frac{p^{\frac{a}{b}-1}}{q^{\frac{\lambda}{b}-1}} \cdot \frac{b^p}{\beta^q} \cdot \frac{1^{\frac{\lambda}{b}-1,1}}{1^{\frac{a}{b}-1,1}}.$$

En appliquant cette expression à la série, qui représente la valeur de $(1+c)^m$, on trouve ce qui suit:

On a

$$13. (1+c)^m - 1 = mc + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} c^2 \dots + \frac{m \cdot m-1 \dots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots n} c^n + R,$$

et le n^{me} terme de cette série est

$$14. a_n = \frac{m^{n-1}}{1^{n-1}} \cdot c^n.$$

En comparant cette équation à celle (12.), on a

$$a = m, \quad p = n, \quad b = -1,$$

$$\lambda = 1, \quad q = n, \quad \beta = +1,$$

donc, en vertu de (12.):

$$15. a_n = \frac{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{-m-1, \frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{1, \frac{1}{n}}} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1^{0,1}}{1^{-m-1,1}} \cdot n^{-m-1} \cdot c^n.$$

Mais de l'équation (2.) on tire

$$16. 1^{0,1} = 1^{-m-1,1} \cdot (1-m-1)^{m+1,1},$$

donc, puisque $1^{0,1} = 1$,

$$17. 1^{-m-1,1} = \frac{1}{(-m)^{m+1,1}},$$

et en vertu de (15.)

$$18. a_n = \frac{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{-m-1, \frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{1, \frac{1}{n}}} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{m+1}} \cdot (-m)^{m+1,1} \cdot c^n.$$

C'est là l'expression du n^{me} terme de la série du binôme (13.), à l'aide des factorielles.

Si l'on fait $n = \infty$, on trouve

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{-m-1, \frac{1}{n}} = 1^{-m-1,0} = 1^{-m-1} = 1 \text{ et}$$

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{1, \frac{1}{n}} = 1^{1,0} = 1,$$

donc (18.)

$$19. a_n = \frac{(-m)^{m+1,1} \cdot (-1)^n}{n^{m+1}} \cdot c^n.$$

Cela fait voir, que le n^{me} coefficient de la série du binôme, n étant ∞ , est zéro toutes les fois, que $m > -1$.

Si $m = -1$, le coefficient est $= (-1)^n$, et si $m < -1$, le coefficient est infiniment grand.

En multipliant le coefficient de c^n (19.) par n , on trouve

$$20. \frac{(-m)^{m+1,1}(-1)^n}{n^m}.$$

Ce produit est zéro, pour $n = \infty$, si $m > 0$. Si $m = 0$, il est $= -m.(-1)^n = 0$, et si $m < 0$, il est infiniment grand. Le n^{me} terme lui-même, pris n fois, donne (19.)

$$21. n.a_n = \frac{(-m)^{m+1,1}(-1)^n}{n^m}.c^n = \pm (-m)^{m+1,1} \cdot \frac{c^n}{n^m}.$$

Dans cette expression le facteur $(-m)^{m+1,1}$ est toujours une quantité finie, quand m l'est. Donc il ne s'agit que de la fraction $\frac{c^n}{n^m}$.

Si $c = 1$ et m positif, cette fraction est zéro pour $n = \infty$.

Si $c = 1$ et m négatif, la fraction est ∞ pour $n = \infty$.

Si $c < 1$ et m positif ou nul, la fraction est zéro pour $n = \infty$.

Si $c < 1$, par exemple $c = \frac{1}{\gamma}$, γ étant > 1 , et m négatif, $= -\mu$, où $\mu > 0$, la fraction est égale à

$$\frac{n^\mu}{\gamma^n}.$$

On trouve la valeur de cette fraction suivant le mémoire numéro 28. de ce recueil, en différenciant, suivant n , le numérateur et le dénominateur, par exemple ν fois, où $\nu > \mu$. Cela donne

$$22. \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-(\nu-1))n^{\mu-\nu}}{\gamma^n(\log \gamma)^\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-(\nu-1))}{\gamma^n(\log \gamma)^\nu n^{\nu-\mu}},$$

et cette quantité est zéro pour $n = \infty$, si ν et μ sont finis.

Donc le n^{me} terme de la série (13.) pris n fois, c'est-à-dire, $n.a_n$ (21.), est toujours zéro pour $n = \infty$, m étant un nombre quelconque, si c est moindre que l'unité.

Si $c > 1$ et m négatif ou nul, la fraction $\frac{c^n}{n^m}$ est infiniment grande.

Si $c > 1$ et m positif, la valeur de la fraction $\frac{c^n}{n^m}$ est, en vertu du mémoire No. 28.

$$23. \frac{c^n(\log c)^\mu}{m(m-1)\dots(m-(\mu-1))n^{m-\mu}},$$

μ étant $> m$, et cette valeur est ∞ pour $n = \infty$.

Donc, si $n = \infty$, le n^{me} terme de la série (13.), pris n fois, c'est-à-dire, $n.a_n$ (21.), est toujours ∞ pour une valeur quelconque de m , si $c > 1$.

En nous résumant, nous venons de trouver, que pour $n = \infty$,

$$24. \begin{cases} n.a_n \text{ est toujours } = 0, \text{ si } c < 1, \\ n.a_n \text{ est toujours } = \infty, \text{ si } c > 1, \\ n.a_n \text{ est } = 0, \text{ si } c = 1 \text{ et } m \text{ positif,} \\ n.a_n \text{ est } = \infty, \text{ si } c = 1 \text{ et } m \text{ négatif.} \end{cases}$$

Cela posé, on sait que les termes de la série du binôme

$$25. (1+c)^m = 1 + mc + \frac{m.m-1}{1.2} c^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))}{1.2.3 \dots n} c^n + R$$

sont toujours alternativement positifs et négatifs (au moins à partir d'une certaine limite), toutes le fois que, pour un exposant non-entier, la série est infinie; c'est ce que fait voir aussi l'expression (19.) du n^{me} terme a_n . La série est donc composée de groupes à deux termes, et puisque, en supposant $n = \infty$, il est indifférent, qu'on exprime par n le nombre des termes ou le nombre des groupes de termes: la série, en vertu du théorème général (§. 5.), pourra être jugée convergente, si le groupe de termes $a_n - a_{n+1}$, pris n fois, est nul pour $n = \infty$.

L'équation (19.) donne

$$n(a_n - a_{n+1}) = n \left[\frac{(-m)^{m+1,1} \cdot (-1)^n}{n^{m+1}} c^n - \frac{(-m)^{m+1,1} (-1)^{n+1}}{(n+1)^{m+1}} c^{n+1} \right],$$

ou bien

$$26. n(a_n - a_{n+1}) = \frac{(-m)^{m+1,1} (-1)^n}{n^m} c^n \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{c}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m} \right).$$

Dans cette expression le facteur $\frac{(-m)^{m+1,1} \cdot (-1)^n}{n^m} c^n$ n'est autre chose, que

$n.a_n$ (21.). L'autre facteur $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{c}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m}$ est toujours une quantité

finie pour un c fini. Donc $n(a_n - a_{n+1})$ sera nul ou fini ou infini en même tems que $n.a_n$ est l'un ou l'autre. Donc la série du binôme (25.), en vertu de (24.), sera convergente pour un exposant quelconque, si $c < 1$ et si $c = 1$, m étant positif, et elle sera toujours divergente, si $c > 1$ et si $c = 1$, m étant négatif.

X. Le n^{me} terme a_n de la série

$$c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} + \frac{c^4}{2.3.4} \dots + \frac{c^n}{2.3 \dots n} + R,$$

qui exprime la quantité exponentielle e^c , est $a_n = \frac{c^n}{2.3 \dots n}$, donc

$$n.a_n = \frac{c^n}{2.3 \dots n-1}.$$

Si

Si $c < 1$, ce produit est évidemment $= 0$ pour $n = \infty$. Si $c > 1$, soit μ le premier nombre entier plus grand que c .

Alors $\frac{\mu^n}{2.3 \dots n-1}$ est $> n.a_n$. Mais

$$\frac{\mu^n}{2.3 \dots n-1} = \frac{\mu^{\mu+1}}{2.3 \dots \mu} \cdot \frac{\mu^{n-1-\mu}}{\mu+1. \mu+2. \dots n-1}.$$

Le premier facteur à droite est toujours une quantité finie, quelque grand que soit μ . Le second facteur, composé d'un nombre égal de facteurs en haut et en bas, peut être exprimé par

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \left(1 + \frac{2}{\mu}\right) \left(1 + \frac{3}{\mu}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1-\mu}{\mu}\right)}.$$

La valeur de la factorielle, qu'offre le dénominateur, est évidemment infiniment grande pour $n = \infty$. Donc le second facteur est $= 0$, pour $n = \infty$, et par conséquent $\frac{\mu^n}{2.3 \dots n-1}$ l'est aussi, quelque grand que soit μ . Donc à plus forte raison $\frac{c^n}{2.3 \dots n-1}$ ou $n.a_n$ sera nul, pour un c quelconque, n étant ∞ .

Cela fait voir, que la série est toujours convergente pour une valeur positive quelconque de c . Si c est négatif, les signes des termes de la série se succèdent en alternant, et l'on trouve, que la série est de même convergente.

XI. D'une manière tout-à-fait semblable on trouvera, que les séries

$$1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{2.3.4} \dots - \frac{c^{2n}}{2.3 \dots 2n} + R, \text{ et}$$

$$c - \frac{c^3}{2.3} + \frac{c^5}{2.3 \dots 5} \dots - \frac{c^{2n+1}}{2.3 \dots 2n+1} + R,$$

qui expriment le cosinus et le sinus de l'arc c , le rayon étant 1, sont aussi toujours convergentes, pour un arc quelconque.

XII. L'expression d'une puissance quelconque d'un cosinus par les cosinus et les sinus des arcs multiples est en général

$$(2 \cos c)^m = \cos mc + m \cos(m-2)c + \frac{m.m-1}{1.2} \cos(m-4)c \dots$$

$$+ \frac{m.m-1 \dots (m-(n-2))}{2.3 \dots n-1} \cos(m-2(n-1))c + R,$$

$$\pm \sqrt{-1} \left(\sin mc + m \sin(m-2)c + \frac{m.m-1}{2} \sin(m-4)c \dots \right.$$

$$\left. + \frac{m.m-1 \dots (m-(n-2))}{2.3 \dots n-1} \sin(m-2(n-1))c + R_2 \right),$$

où, au lieu de c , il faut encore écrire $c + 2\nu\pi$, ν étant un nombre entier quelconque (voyez tome I. cahier 1. de ce journal, page 17. et 18.).

Tous les cosinus et les sinus sont moindres que l'unité; mais dans les séries ci dessus ils ne diminuent pas nécessairement jusqu'à 0. Donc ces séries ne seront nécessairement convergentes que dans le cas, où les produits des coefficients binomiaux des termes infiniment éloignés par un nombre infini sont égaux à zéro. Cela n'a lieu, suivant (IX. 20.), que lorsque l'exposant m est positif. Donc, l'expression ci dessus de $(2\cos c)^m$ n'est généralement convergente que si exposant m est positif.

7.

On pourra trouver de même les conditions de la convergence des séries à double, à triple etc. entrée. On les tirera des réflexions semblables à celles que nous venons de faire sur les séries ordinaires.

8.

A cette occasion nous dirons un mot d'un procédé, qui donne quelquefois les limites de la somme d'une série.

Supposons une série, dont les termes, ou les groupes de termes qui ont le même signe, diminuent continuellement, à partir du premier, jusqu'à l'infini. Soient représentés dans ce cas les termes, ou les groupes de termes, par les ordonnées orthogonales A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 (Fig. 1.) d'une courbe, correspondantes aux abscisses $A_0A_1 = 1$, $A_0A_2 = 2$, $A_0A_3 = 3$ etc. Alors l'axe des abscisses sera une asymptote de la courbe, et la somme de la série sera égale à la somme des aires des parallélogrammes A_1C_2 , A_2C_3 , A_3C_4 , la largeur de tous ces parallélogrammes étant $= 1$. Cette somme des aires est plus grande, que l'aire entre la courbe, la première ordonnée et l'axe des abscisses. Prolongeons B_2C_3 , B_3C_4 jusqu'à D_1 , D_2 , nous aurons les parallélogrammes A_1B_2 , A_2B_3 , A_3B_4 , qui seront équivalents avec les parallélogrammes A_2C_3 , A_3C_4 , Donc la somme des aires de ces nouveaux parallélogrammes sera égale à la somme de la série, moins son premier terme. Mais l'aire, comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la première ordonnée, est plus grande, que la somme des aires des parallélogrammes A_1B_2 , A_2B_3 , A_3B_4 , Donc l'aire de la courbe est comprise entre la somme de la série totale et celle de la série moins son premier terme. Soit s la somme de la série, f l'aire de la courbe et a_1

le premier terme de la série, on a

$$s = f + k \text{ et } s - a_1 = f - \kappa,$$

k et κ étant deux quantités nécessairement positives. Leur somme sera égale à a_1 , comme les deux équations énoncées le font voir, en les retranchant l'une de l'autre. De là il suit que k et κ sont réellement, l'un et l'autre, moindres que a_1 . Donc on a

$$s < f + a_n \text{ et } s > f.$$

Si donc on peut trouver l'aire de la courbe, on aura deux limites, entre lesquelles la somme de la série sera nécessairement comprise.

En représentant par y les ordonnées de la courbe et par a_n les termes ou les groupes de termes de la série, l'équation de la courbe sera

$$y = a_n,$$

où n exprime les abscisses et y est regardé comme fonction de n . Cela posé, l'aire de la courbe sera égale à l'intégrale de $y dn$, prise par rapport à n , c'est-à-dire on aura

$$f = \int a_n dn.$$

L'intégrale doit être $= 0$ pour $n = 1$; et, en y faisant $n = \infty$, elle donnera les limites de la valeur de la série totale. On voit bien, que ce procédé peut encore être appliqué, en ne cherchant la valeur, que d'une partie quelconque de la série donnée. Si l'on cherche les limites de la valeur d'un reste de la série, par exemple de celui, qui complète la série, à partir du m^{me} terme, il n'y a qu'à supposer l'intégrale $= 0$ pour $n = m$, puis on fera $n = \infty$.

Exemples.

I. Soit donnée la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + R,$$

on a $a_n = \frac{1}{n}$, donc $f = \int \frac{dn}{n} = \log n + \text{Const.}$, et si f doit être 0 pour $n = m$, $0 = \log m + \text{Const.}$ Cela donne $\text{Const.} = -\log m$, et

$$f = \log \frac{n}{m}.$$

Donc les limites de la valeur du reste de la série, à partir du m^{me} terme, sont

$$\log \frac{n}{m} + \frac{1}{m} \text{ et } \log \frac{n}{m}.$$

Ces limites toutes les deux sont infiniment grandes pour $n = \infty$ et elles ne diffèrent que d'une quantité finie $\frac{1}{m}$. Donc la valeur du reste de la série est ∞ . Cela s'accorde avec (6. I.).

II. Soit donnée la série

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \dots + \frac{1}{n^\mu} + R,$$

on a $a_n = \frac{1}{n^\mu}$, donc $f = \int \frac{dn}{n^\mu} = \frac{n^{1-\mu}}{1-\mu} + \text{Const.}$, et si l'on cherche la valeur du reste, à partir du m^{me} terme, $0 = \frac{m^{1-\mu}}{1-\mu} + \text{Const.}$, donc $\text{Const.} = -\frac{m^{1-\mu}}{1-\mu}$ et

$$f = \frac{n^{1-\mu} - m^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Donc les limites de la valeur du reste de la série seront

$$\frac{n^{1-\mu} - m^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{1}{m^\mu} \text{ et } \frac{n^{1-\mu} - m^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Soit $\mu = 2$, les limites seront

$$\frac{n^{-1} - m^{-1}}{-1} + \frac{1}{m^2} \text{ et } \frac{n^{-1} - m^{-1}}{-1},$$

ou bien

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{m} - \frac{1}{n},$$

et pour $n = \infty$,

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \text{ et } \frac{1}{m}.$$

Mais ce procédé n'est applicable qu'aux cas, où l'intégrale $\int a_n dn$ peut être trouvée sans les secours de séries.